Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

Matemática – 3º ano

Geometria analítica– 4º bimestre - 2012

Plano de Trabalho

Tarefa 2

Cursista : Isabel Vilares Pereira
Tutor: Claudio Rocha de Jesus

PONTOS POSITIVOS

Trabalhei com geometria analítica de uma forma diferenciada através de novas maneiras de se pensar e trabalhar com o assunto obtidas no curso.

Os alunos participaram bastante das aulas.

PONTOS NEGATIVOS

A parte de geometria analítica foi ensinada muito rápida devido ao bimestre ser curto e ter vários feriados.

IMPRESSÕES DOS ALUNOS

O meu plano de trabalho 2 teve um bom retorno. Os alunos colaboraram bastante. Eles gostaram muito do trabalho e principalmente do Roteiro de Ação 3 usado.

ALTERAÇÕES

Não faria mudanças, apenas acrescentaria mais exercícios, se for necessário, na próxima vez que usar este plano. E no ano que vem pretendo adiantar um pouco os conteúdos do currículo mínimo durante o ano letivo para chegar no final com tranquilidade.

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

Matemática – 3º ano

Geometria analítica – 4º bimestre - 2012

Plano de Trabalho

Tarefa 2

Cursista : **Isabel Vilares Pereira**
Tutor: **Claudio Rocha de Jesus**

Índice

INTRODUÇÃO:

A Geometria Analítica, também denominada de coordenadas geométricas, se baseia nos estudos da Geometria através da utilização da Álgebra. Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês René Descartes (1596 -1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas.
Os estudos relacionados à Geometria Analítica datam seu início no século XVII, Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar por métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas. Uma característica importante da G.A. se apresenta na definição de formas geométricas de modo numérico, extraindo dados informativos da representação. Com base nesses estudos, a Matemática passa a ser vista como uma disciplina moderna, capaz de explicar e demonstrar situações relacionadas ao espaço.

Serão necessários 12 tempos de aula de 50 minutos.

DESENVOLVIMENTO:

Seguindo alguns tópicos do conteúdo de geometria analítica 4º bimestre do currículo mínimo,

- Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos.
- Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.
- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio, temos o material abaixo para 12 tempos de aula:

Organização da sala: Alunos sentados em duplas

Pré-requisitos: Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, ambientação com o software Geogebra

Recursos: Data show , livro didático e quadro

Abordar os tópicos abaixo no quadro:

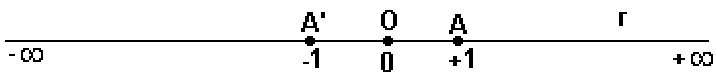
Geometria analítica

1 - Introdução

Em linhas gerais, a Geometria Analítica é uma parte da Matemática , que através de processos particulares , estabelece as relações existentes entre a Álgebra e a Geometria. Assim , uma reta , uma circunferência ou uma figura podem ter suas propriedades estudadas através de métodos algébricos .
Os estudos iniciais da Geometria Analítica se deram no século XVII , e devem-se ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596 - 1650), inventor das coordenadas cartesianas (assim chamadas em sua homenagem), que permitiram a representação numérica de propriedades geométricas. No seu livro Discurso sobre o Método, escrito em 1637, aparece a célebre frase em latim "Cogito ergo sum" , ou seja: "Penso, logo existo".

1.1 - Coordenadas cartesianas na reta

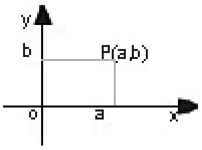
Dada a reta r na Fig. abaixo e sobre ela tomemos um ponto O, chamado origem. Consideremos uma unidade de medida e suponhamos que os comprimentos medidos a partir de O, sejam positivos à direita e negativos à esquerda.



O comprimento do segmento OA é igual a 1 u.c (u.c = unidade de comprimento). É fácil concluir que existe uma correspondência um a um (correspondência biunívoca) entre o conjunto dos pontos da reta e o conjunto R dos números reais. Os números são chamados abscissas dos pontos. Assim, a abscissa do ponto A' é -1, a abscissa da origem O é 0 (zero), a abscissa do ponto A é 1, etc. A reta **r** é chamada eixo das abscissas.

