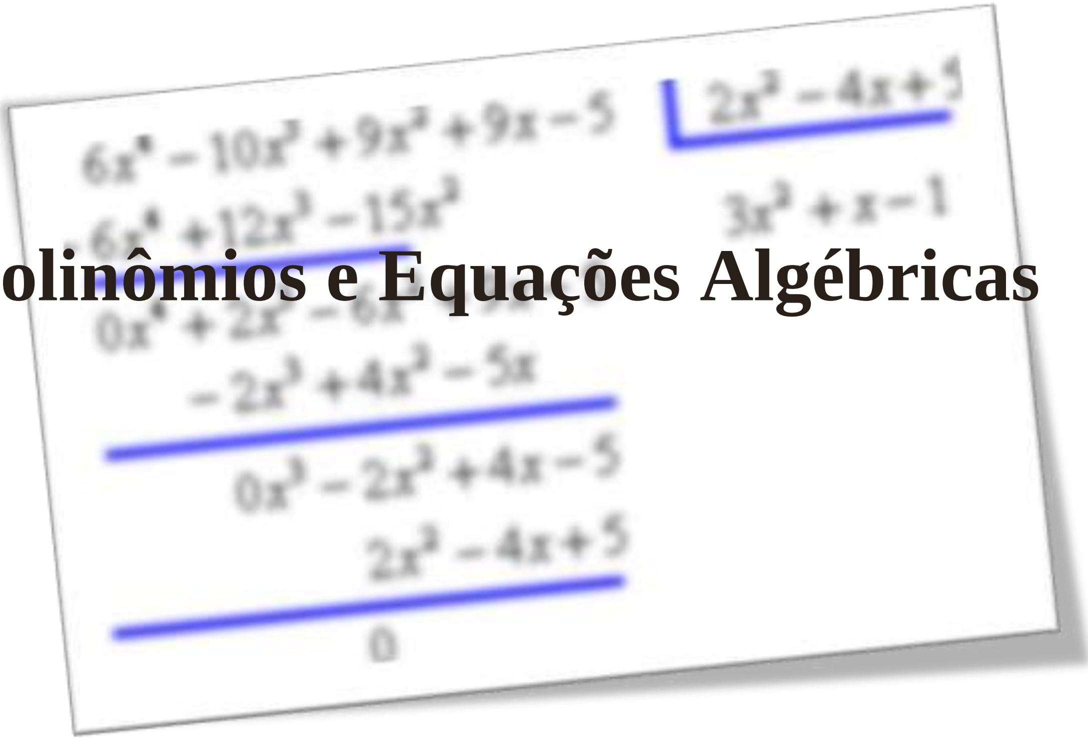
Formação continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano



Polinômios e Equações Algébricas

Tarefa 01

Cursista: Maria Amelia de Moraes Corrêa

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

S u m á r i o

Introdução

Este plano de trabalho visa organizar atividades para que os alunos consigam entender e identificar um polinômio.

A ideia inicial é propor que os alunos explorarem a visão geométrica, que lhes permitirão imaginar, de forma indutiva, algum método para determinar a área da figura geométrica fazendo com que apareça o polinômio.

Este plano de trabalho apresenta atividades, que visam apresentar aos alunos desde a identificação do grau de um polinômio até as relações de Girad, de forma simples e exemplificada. Enriquecendo desta forma o aprendizado e a percepção dos alunos acerca das propriedades envolvidas.

Quando começamos a entrar no tema já com um vídeo, que mostra aos alunos a importância e a aplicabilidade que os polinomios tem em nosso cotidiano, abordagem pratica e teoria na sala de aula fica bem mais fácil e interessante para os mesmos.

É importante, que os discentes compreendam e fixem de forma simples e dinâmica o assunto aqui abordado.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- **TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, vídeo.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Identificar e determinar o grau de um polinômio; calcular o valor numérico de um polinômio.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

- ***Introdução*:**

- **A função polinomial:**

Um polinômio (função polinomial) com coeficientes reais na variável x é uma função matemática f:R→R definida por:

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, denominados coeficientes do polinômio. O coeficiente a_0 é o termo constante.

