Esfera

Cursista: Jacqueline Garcia Pereira

2º ano do Ensino Médio

Grupo 4

Tutor: Deivis de Oliveira Alves

Número de matrícula: 2422699

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dando continuidade ao estudo de geometria espacial, está aula a esfera e suas aplicações. Essa forma geométrica é bastante comum, e conhecer as suas propriedades pode ser muito útil no dia a dia. A importância da esfera provém da propriedade de ela ser o sólido que encerra o volume máximo para uma superfície.

No estudo da esfera, será chamada a atenção dos alunos para os seus elementos e para a idéia de superfície esférica. Para isso, será levado para a sala de aula objetos com esse formato (bola de futebol, de gude, laranja).

O uso do computador como ferramenta de pesquisa, também será enfatizado.

A aplicabilidade da matemática, como no universo das artes e da arquitetura, será mencionada a fim de dar significado ao que se aprende.

É importante que ao fim do processo, os alunos possam ampliar seus conhecimentos para a compreensão e resolução de situações – problema em matemática e em outras áreas do conhecimento.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 – Revisão

- Habilidade relacionada: Calcular potências.
- Pré-requisitos: - - - - -
- Tempo de duração: 50 minutos.
- Organização da turma: individual.
- Recursos educacionais utilizados: lista de exercícios.
- Objetivos: revisar e fixar o cálculo de potências.
- Metodologia adotada: depois da resolução e explicação de alguns exemplos no quadro os alunos farão uma lista de exercícios.

POTENCIAÇÃO NO CONJUNTO N

POTENCIAÇÃO

Consideremos uma multiplicação em que todos os **fatores são iguais.**

Exemplo:

$5 \times 5 \times 5$, indicada por 5^3

Ou seja:

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

No exemplo:

$$\underbrace{5}_{\text{base}}^{\overbrace{3}^{\text{expoente}}} = \underbrace{125}_{\text{potência}}$$

onde:

- 5 é a **base** (fator que se repete),
- 3 é o **expoente** (o número de vezes que repetimos a base),
- 125 é a **potência** (resultado da operação).

Outros exemplos:

a) $7^2 = 7 \times 7 = 49$

b) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

c) $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

d) $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

LEITURA

- O expoente 2 é chamado de quadrado.
- O expoente 3 é chamado de cubo.
- O expoente 4 é chamado de quarta potência.
- O expoente 5 é chamado de quinta potência.

Etc.

Assim:

a) 7^2 lê-se: sete elevado ao quadrado.
b) 4^3 lê-se: quatro elevado ao cubo.
c) 5^4 lê-se: cinco elevado à quarta potência.
d) 2^5 lê-se: dois elevado à quinta potência.
Etc.

EXERCÍCIOS

1) Em $7^2 = 49$, responda:

a) Qual é a base?
b) Qual é o expoente?
c) Qual é a potência?

2) Escreva na forma de potência:

a) $4 \times 4 \times 4$
b) 5×5
c) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$
d) $7 \times 7 \times 7 \times 7$
e) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
f) $c \times c \times c \times c \times c$

3) Calcule as potências:

a) 3^2
b) 8^2
c) 2^3
d) 3^3
e) 6^3
f) 2^4
g) 3^4
h) 3^5
i) 1^6
j) 0^7
l) 1^8
m) 10^2
n) 10^3
o) 15^2
p) 17^2
q) 30^2

4) Calcule as potências:

a) 40^2
b) 32^2
c) 15^3
d) 30^3
e) 11^4
f) 300^2
g) 100^3
h) 101^2

5) Sendo $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$, calcule:

a) x^2
b) y^2
c) x^3
d) y^4
e) z^9
f) y^5
g) x^4
h) z^{15}

6) Calcule:

a) o quadrado de 13
b) o quadrado de 25
c) o cubo de 7
d) a 5ª potência de 3

Atividade 2 – Esfera

- Habilidade relacionada: H 04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros ou esferas por meio de suas principais características; H 24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e / ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera); H 25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.
- Pré-requisitos: operações com números reais e potenciação.
- Tempo de duração: 100 minutos.
- Recursos utilizados: materiais concretos (bola de futebol, de gude, palito de churrasco e um semi círculo), Data show e o livro didático.
- Organização da turma: individual.
- Objetivos: introduzir o conteúdo a ser trabalhado, mostrando a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade.