1.2 - Coordenadas cartesianas no plano

Com o modo simples de se representar números numa reta, visto acima, podemos estender a idéia para o plano, basta que para isto consideremos duas retas perpendiculares que se interceptem num ponto O, que será a origem do sistema. Dada a Fig. a seguir:



Dizemos que a é a abscissa do ponto P e b é a ordenada do ponto P.
O eixo OX é denominado eixo das abscissas e o eixo OY é denominado eixo das ordenadas.
O ponto O(0,0) é a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
Os sinais algébricos de a e b definem regiões do plano denominadas QUADRANTES.
No 1º quadrante, a e b são positivos, no 2º quadrante, a é negativo e b positivo, no 3º quadrante, ambos são negativos e finalmente no 4º quadrante a é positivo e b negativo.
Observe que todos os pontos do eixo OX tem ordenada nula e todos os pontos do eixo OY tem abscissa nula. Assim, dizemos que a equação do eixo OX é $y = 0$ e a equação do eixo OY é $x = 0$.
Os pontos do plano onde $a = b$, definem uma reta denominada bissetriz do 1º quadrante, cuja equação evidentemente é $y = x$.
Já os pontos do plano onde $a = -b$ (ou $b = -a$), ou seja, de coordenadas simétricas, definem uma reta denominada bissetriz do 2º quadrante, cuja equação evidentemente é $y = -x$.
Os eixos OX e OY são denominados eixos coordenados.

Exercícios Resolvidos

1) Se o ponto P(2m-8 , m) pertence ao eixo dos y , então :

a) m é um número primo
b) m é primo e par
c) m é um quadrado perfeito
d) $m = 0$
e) $m < 4$

Solução:

Se um ponto pertence ao eixo vertical (eixo y) , então a sua abscissa é nula.
Logo, no caso teremos $2m - 8 = 0$, de onde tiramos $m = 4$ e portanto a alternativa correta é a letra c, pois 4 é um quadrado perfeito ($4 = 2^2$).

2) Se o ponto P(r - 12 , 4r - 6) pertença à primeira bissetriz , então podemos afirmar que :a) r é um número natural
b) r = - 3
c) r é raiz da equação $x^3 - x^2 + x + 14 = 0$
d) r é um número inteiro menor do que - 3 .
e) não existe r nestas condições .

Solução:
Os pontos da primeira bissetriz (reta y = x), possuem abscissa e ordenada iguais entre si. Logo, deveremos ter: r - 12 = 4r - 6 de onde conclui-se r = - 2. Das alternativas apresentadas, concluímos que a correta é a letra C, uma vez que -2 é raiz da equação dada. Basta substituir x por -2 ou seja: $(-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 14 = 0$ o que confirma que -2 é raiz da equação.

3) Se o ponto P(k , -2) satisfaz à relação x + 2y - 10 = 0 , então o valor de k^2 é :

a) 200
b) 196
c) 144
d) 36
e) 0

Solução:
Fazendo x = k e y = -2 na relação dada, vem: k + 2(-2) - 10 = 0.
Logo, k = 14 e portanto $k^2 = 14^2 = 196$.
Logo, a alternativa correta é a letra B.

2 - Fórmula da distância entre dois pontos do plano cartesiano

Dados dois pontos do plano A(Xa,Ya) e B(Xb,Yb) , deduz-se facilmente usando o teorema de Pitágoras a seguinte fórmula da distancia entre os pontos A e B:

$$d_{AB} = \sqrt{(Xb - Xa)^2 + (Yb - Ya)^2}$$

Esta fórmula também pode ser escrita como: $d^2_{AB} = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$, obtida da anterior, elevando-se ao quadrado (quadrando-se) ambos os membros.

Exercício Resolvido

O ponto A pertence ao semi-eixo positivo das ordenadas;dados os pontos B(2,3) e C(-4, 1), sabe-se que do ponto A se vê o segmento BC sob um ângulo reto . Nestas condições podemos afirmar que o ponto A é :

a) (3,0)
b) (0, -1)
c) (0,4)
d) (0,5)
e) (0, 3)

Solução:
Como do ponto A se vê BC sob um ângulo reto, podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo em A. Logo, vale o teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Portanto, podemos escrever: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (BC é a hipotenusa porque é o lado que se opõe ao ângulo reto A). Da fórmula de distância, podemos então escrever, considerando que as coordenadas do ponto A são (0,y) , já que é dado no problema que o ponto A está no eixo dos y e portanto sua abscissa é nula:

$AB^2 = (0 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 + (y - 3)^2$
$AC^2 = (0 - (-4))^2 + (y - 1)^2 = 16 + (y - 1)^2$
$BC^2 = (2 - (-4))^2 + (3 - 1)^2 = 40$
Substituindo, vem: $4 + (y - 3)^2 + 16 + (y - 1)^2 = 40 \therefore (y - 3)^2 + (y - 1)^2 = 40 - 4 - 16 = 20$

Desenvolvendo, fica: $y^2 - 6y + 9 + y^2 - 2y + 1 = 20 \therefore 2y^2 - 8y - 10 = 0 \therefore y^2 - 4y - 5 = 0$, que resolvida, encontramos y = 5 ou y = -1. A raiz y = -1 não serve, pois foi dito no problema que o ponto A está no semi-eixo positivo . Portanto, o ponto procurado é A(0,5), o que nos leva a concluir que a alternativa correta é a letra D.