Se os coeficientes são números inteiros, o polinômio é denominado polinômio inteiro em x.

Uma das funções polinomiais mais importantes é $f: R \to R$ definida por:

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

O gráfico desta função é a curva plana denominada parábola, que tem algumas características utilizadas em estudos de Cinemática, radares, antenas parabólicas e faróis de carros.

O valor numérico de um polinômio $p = p(x)$ em $x = a$ é obtido pela substituição de x pelo número a, para obter $p(a)$.

<u>Exemplo</u>: O valor numérico de $p(x) = 2x^2 + 7x - 12$ para $x = 3$ é dado por:

$$p(3) = 2 \times (3)^2 + 7 \times 3 - 12 = 2 \times 9 + 21 - 12 = 18 + 9 = 27$$

Grau de um polinômio

Em um polinômio, o termo de mais alto grau que possui um coeficiente não nulo é chamado termo dominante e o coeficiente deste termo é o coeficiente do termo dominante. O grau de um polinômio $p = p(x)$ não nulo, é o expoente de seu termo dominante, que aqui será denotado por $gr(p)$.

- $\underbrace{4x^4y}_{5^\circ\text{ grau}} + \underbrace{20x^2y^4}_{6^\circ\text{ grau}} + \underbrace{8xy}_{2^\circ\text{ grau}}$ é um polinômio do 6° grau;

- $\underbrace{6a^2b^4}_{5^\circ\text{ grau}} + \underbrace{a^3b^5}_{8^\circ\text{ grau}} + \underbrace{5a^7b^2}_{9^\circ\text{ grau}}$ é um polinômio do 9° grau.

Acerca do grau de um polinômio, existem várias observações importantes:

1. **Um polinômio nulo não tem grau uma vez que não possui termo dominante.**

2. **Se o coeficiente do termo dominante de um polinômio for igual a 1, o polinômio será chamado mônico.**

3. **Um polinômio pode ser ordenado segundo as suas potências em ordem crescente ou decrescente.**

4. **Quando existir um ou mais coeficientes nulos, o polinômio será dito incompleto.**

5. **Se o grau de um polinômio incompleto for n, o número de termos deste polinômio será menor do que $n + 1$.**

6. **Um polinômio será completo quando possuir todas as potências consecutivas desde o grau mais alto até o termo constante.**

7. **Se o grau de um polinômio completo for n, o número de termos deste polinômio será exatamente $n + 1$.**

É comum usar apenas uma letra p para representar a função polinomial $p = p(x)$ e $P[x]$ o conjunto de todos os polinômios reais em x.

- ## Igualdade de polinômios

Os polinômios p e q em $P[x]$, definidos por:

$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$
$$q(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n$$

são iguais se, e somente se, para todo $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$a_k = b_k$$

<u>Teorema:</u> Uma condição necessária e suficiente para que um polinômio inteiro seja identicamente nulo é que todos os seus coeficientes sejam nulos.

Assim, um polinômio:

$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

será nulo se, e somente se, para todo $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$a_k = 0$$

O polinômio nulo é denotado por $p_0 = 0$ em $P[x]$.

O polinômio unidade (identidade para o produto) $p1 = 1$ em $P[x]$, é o polinômio:

$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

tal que $a_0 = 1$ e $a_k = 0$, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- ## Exercícios de fixação:

Utilizar exercícios do livro didático para fixação dos conteúdos abordados nesta atividade. Páginas 162,164 e 166 do livro "Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03".

Atividade 2

- **HABILIDADE RELACIONADA: Identificar e determinar o grau de um polinômio; calcular o valor numérico de um polinômio.**
- **TEMPO DE DURAÇÃO: 30 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático para consulta.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Revisão e fixação através de atividades de avaliações.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Uma lista de exercícios extra para a melhor fixação da atividade 01.

<u>Lista de exercícios de fixação</u>

1) Encontre os valores de **a**, **b** e **c** para que os polinômios $P(x) = ax^2 + (b-1)x + 3$ e $Q(x) = -x^2 + 5x + c$ sejam idênticos.