- Metodologia adotada: Levar para a sala de aula objetos com a forma de esfera (bola de futebol, de gude) e a partir da observação desses objetos abordarem os tópicos sobre o conteúdo, usando o data – show. Ao mencionar que a esfera é um sólido de resolução, utilizo um palito de churrasco e semicírculo, para exemplificar.
- Exercícios de fixação: Atividades do livro didático.
- Avaliação: será feita mediante a observação do interesse e empenho dos alunos na execução das atividades. A correção será feita pelos alunos (no quadro).

Esfera

Dizem que a **esfera** é um sólido perfeito por não ter arestas e por apresentar sempre a mesma forma, qualquer que seja o ângulo de observação.

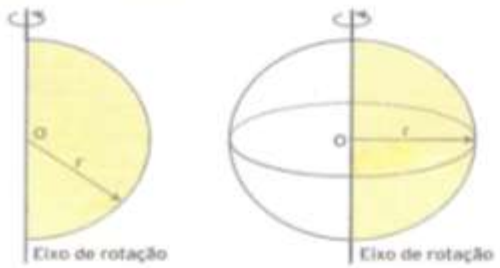
Independentemente das opiniões pessoais e particulares, as formas esféricas podem ser vistas em diversos objetos e situações:

De modo geral, diferenciamos esfera de superfície esférica.

Sejam um ponto *O* e um segmento *r*, não nulo.
Superfície esférica de centro *O* e raio *r* é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a *O* são iguais a *r*.
Esfera de centro *O* e raio *r* é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a *O* são menores ou iguais a *r*.

Podemos também considerar:

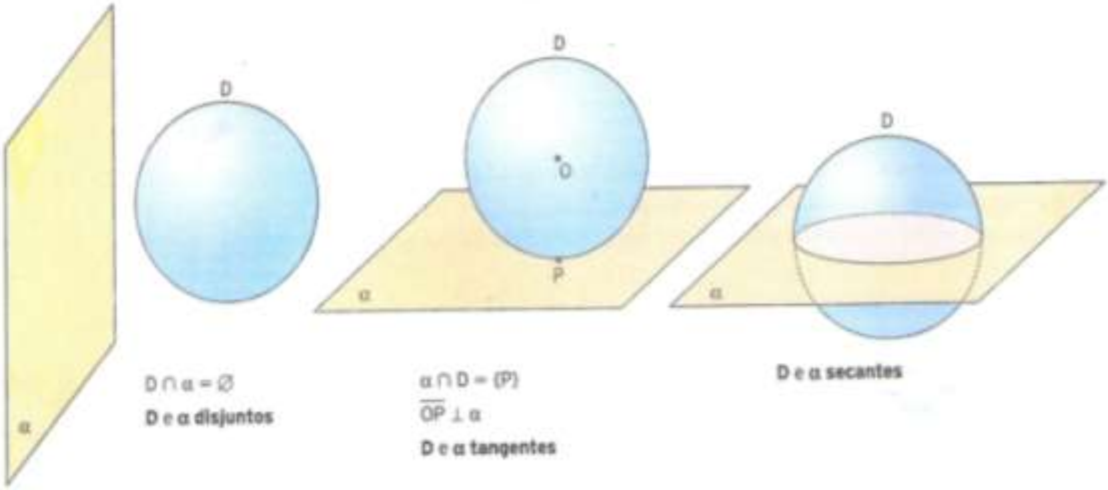
- uma superfície esférica de centro *O* e raio *r* como a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência de raio *r* em torno de seu diâmetro;
- uma esfera de centro *O* e raio *r* como o sólido gerado pela rotação de um semicírculo de raio *r* em torno de seu diâmetro.



Posições relativas entre plano e esfera

Sejam uma esfera D e um plano α. Temos estas possibilidades.