3 - Ponto médio de um segmento

Dado o segmento de reta AB , o ponto médio de AB é o ponto $M \in AB$ tal que AM = BM .
Nestas condições, dados os pontos $A(x_1 , y_1)$ e $B(x_2 , y_2)$, as coordenadas do ponto médio
$M(x_m , y_m)$ serão dadas por:

$$Xm = \frac{X1 + X2}{2}$$

$$Ym = \frac{Y1 + Y2}{2}$$

Exercício Resolvido

Sendo W o comprimento da mediana relativa ao lado BC do triângulo ABC onde A(0,0), B(4,6) e C(2,4) , então W^2 é igual a:

a) 25
b) 32
c) 34

d) 44
e) 16

Solução:
Chama-se mediana de um triângulo relativa a um lado, ao segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Assim, a mediana relativa ao lado BC será o segmento que une o ponto A ao ponto médio de BC. Das fórmulas de ponto médio anteriores, concluímos que o ponto médio de BC será o ponto M(3, 5). Portanto, o comprimento da mediana procurado será a distância entre os pontos A e M. Usando a fórmula de distância encontramos AM = √ 34 ou seja raiz quadrada de 34. Logo, W = √ 34 e portanto $W^2 = 34$, o que nos leva a concluir que a resposta correta está na alternativa C.

4 - Baricentro de um triângulo

Sabemos da Geometria plana , que o baricentro de um triângulo ABC é o ponto de encontro das 3 medianas . Sendo G o baricentro , temos que AG = 2 . GM onde M é o ponto médio do lado oposto ao vértice A (AM é uma das 3 medianas do triângulo). Nestas condições , as coordenadas do baricentro $G(x_g , y_g)$ do triângulo ABC onde $A(x_a , y_a)$, $B(x_b , y_b)$ e $C(x_c , y_c)$ é dado por :

$$Xg = \frac{Xa + Xb + Xc}{3}$$

$$Yg = \frac{Ya + Yb + Yc}{3}$$

Conclui-se pois que as coordenadas do baricentro do triângulo ABC, são iguais às médias aritméticas das coordenadas dos pontos
A , B e C.

Assim, por exemplo, o baricentro (também conhecido como centro de gravidade) do triângulo ABC onde A(3,5) , B(4, -1) e C(11, 8) será o ponto G(6, 4). Verifique com o uso direto das fórmulas.

Exercício resolvido

Conhecendo-se o baricentro B(3,5), do triângulo XYZ onde X(2,5) , Y(-4,6) , qual o comprimento do segmento BZ?

Solução:
Seja o ponto Z(a,b). Temos, pela fórmula do baricentro:
3 = (2 - 4 + a) / 3 e   5 = (5 + 6 + b) / 3
Daí, vem que a = 11 e b = 4. O ponto Z será portanto Z(11, 4).
Usando a fórmula da distância entre dois pontos, lembrando que B(3,5) e Z(11,4), encontraremos $BZ = 65^{1/2}$ u.c. (u.c. = unidades de comprimento).

Agora resolva este:

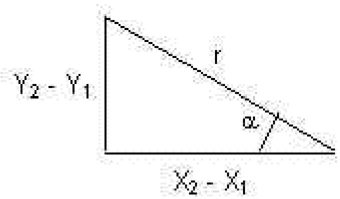
Os pontos A(m, 7), B(0, n) e C(3, 1) são os vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto
G(6, 11). Calcule o valor de $m^2 + n^2$.
Resposta: 850

Equação reduzida da reta

Seja a reta r de equação geral $ax + by + c = 0$. Para achar a equação reduzida da reta , basta tirar o valor de y ou seja :
$y = (- a/b)x - c/b$.
Chamando $- a/b = m$ e $- c/b = n$ obtemos $y = mx + n$ que é a equação reduzida da reta de equação geral $ax + by + c = 0$.
O valor de <u>m</u> é o coeficiente angular e o valor de <u>n</u> é o coeficiente linear da reta .
Observe que na equação reduzida da reta , fazendo x = 0 , obtemos y = n , ou seja, a reta **r** intercepta o eixo dos y no ponto (0 , n) de ordenada <u>n</u> .