Solução. Os polinômios serão idênticos se os coeficientes de cada termo algébrico também o forem:

$$\begin{cases} P(x) = ax^2 + (b-1)x + 3 \\ Q(x) = -x^2 + 5x + c \end{cases} \Rightarrow P(x) = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b - 1 = 5 \Rightarrow b = 6 \\ c = 3 \end{cases}$$

2) Determine **k** para que o grau de $P(x) = (k^2 - 2)x^3 - 5x^2 + x - 11$ seja igual a 2.

Solução. Para que o grau de P(x) seja 2 é necessário que o coeficiente de x^3 seja nulo:

$$P(x) = (k^2 - 2)x^3 - 5x^2 + x - 11 \rightarrow grau = 2 \Rightarrow k^2 - 2 = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$$

3) Identifique o grau e o coeficiente dominante de cada polinômio.

a) $P(x) = 3x^4 - 4x + 3$
$Grau: 4$
$C.Do\min ante: 3$

b) $Q(x) = -\sqrt{5}x^3 - \dfrac{5x^2}{4} + 3x - 7$
$Grau: 3$
$C.Do\min ante: -\sqrt{5}$

c) $R(x) = 2ix^5 - 3x^3 + 11x$
$Grau: 5$
$C.Do\min ante: 2i$

Solução. O grau de um polinômio é o maior grau observado entre os graus dos monômios. O coeficiente dominante é o coeficiente do monômio de maior grau.

4) Determine o valor de **m** para que o polinômio $Q(x) = (m-4)x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ seja de grau 3.

Solução. Para que o grau de Q(x) seja 3 é necessário que o coeficiente de x^3 não seja nulo:

$$Q(x) = (m-4)x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \rightarrow grau = 3 \Rightarrow m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$$

5) Calcule o valor numérico do polinômio $P(x) = 3x^4 - 4x + 3$ para cada valor de **x**.

a) x = i b) $x = -\dfrac{1}{2}$ c) x = - i d) x = 0

Solução. O valor numérico de P(x) é o valor encontrado ao substituir "x" pelo seu valor em cada caso.

a) $P(i) = 3(i)^4 - 4(i) + 3 = 3(1) - 4i + 3 = 6 - 4i$

b) $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = 3\left(\dfrac{1}{16}\right) + 2 + 3 = \dfrac{3}{16} + 5 = \dfrac{3+80}{16} = \dfrac{83}{16}$

c) $P(-i) = 3(-i)^4 - 4(-i) + 3 = 3(1) + 4i + 3 = 6 + 4i$

d) $P(0) = 3(0)^4 - 4(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

6) Calcule a soma dos coeficientes dos polinômios.

a) $P(x) = 3x^5 - 6x^3 + x$**. Soma = - 2** b) $P(x) = (2x^2 - 4x)^6$**. Soma = 64**

Solução. A soma dos coeficientes de um polinômio é o valor numérico de P(1).

a) $P(1) = 3(1)^5 - 6(1)^3 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$ **b)** $P(1) = (2(1)^2 - 4(1))^6 = (2-4)^6 = (-2)^6 = 64$

7) Calcule o valor de **m** sabendo que $P(x) = x^3 + 4x^2 + mx - 3$ possui uma raiz igual a **(- 2)**.

Solução. A raiz de um polinômio P(x) é o valor de "x" que anula P(x). Logo, se (- 2) é uma raiz de P(x), então P(-2) = 0. Substituindo, vem:

$$\begin{cases} P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + m(-2) - 3 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow -8 + 16 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow -2m = -5 \Rightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Logo, o polinômio é expresso como $P(x) = x^3 + 4x^2 + \dfrac{5}{2}x - 3$**.**

8) Sabendo que 1 é raiz de $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ e que P(2) = 3, calcule **a** e **b**.