- D e α não têm ponto comum; D e α são **disjuntos**, ou seja, não se interceptam.
- D e α têm um único ponto comum; D e α são **tangentes**.
- D e α têm mais de um ponto comum; D e α são **secantes**.

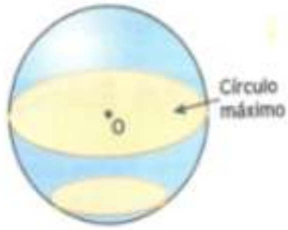


$D \cap \alpha = \varnothing$
D e α disjuntos

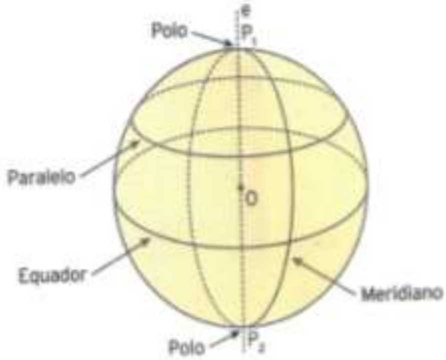
$\alpha \cap D = \{P\}$
$\overline{OP} \perp \alpha$
D e α tangentes

D e α secantes

A intersecção entre uma esfera D e um plano α, secantes entre si, é um círculo. O raio desse círculo aumenta à medida que a distância de α ao centro de D vai diminuindo. Quando α passa pelo centro de D, temos um **círculo máximo** de D.



Observe a figura a seguir, que representa uma esfera.



Nela podemos identificar:

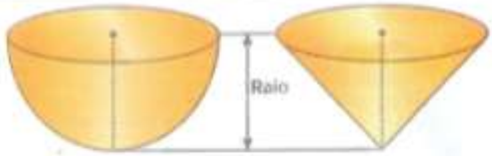
- a reta e, que passa pelo centro O da esfera e é chamada de **eixo**;
- os polos P_1 e P_2, que são a intersecção de e com a superfície esférica;
- o círculo máximo, que passa pelo centro O e é chamado de **equador**;
- um **paralelo**, que é a intersecção de um plano perpendicular ao eixo com a superfície esférica, sem passar por O (é paralelo ao equador);
- a intersecção de um plano com a superfície esférica contendo o eixo, que é um **meridiano**.

A esfera é um sólido que não podemos planificar, porque não há como construir para ela um molde plano que, ao se fechar, seja uma esfera.

Volume de uma esfera

Em um livro sobre a esfera e o cilindro, o matemático grego Arquimedes de Siracusa (século III a.C.) demonstrou a fórmula que permite calcular o volume de uma esfera.

Arquimedes provou que o **volume da esfera** é igual a **quatro vezes o volume do cone** cujo raio é o raio da esfera e cuja altura é também o raio da esfera.



Para compreender esse raciocínio, imagine as vasilhas ao lado, uma semiesférica e outra cônica.

Nelas, o raio da semiesfera é igual ao raio da circunferência do cone e a altura do cone é igual ao raio da semiesfera.

Arquimedes percebeu que, despejando duas vezes o conteúdo da vasilha cônica no interior da vasilha semiesférica, esta ficaria completamente cheia, ou seja, a capacidade da semiesfera é o dobro da capacidade do cone. Isso lhe indicou que a capacidade da esfera era de quatro vezes a capacidade do cone.

Arquimedes demonstrou essa relação por dedução, e nós assumiremos que o volume da esfera é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}},$$

em que R é o raio da esfera.

Área da superfície de uma esfera

Foi também Arquimedes o responsável pela dedução da fórmula para o cálculo da área da superfície da esfera.

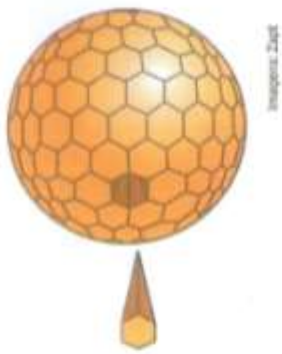
Como a esfera não pode ser planificada como o cone e o cilindro, é preciso que seja utilizada outra ideia para descobrir como calcular a área procurada.