Solução. Se x = 1 é raiz, então P(1) = 0. Considerando as informações, temos:

$$\begin{cases} P(1) = a(1)^3 - 2(1)^2 + b(1) - 1 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b - 3 = 0 \Rightarrow a + b = 3$$

$$\begin{cases} P(2) = a(2)^3 - 2(2)^2 + b(2) - 1 \\ P(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow 8a + 2b - 9 = 3 \Rightarrow 8a + 2b = 12$$

. As duas equações determinadas formam um sistema com as incógnitas "a" e "b".

$$\begin{cases} a + b = 3 \rightarrow \times(-8) \\ 8a + 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a - 8b = -24 \rightarrow \times(-8) \\ 8a + 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow -6b = -12 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

9) (UE – PI) Sabendo que os polinômios $P(x) = x^3 - 5$ e $Q(x) = (x^2 + px + q)(x - 2) + 3$ são idênticos, determine (**p + q**).

Solução. Os polinômios serão idênticos se os coeficientes de cada termo algébrico também o forem:

$$\begin{cases} P(x) = x^3 - 5 \\ Q(x) = (x^2 + px + q)(x - 2) + 3 = x^3 - (2 - p)x^2 - (2p - q)x - 2q + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x) = x^3 - 5 \\ Q(x) = x^3 - (2 - p)x^2 - (2p - q)x - 2q + 3 \end{cases} \Rightarrow P(x) = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} 2 - p = 0 \\ 2p - q = 0 \\ -2q + 3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 4 \end{cases} \Rightarrow p + q = 6$$

10) (UF-BA) Sendo $P(x) = (m-1)x^3 + x^2 + x - 1$ um polinômio de grau 2 e $Q(x) = kx^3 + x^2 + 2x + 2$ um polinômio que tem (- 1) como raiz, análise as afirmações seguintes em V ou F, justificando.

a) k.m = 1. **(V)**

b) P(x).Q(x) é um polinômio de grau 6. **(F)**

c) P(x) tem duas raízes reais. **(V)**

d) x.P(x) – Q(x) = 2 + 3x. **(F)**

Solução. Utilizando as informações do exercício em cada item, temos:

a) Se Q(x) possui uma raiz igual a (- 1), então Q(- 1) = 0. Substituindo, temos:

$$\begin{cases} Q(-1) = k(-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) + 2 \\ Q(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow -k + 1 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow -k = -1 \Rightarrow k = 1$$

Se P(x) é de grau 2, então (m – 1) = 0. Logo, m = 1. Então k.m = 1.1 = 1.

b) Não é necessário efetuar a multiplicação de P(x) por Q(x). Se P(x) é de grau 2 e Q(x) de grau 3, então o maior grau que aparecerá no produto será 5.

c) Calculando "x" para P(x) = 0, temos:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \in IR$$

d) $x.P(x) - Q(x) = x\left(x^2 + x - 1\right) - \left(x^3 + x^2 + 2x + 2\right) = x^3 + x^2 - x - x^3 - x^2 - 2x - 2 = -3x - 2$

11) (UNIFOR –CE) Sejam **k** e **t** números reais que tornem verdadeira a igualdade $\frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{k}{x} + \frac{t}{x-4}$ para qualquer valor de **x**, exceto 0 e 4. Que relação há entre **k** e **t**?

Solução. Observe que x.(x-4) = x^2 – 4x. Igualando os denominadores, temos:

$$\frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{k(x-4) + t(x)}{x(x-4)} \Rightarrow \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{kx - 4k + tx}{x^2 - 4x} \Rightarrow \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{(k+t)x - 4k}{x^2 - 4x} \Rightarrow \begin{cases} -4k = 12 \Rightarrow k = -3 \\ k + t = 0 \Rightarrow t = 3 \end{cases}$$

Logo, k + t = 0.

Atividade 3

- **TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Apresentar os algoritmos de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Soma de polinômios

Consideremos p e q polinômios em $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$, definidos por:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 x^2} + \boldsymbol{a_3 x^3} + \ldots + \boldsymbol{a_n x^n}$$
$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1 x} + \boldsymbol{b_2 x^2} + \boldsymbol{b_3 x^3} + \ldots + \boldsymbol{b_n x^n}$$

Definimos a soma de p e q, por:

$$\boxed{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{b_0}) + (\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{b_1})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a_2}+\boldsymbol{b_2})\boldsymbol{x^2} + \ldots + (\boldsymbol{a_n}+\boldsymbol{b_n})\boldsymbol{x^n}}$$

A estrutura matemática $(\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}], +)$ formada pelo conjunto de todos os polinômios com a soma definida acima, possui algumas propriedades:

1. Associativa: Quaisquer que sejam p, q, r em P[x], tem-se que:

$$\boxed{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})}$$

2. Comutativa: Quaisquer que sejam p, q em $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$, tem-se que:

$$\boxed{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}}$$

3. Elemento neutro: Existe um polinômio $\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ tal que

$$\boxed{\boldsymbol{p_0} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}}$$

qualquer que seja p em $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$.

4. Elemento oposto: Para cada p em $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$, existe outro polinômio $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{p}$ em $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ tal que

$$\boxed{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}}$$

Com estas propriedades, a estrutura $(\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}], +)$ é denominada um grupo comutativo.

<u>Exemplos:</u>

- $(3x+4y)+(2x-y)+(x+y) \rightarrow 3x+4y+2x-y+x+y \rightarrow \underbrace{3x+2x+x}+\underbrace{4y-y+y} = \mathbf{6x+4y}$
- Dados $a_1 = 3m^2+n$, $a_2 = 2m^2+3n$ e $a_3 = m^2+n$, determine $a_1+a_2-a_3$.

$$a_1+a_2-a_3 \rightarrow 3m^2+n+2m^2+3n-(m^2+n) \rightarrow 3m^2+n+2m^2+3n-m^2-n \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{3m^2+2m^2-m^2}+\underbrace{n+3n-n} = \mathbf{4m^2+3n}$$

▪ Produto de polinômios

Sejam p, q em P[x], dados por:

$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$
$$q(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n$$

Definimos o produto de p e q, como um outro polinômio r em $P[x]$:

$$r(x) = p(x) \cdot q(x) = C_o + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots + C_nx^n$$

tal que:

$$c_k = a_ob_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + a_3b_{k-3} + \ldots + a_{k-1}b_1 + a_kb_o$$

para cada c_K (k=1,2,3,...,m+n). Observamos que para cada termo da soma que gera c_K, a soma do índice de a com o índice de b sempre fornece o mesmo resultado k.

A estrutura matemática $(P[x],\cdot)$ formada pelo conjunto de todos os polinômios com o produto definido acima, possui várias propriedades:

1. Associativa: Quaisquer que sejam p, q, r em $P[x]$, tem-se que:

$$\boxed{(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)}$$

2. Comutativa: Quaisquer que sejam p, q em P[x], tem-se que:

$$\boxed{p \cdot q = q \cdot p}$$

3. Elemento nulo: Existe um polinômio po(x)=0 tal que

$$\boxed{po \cdot p = po}$$

qualquer que seja p em P[x].

4. Elemento Identidade: Existe um polinômio $P_1(x) = 1$ tal que

$$\boxed{P_1 \cdot p = p}$$

qualquer que seja p em P[x]. A unidade polinomial é simplesmente denotada por P_1=1.

- Existe uma propriedade mista ligando a soma e o produto de polinômios

5. Distributiva: Quaisquer que sejam p, q, r em P[x], tem-se que:

$$\boxed{p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r}$$

Com as propriedades relacionadas com a soma e o produto, a estrutura matemática $(\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}], +, \cdot)$ é denominada anel comutativo com identidade.

Exemplos:

- $(2x + 3y) \cdot (x + y) \rightarrow (2x + 3y) \cdot (x + y) \rightarrow 2x^2 + \underbrace{2xy + 3xy} + 3y^2 = \mathbf{2x^2 + 3y^2 + 5xy}$
- $(a + b) \cdot (a^3 - b^2) \rightarrow (a + b) \cdot (a^3 - b^2) \rightarrow a^4 - ab^2 + a^3b - b^3 = \mathbf{a^4 - b^3 + a^3b - ab^2}$

Divisão de polinômios

Para realizarmos a divisão de polinômios é preciso que eles estejam reduzidos e ordenados.