A ideia intuitiva utilizada pelos matemáticos, inclusive por Arquimedes, foi decompor a superfície da esfera em regiões aproximadamente planas. Cada uma dessas regiões, juntamente com o centro da esfera, constitui um sólido que é, aproximadamente, uma pirâmide. Quando esses sólidos são reunidos, a soma das áreas de suas bases se aproxima do valor da área da superfície da esfera.

Podemos chamar de $A_1, A_2, ..., A_n$ as áreas das pequenas regiões e considerar que a altura de cada sólido é o raio da esfera.

Nesse caso, o volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_1R + \frac{1}{3} \cdot A_2R + ... + \frac{1}{3} \cdot A_nR$$



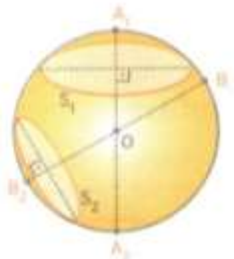
Sabemos que $V = \frac{4\pi R^3}{3}$; assim:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{\text{Área da superfície da esfera: } \mathbf{A}}R$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot AR \therefore \quad \boxed{A = 4\pi R^2}$$

Outros cálculos podem ser feitos na esfera a partir de secções por planos.

Polos relativos a uma secção de uma esfera são as extremidades do diâmetro perpendicular ao plano dessa secção.



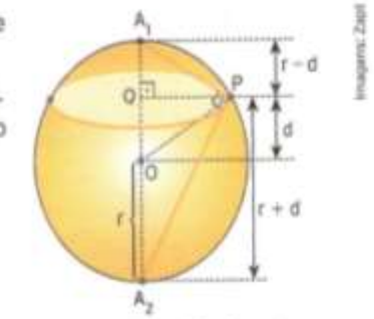
A_1A_2: polos da secção S_1

B_1B_2: polos da secção S_2

Distância polar é a distância de um ponto qualquer da circunferência de uma secção a um dos polos relativos a essa secção.

Um ponto P da superfície esférica tem duas distâncias polares: PA_1 e PA_2.

Para calcular essas distâncias polares, utilizamos relações métricas no triângulo retângulo A_1A_2P.



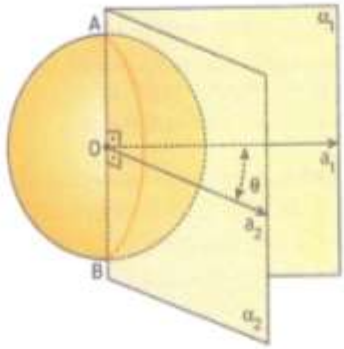
PA_1, PA_2: distâncias polares

$$(PA_1)^2 = A_1A_2 \cdot A_1Q \Rightarrow (PA_1)^2 = 2r(r - d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{PA_1 = \sqrt{2r(r - d)}}$$

$$(PA_2)^2 = A_1A_2 \cdot A_2Q \Rightarrow (PA_2)^2 = 2r(r + d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{PA_2 = \sqrt{2r(r + d)}}$$



Fuso esférico é cada uma das partes de uma superfície esférica obtida a partir do corte de uma superfície esférica S, de centro O, raio r e diâmetro $\overline{AB}$, por dois semiplanos, α_1 e α_2, de origem $\overleftrightarrow{AB}$.

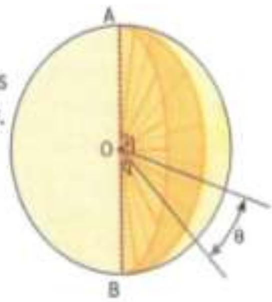
Em cada superfície S, o fuso esférico é caracterizado pelo ângulo θ, formado pelas semirretas a_1 e a_2, contidas, respectivamente, em α_1 e α_2 e perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ em O.