O polinômio $-5x^4 + 6x^5 - 7x^3$, não está ordenado em relação a variável x, já o polinômio $6x^5 - 5x^4 - 7x^3$ está ordenado de forma decrescente em relação a esta variável. Observe que os expoentes desta incógnita decrescem de 5 a 3.

Para explicar o procedimento da divisão de polinômios pelo método das chaves, vamos dividir $\boldsymbol{8a^2 - 2ab - 15b^2}$ por $\boldsymbol{2a - 3b}$.

A primeira coisa a verificar é se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Se for menor o quociente será zero e o resto será o próprio dividendo.

Repare que ambos os polinômios estão ordenados de forma decrescente em relação à incógnita a:

$$8a^2 - 2ab - 15b^2 \;\; |\underline{\; 2a - 3b \;}$$

A divisão de polinômios é muito semelhante à divisão de números naturais. Vamos começar dividindo o monômio $\boldsymbol{8a^2}$ pelo monômio $\boldsymbol{2a}$ e colocar o quociente $\boldsymbol{4a}$ abaixo da chave:

$$\begin{array}{l|l} 8a^2 - 2ab - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ & 4a \end{array}$$

Agora vamos multiplicar por -4a, o valor oposto do quociente, cada um dos monômios do divisor 2a - 3b e colocar o resultado embaixo do dividendo:

$$\begin{array}{rrr|l} 8a^2 & - 2ab & - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ -8a^2 & + 12ab & & 4a \end{array}$$

Executamos então a soma dos monômios:

$$\begin{array}{rrr|l} 8a^2 & - 2ab & - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ \underline{-8a^2} & \underline{+ 12ab} & & 4a \\ 0 & + 10ab & & \end{array}$$

Continuamos a divisão baixando o terceiro monômio do dividendo:

$$\begin{array}{rrr|l} 8a^2 & - 2ab & - 15b^2 & \underline{2a - 3b} \\ \underline{-8a^2} & \underline{+ 12ab} & & 4a \\ 0 & + 10ab & - 15b^2 & \end{array}$$

Agora dividimos 10ab por 2a, que vai dar 5b e também o colocamos abaixo da chave:

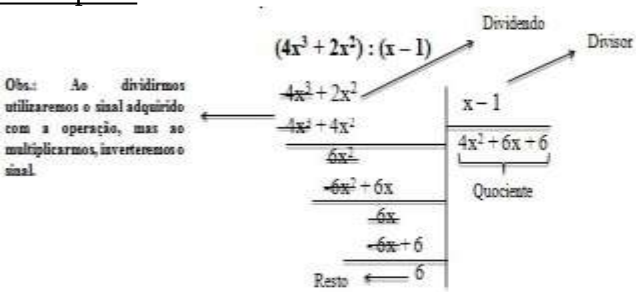
$$
\begin{array}{llll|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & & \underline{2a\ -\ 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & & 4a\ +\ 5b \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 & &
\end{array}
$$

Por fim executamos a soma que resultará em zero, indicando uma divisão exata:

$$
\begin{array}{llll|l}
8a^2 & -\ 2ab & -\ 15b^2 & & \underline{2a\ -\ 3b} \\
\underline{-8a^2} & \underline{+\ 12ab} & & & 4a\ +\ 5b \\
0 & +\ 10ab & -\ 15b^2 & & \\
 & \underline{-10ab} & \underline{+\ 15b^2} & & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Como pudemos ver o procedimento da divisão de polinômios e bastante simples e semelhante à divisão de números naturais.

<u>Exemplos:</u>



- Exercícios de fixação:

Utilizar exercícios do livro didático, páginas 168,171 e 174, para fixação dos conteúdos abordados nesta atividade. do livro "Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03".

Atividade 4

- **TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Teorema do resto; Briot-Ruffini na divisão de polinômios; Relações de Girad.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio $\boldsymbol{ax+b}$ é igual a $\boldsymbol{P(-b/a)}$.
Note que $\boldsymbol{-b/a}$ é a raiz do divisor.