Observe que se $\theta = 90°$, o fuso será um quarto de S; se $\theta = 180°$, o fuso será a metade de S; se $\theta = 360°$, o fuso será a própria superfície esférica S. Assim, para o cálculo da área do fuso, temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \textbf{Ângulo} & & \textbf{Área} \\ \theta° & \rightarrow & A_{fuso} \\ 360° & \rightarrow & 4\pi r^2 \end{array}\right\} \therefore \frac{\theta}{360} = \frac{A_{fuso}}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{A_{fuso} = \frac{\pi r^2\theta}{90}} \quad (\theta \text{ em graus})$$

Para θ expresso em radianos, temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \textbf{Ângulo} & & \textbf{Área} \\ \theta \text{ rad} & \rightarrow & A_{fuso} \\ 2\pi \text{ rad} & \rightarrow & 4\pi r^2 \end{array}\right\} \therefore \frac{\theta}{2\pi} = \frac{A_{fuso}}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{A_{fuso} = 2r^2\theta} \quad (\theta \text{ em radianos})$$



Cunha esférica é cada uma das partes em que fica dividida a esfera por dois semiplanos de origem $\overleftrightarrow{AB}$, onde $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma esfera E, de raio r e centro O.

Para o cálculo do volume da cunha, temos:

$$\left.\begin{array}{ccc} \textbf{Ângulo} & & \textbf{Volume} \\ \theta° & \rightarrow & V_{cunha} \\ 360° & \rightarrow & \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \end{array}\right\} \therefore \frac{\theta}{360} = \frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\pi r^3\theta}{270}} \quad (\theta \text{ em graus})$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \textbf{Ângulo} & & \textbf{Volume} \\ \theta \text{ rad} & \rightarrow & V_{cunha} \\ 2\pi \text{ rad} & \rightarrow & \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \end{array}\right\} \therefore \frac{\theta}{2\pi} = \frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3} \cdot \pi r^3} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{2r^3\theta}{3}} \quad (\theta \text{ em radianos})$$

Atividade 3

- Habilidade relacionada: Acessar o aplicativo, seguir suas orientações e desenvolver, em grupo, as atividades propostas.
- Pré-requisitos: ------------------
- Tempo de duração: 100 minutos.
- Recursos utilizados: laboratório de informática.
- Organização da turma: grupos de 3 alunos.
- Objetivo: Valorizar o uso do computador como fonte de pesquisa.
- Metodologia adotada: Levar os alunos ao laboratório de informática.

NO COMPUTADOR

Os sólidos platônicos na Astronomia

Acesse novamente o *site* <http://www.uff.br/cdme> e reúna-se com três colegas para trabalhar na proposta *Mysterium Cosmographicum*.

Acesse o aplicativo, leia a apresentação e juntos realizem as propostas que estão no formulário de acompanhamento do aluno.

Vocês aprenderão a respeito de poliedros e de corpos redondos e saberão como o astrônomo alemão Johannes Kleper (século XVI) relacionou esses sólidos ao estudo de Astronomia, mais precisamente aos seis planetas conhecidos na época (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno).

Atividade 4

- Habilidade relacionada: Para saber mais e conexão (Matemática – Arquitetura).
- Pré-requisitos: ----------------
- Tempo de duração: 50 minutos.
- Recursos educacionais: Ficha 1 – aprofundando os conhecimentos dos sólidos inscritos e circunscritos; Ficha 2 – a evolução desse

conhecimento e sua aplicabilidade em outras áreas, como por exemplo, na arquitetura e nas Artes.

- Organização da turma: individual.
- Objetivo: apresentar para os alunos a importância desse conteúdo em outras áreas e sua evolução.
- Metodologia adotada: contextualizar a aprendizagem dando significado ao que se aprende, mostrando ao aluno a importância da Matemática em outras áreas, como no universo das Artes e da Arquitetura.

Aprofundar o conteúdo falando sobre os sólidos inscritos ou circunscritos.


PARA SABER MAIS

Sólidos inscritos ou circunscritos

Muitos artefatos e estruturas correspondem a sólidos "encaixados" uns nos outros.

Silo formado por cilindro e cone inscritos em paralelepípedo.

Reservatório cilíndrico de combustível inscrito em paralelepípedo.

Um poliedro está inscrito em um sólido geométrico qualquer quando todos os seus vértices pertencem à superfície do sólido. Veja exemplos.

Cubo inscrito em esfera.

Prisma inscrito em cilindro.

Octaedro inscrito em cubo.

Pirâmide inscrita em cubo.

Pirâmide inscrita em pirâmide.

Cubo inscrito em octaedro.

Veja agora os corpos redondos inscritos em outros sólidos.

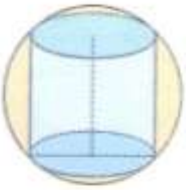
Esfera inscrita em cubo. (As faces do cubo tangenciam a esfera.)

Cone inscrito em esfera.

Cilindro inscrito em paralelepípedo.

Esfera inscrita em cone.

Se um sólido S_1 está inscrito em um sólido S_2, dizemos que S_2 circunscreve S_1 ou que S_2 está circunscrito a S_1. Veja.



Esfera circunscrita a cilindro.

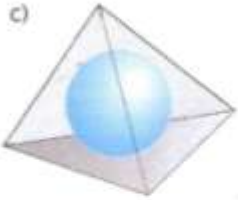
Esfera circunscrita a tetraedro.

Observe cuidadosamente os exemplos que foram dados de sólidos inscritos e analise as figuras a seguir, verificando em quais casos os sólidos estão ou não inscritos. Depois, justifique suas escolhas e registre sua justificativa, para debater com toda a classe e buscar um consenso sobre o que pode significar um sólido estar ou não inscrito em outro.

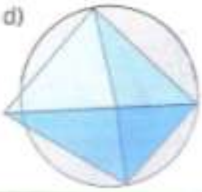
a)

b)

c)



d)



e)

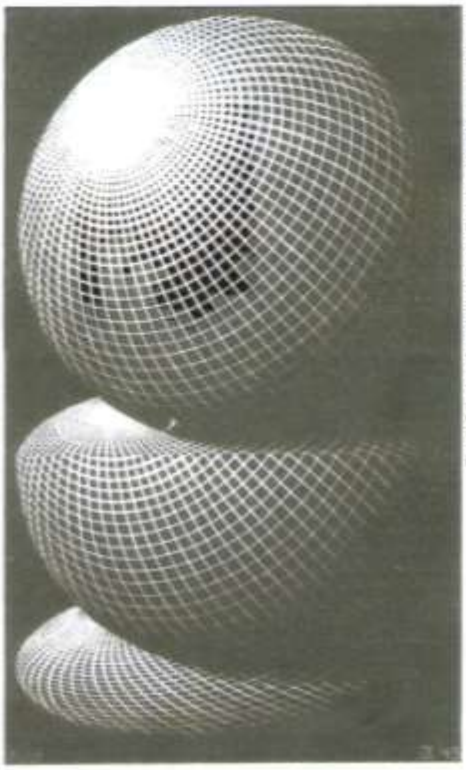
PARA SABER MAIS

Maurits Escher (1898-1972) foi um artista holandês que uniu, como poucos, o universo da arte e das formas matemáticas. Um dos objetos mais utilizados pelo artista em suas obras foi a esfera. Observe ao lado a obra *Três esferas*, que Escher produziu com a técnica da xilografia (ou xilogravura) em 1945.

Agora responda.

- Como as três esferas aparecem?
- Que efeito o artista usou nessa obra para dar a noção de tridimensionalidade?
- Que efeito a esfera superior causa sobre as outras? Como o artista produziu esse efeito?

Xilogravura é uma técnica de gravação em relevo que usa a madeira como matriz. Por meio dessa técnica é possível reproduzir imagens e textos sobre papel ou um material suporte adequado. Pode-se dizer que é um processo inversamente parecido com o de um carimbo, pois, no caso da xilogravura, é o papel que é prensado com as mãos sobre a matriz. O texto ou desenho é entalhado sobre a madeira com o uso de instrumentos cortantes. Depois, com um rolo de borracha aplica-se tinta sobre a matriz, tocando apenas as partes em relevo. O material escolhido é prensado sobre a madeira entalhada e com tinta, finalizando assim a gravação.