Exemplo: Calcule o resto da divisão de $\boldsymbol{x^2+5x-1}$ por $\boldsymbol{x+1}$.
Resolução: Achamos a raiz do divisor:

$$\boldsymbol{x+1=0} \;\; => \;\; x=-1$$

Pelo teorema do resto sabemos que o resto é igual a P(-1):

$$\boldsymbol{P(-1)=(-1)2+5.(-1)-1} \;\; => \;\; P(-1) \;=\; -5 \;=\; R(x)$$

Resposta: $\boldsymbol{R(x) \;=\; -5}$.

O dispositivo de Briot-Ruffini

Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).
Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $\boldsymbol{P(x)=3x^3-5x^2+x-2}$ por $\boldsymbol{(x-2)}$.
Resolução:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\overbrace{2}^{\text{RAIZ DO DIVISOR}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{3 \qquad -5 \qquad 1 \qquad\qquad -2}^{\text{COEFICIENTES DE P(x)}}} \\
\hline
 & \downarrow & 3.(2)-5 & 1.(2)+1 & 3.(2)-2 \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{3 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 3}_{\text{COEFICIENTES DO QUOCIENTE Q(x)}}} & \underbrace{4}_{\text{RESTO}}
\end{array}$$

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.
Resposta: $\boldsymbol{Q(x)=3x^2+x+3 \; e \; R(x)=4}$.

Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:
1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da "cerquinha".
2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.
4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.
5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

▪ Equações polinomiais

Tomando-se o seguinte polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são constantes *n* e é definido como o grau do polinômio.

Por exemplo: $P(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 7x + 8 = 0$

Define-se como raiz α se e somente se $P(\alpha) = 0$.
Obs.: Note que ao se igualar um polinômio a zero $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ele se transforma em uma equação polinomial.

Também se pode decompor o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ em *n* fatores de primeiro grau:
$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são raízes da equação polinomial.

a. Raízes múltiplas
Pode ocorrer que uma ou mais raízes sejam iguais, nesse caso essas raízes são definidas como múltiplas, por exemplo:

$$P(x) = 4(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-2)(x-8)$$

Note a multiplicidade da raiz 1 (2 vezes) e da raiz 2 (3 vezes). Denomina-se que a equação polinomial $P(x)$ possui a raiz 1 com multiplicidade 2, a raiz 2 de *multiplicidade* 3 e a raiz 8 de *multiplicidade* 1.

b. Raízes complexas e reais
"Toda equação polinomial, de grau *n*, com $n \geq 1$ possui pelo menos 1 raiz complexa (real ou imaginário)".
Obs.: Lembrar que os números complexos englobam os números reais, ou seja, um número real é também um número complexo.

"Toda equação polinomial que possua uma raiz imaginária possuirá também o conjugado dessa raiz como raiz".

Ou seja, se $z = a + bi$ é raiz de uma equação polinomial $z = a - bi$ também será raiz.
Sendo $a, b \in \mathcal{R}$ e $i^2 = -1$.
Exemplo: Sabendo-se que a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ possui uma raiz imaginária

igual a *i*, com $i^2 = -1$ encontrar as outras raízes.

Se *i* é uma raiz então -*i*, seu conjugado, é outra e consegue-se encontrar a terceira raiz que é 2.

c. Raízes racionais

"Se um número racional $\frac{p}{q}$, com *p* e *q* primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de *coeficientes inteiros* do tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n".

Exemplo:
$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, pesquisar as possíveis raízes racionais.

$$a_n = a_3 = 2$$
$$a_0 = -1$$

As possíveis raízes serão:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, -1, -2\right\}$$

Testando para o polinômio $P(x)$ verifica-se que somente $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, sendo essa e a raiz racional do polinômio.

Note que os coeficientes da equação polinomial obrigatoriamente devem ser números inteiros.