Três esferas, obra em madeira, de Maurits Escher.

CONEXÃO

Matemática – Arquitetura

Múltiplas artes sob uma laranja

Tido como símbolo da Austrália e declarado em 2007 patrimônio da humanidade pela Unesco, o Teatro Ópera House é fruto de um projeto arrojado, em que o telhado tem o *design* inspirado em recortes de laranja e está recoberto com mais de um milhão de telhas brancas.

Projeto inovador para a época de sua concepção, em meados do século passado, o Teatro Ópera House, instalado no porto de Sydney, foi originalmente criado pelo arquiteto dinamarquês Jorn Utzon (1918-2008), ganhador em 2003 do prêmio Pritzker, o "Nobel" da arquitetura. Os principais traços das obras desse artista têm como fonte de inspiração a natureza e a integração com a cultura local.

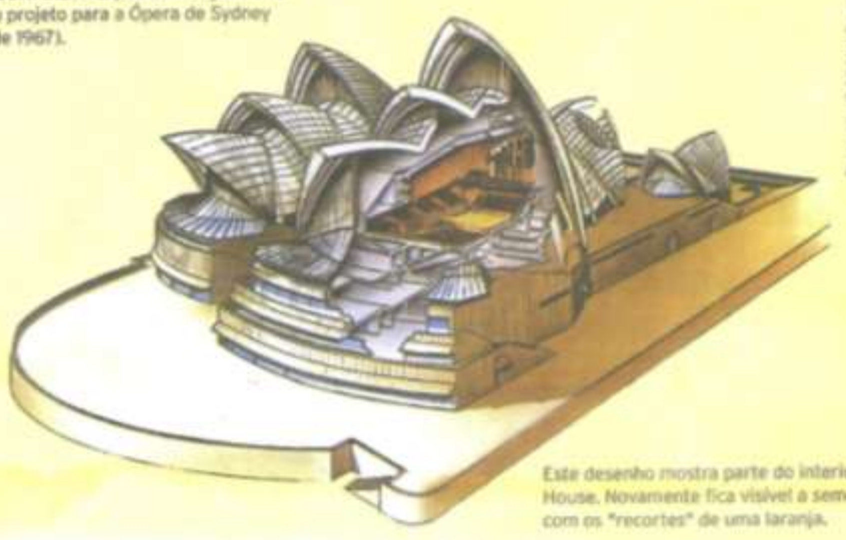
A construção abriga cerca de 1 000 salas, como multiespaços para apresentações de balé, ópera e outras manifestações artísticas, além de estar localizada em um grande centro turístico da Austrália.

A imponente edificação teve, no entanto, uma série de problemas durante a construção, que durou cerca de catorze anos até sua inauguração, em 1973. Seu conceito arquitetônico foi tão ousado que gerou altos custos para a resolução dos problemas estruturais ocorridos devido à complexidade de sua forma heterogênea. Para resolver esses problemas, novos materiais e tecnologias foram criados, inclusive na parceria entre Matemática e Computação Gráfica, abrindo caminho para o desenvolvimento de projetos arquitetônicos com geometrias inovadoras.

Vista externa do telhado da Ópera de Sydney, na Austrália. Observe a semelhança com os "recortes" de uma laranja.

O Teatro Ópera House durante sua construção.

O arquiteto Jorn Utzon expõe um diagrama de parte do seu projeto para a Ópera de Sydney (fotografia de 1967).



Este desenho mostra parte do interior do Teatro Ópera House. Novamente fica visível a semelhança do telhado com os "recortes" de uma laranja.

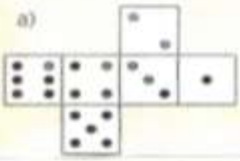
Atividade 5

- Habilidade relacionada: ler, interpretar e resolver, escolhendo a melhor estratégia, os exercícios envolvendo situações – problemas.
- Pré-requisitos: Esfera .
- Tempo de duração: 100 minutos.
- Recursos utilizados: Vídeo (telecurso 2º grau – aula 65)
- Organização da turma: duplas.
- Objetivos: os alunos deverão resolver as atividades propostas em duplas.
- Metodologia adotada: depois de assistirem ao vídeo, deverão resolver as atividades propostas.