Relações de Girard

Temos que uma equação do 2º grau possui a seguinte forma: *ax² + bx + x = 0*. Nessa expressão, temos que os coeficientes *a*, *b* e *c* são números reais, com *a ≠ 0*. As raízes de uma equação do 2º grau, de acordo com a expressão resolutiva são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma entre as raízes

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-b - b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-2b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{a}$$

Produto entre as raízes

$$\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) * \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \frac{-4ac}{4a^2} \Rightarrow -\frac{c}{a}$$

Exemplo: Vamos determinar a soma das raízes da seguinte equação do 2º grau: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Soma

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

Produto

$$-\frac{c}{a} = -\frac{15}{1} = -15$$

As relações de Girard não servem somente para determinarmos a soma e o produto de raízes. Elas são ferramentas utilizadas para compor equações do 2º grau. As equações são representadas por: $x^2 - Sx + P = 0$, onde S (soma) e P (produto).

- Exercícios de fixação:

Utilizar exercícios do livro didático, páginas 184 até 187, para fixação dos conteúdos abordados nesta atividade. do livro "Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03".

Atividade 5

- **TEMPO DE DURAÇÃO: 30 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Fixação e revisão dos conteúdos abordados na atividade anterior.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Uma lista de exercícios para a melhor fixação das atividades 03 e 04. Com base no livro didático adotado pela escola, os exercícios serão das páginas 176, 177, 198 e 199 do livro "Matemática Ciência e Aplicações – Volume 03".

CESD

Professora: Maria Amelia **Data: __/__/__** **Turma: 3001**

Aluno(a):____ **Nº: __________**

Avaliação de Matemática

Questão 01- Sejam três polinômios em x:
$P = -2x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $Q = (2x^2 + 3)(x - 1)$ e $R = -4x + 3$. Dividindo-se P - Q por R, encontram-se quociente e resto respectivamente iguais a:

Resposta: $x^2 + (3/4)x + 13/16$ e $-7/16$

Questão 02 - Sejam $P = 5x - 2$, $Q = (4 + 25x^2)^2$ e $R = 5x + 2$; então $(PR)^2 - Q$ é:

Resposta: $-400x^2$

Questão 03 - Se o resto da divisão de $P(x) = x^3 + ax + b$ por $Q(x) = x^2 + x + 2$ é 4, então a + b vale:

Resposta: 3

Questão 04 - O conjunto verdade da equação $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1 = 0$ está contido em:
a) [-2,-1)
b) [-1,1)
c) [1,2)
d) [2,3)
e) [3,4)

Resposta: B

Questão 05 - A soma das raízes da equação $2x^4 - 3x^3 + 3x - 2 = 0$ é:

Resp: 3/2

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas feitas nas atividades 2 e 5, feitas individualmente com consulta em 50 minutos, servirão para o docente observar se os alunos entenderam o assunto.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de uma avaliação escrita individual, teste sem consulta, (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos para a resolução das questões envolvendo a geometria analítica aqui estudada.

Neste plano de trabalho procurei utilizar os novos conhecimentos que obtive com os planos de ação da formação continuada. Queria poder explorar o roteiro de ação 2, mas não sei se haverá tempo suficiente para isso.

Mais uma vez, apesar de não ter a possibilidade de apresentá-los o Geogebra, pedi para aqueles que tivessem a curiosidade em aprender pesquisar mais sobre o programa e tirarem as dúvidas comigo.

- ***OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO***

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3001 do Colégio Estadual Santos Dias no ano letivo em curso (2013) e o grau de conhecimento dos alunos. Há detalhes e atividades interessantes que poderão ser acrescentados caso o tempo permita, que podem prender a atenção dos alunos e mostrar ainda mais a aplicabilidade do tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Iezzi, Gelson. Matemática: Ciências e Aplicações. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática: volume único. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2005.

ROTEIROS DE ACÃO – Geometria Analítica– Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 03/11/2013.

Endereços eletrônicos acessados de 01/11/2013 a 04/11/2013, utilizados ao longo do trabalho:

http://www.matematicadidatica.com.br/Polinomios.aspx

http://www.infoescola.com/matematica/polinomios/

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/polinom/polinom.htm#pol05

http://www.infoescola.com/matematica/polinomios/