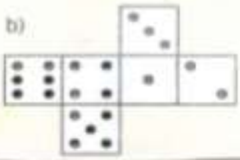
SAIA DESSA

1. (OBMEP – 2008) Com as figuras mostradas a seguir, podemos montar cinco dados diferentes. Com qual delas podemos montar um dado no qual a soma do número de pontos em quaisquer duas faces opostas é 7?

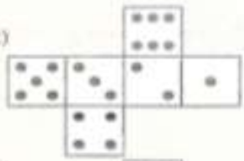
a)



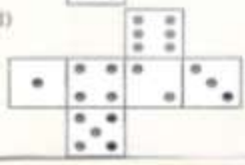
b)



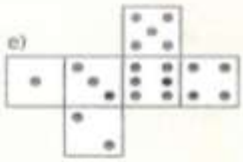
c)



d)



e)



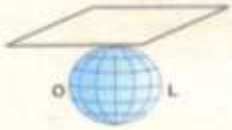
2. (Enem-MEC – 2001) Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.

Mercator

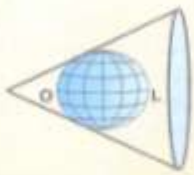
Peters

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambos utilizam como base da projeção o modelo:

a)



b)



c)

d)

e)

3. Três sócios utilizam o mesmo cofre para depositar o dinheiro que recebem dos seus negócios. No entanto, a confiança que reina entre eles é bastante limitada. Resolvem colocar fechaduras diferentes no cofre e distribuir as chaves de tal modo que:
   - nenhum deles possa abrir a porta sozinho;
   - dois deles possam utilizar as mesmas chaves para abrir a porta.

   Como fazem para abrir o cofre?

Gabarito:

Saia dessa

1. (Esta é apenas **uma** forma de resolução. Os alunos poderão chegar à resposta por diferentes raciocínios.)

   Cada sócio tem que estar acompanhado por um dos outros dois; basta colocar três fechaduras na porta do cofre.

   Sejam as fechaduras **A**, **B** e **C**. As chaves precisam ser combinadas de modo que nenhum sócio possa abrir a porta sozinho e que dois deles possam utilizar as mesmas chaves para abrir a porta. Uma solução é:

   ► o primeiro sócio ter a chave de **A** e a chave de **B**;
   ► o segundo sócio ter a chave de **B** e a chave de **C**;
   ► o terceiro sócio ter a chave de **A** e a chave de **C**.

2. Ao montar o cubo, o quadrado superior e o quadrado inferior ficam em faces opostas, o que nos deixa apenas as alternativas (A) e (E) para considerar. Observando que dos quatro quadrados em linha o primeiro e o terceiro a contar da esquerda (ou da direita) também ficarão em faces opostas, ficamos somente com a alternativa *E*.

3. Alternativa C. É a que melhor representa a planificação sugerida.

- Avaliação: Será feita a correção dos exercícios.

AVALIAÇÃO

O professor deverá acompanhar o desenvolvimento dos trabalhos em sala de aula através de observações e registros, verificando o interesse pelo assunto e se não capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas. Observar também seu desempenho nas atividades propostas, bem como sua participação na aula.

A tarefa, mencionada na atividade 4, deverá ser pontuada.

As questões, feitas em dupla, da atividade 5 deverão ser pontuadas e analisadas a fim de ser traçados novos rumos.

Também deve ser feita uma avaliação escrita individual para verificação dos conhecimentos adquiridos.

BIBLIOGRAFIA

ANDRINI, A. *Praticando Matemática.* São Paulo: Editora Brasil, 1989. (5ª série).

Currículo Mínimo – versão 2012.

SMOLE, KÁTIA S. Ɛ DINIZ, MARIA I. *Matemática Ensino Médio.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2).

Endereço Eletrônico:

Telecurso 2º grau Aula 65: Volume de Cilindro, Esfera e Cone: http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=oOqHGGG9n44#!