Quanto ao coeficiente angular m, considere a reta r passando nos pontos $A(x_1 , y_1)$ e $B(x_2 , y_2)$.
Sendo $y = mx + n$ a sua equação reduzida ,podemos escrever:
$y_1 = mx_1 + n$ e $y_2 = mx_2 + n$.
Subtraindo estas equações membro a membro , obtemos $y_1 - y_2 = m (x_1 - x_2)$.
Logo , a fórmula para o cálculo do coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos (x_1 , y_1) e (x_2 , y_2) é :

$$m = \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}$$



Se considerarmos que as medidas $Y_2 - Y_1$ e $X_2 - X_1$ são os catetos de um triângulo retângulo, conforme figura abaixo podemos concluir que o valor de m é numericamente igual à tangente trigonométrica do ângulo α . Podemos então escrever $m = \text{tg}\ \alpha$, onde o ângulo α é denominado <u>inclinação da reta</u> . É o ângulo que a reta faz com o eixo dos x.
A $\text{tg}\alpha$, como vimos é igual a <u>m</u> , e é chamada coeficiente angular da reta . Fica portanto bastante justificada a terminologia <u>coeficiente angular</u> para o <u>coeficiente m</u>.
<u>Observe que se duas retas são paralelas , então elas possuem a mesma inclinação ; logo, concluímos que os seus coeficientes angulares são iguais.</u>

Agora resolva este:

Analise as afirmativas abaixo:
(01) toda reta tem coeficiente angular .
(02) uma reta perpendicular ao eixo dos y tem coeficiente angular nulo .

(04) se a inclinação de uma reta é um ângulo obtuso o seu coeficiente angular é positivo
(08) se o coeficiente angular de uma reta é positivo , a sua inclinação será um ângulo agudo .
(16) se o coeficiente angular de uma reta é nulo , ela é obrigatoriamente coincidente com o eixo das abscissas .
(32) uma reta perpendicular ao eixo das abscissas não tem coeficiente angular .

Determine a soma dos números associados às sentenças verdadeiras.
Resposta: 02+08+32 = 42

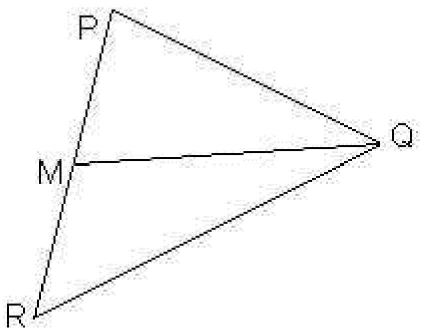
Exercício resolvido (E.E. Lins/1968)

Dados os vértices P(1,1) , Q(3,- 4) e R(- 5,2) de um triângulo, o comprimento da mediana que tem extremidade no vértice Q é:

a) 12,32
b) 10,16
c) 15,08
d) 7,43
e) 4,65

Solução:

Seja o triângulo PQR abaixo:



Sendo M o ponto médio do lado PR, o segmento de reta QM será a mediana relativa ao lado PR.
Sendo os pontos P(1,1) e R(-5,2), o ponto médio M será: M(-2, 3/2).
Observe que:
-2 = [1 + (- 5)]/2 e 3/2 = (1 + 2)/2.

O comprimento da mediana procurado, será obtido calculando-se a distancia entre os pontos Q e M.

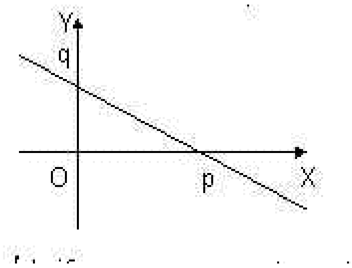
Usando a fórmula da distancia entre dois pontos, vem:

$$d_{MQ} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-4-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{25+\frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}+\frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{221}{4}} = \frac{\sqrt{221}}{2} \cong 7{,}43$$

Portanto, a alternativa correta é a letra D.

Equação segmentaria da reta

Considere a reta representada na fig. a seguir:



Verificamos que a reta corta os eixos coordenados nos pontos (p,0) e (0,q).
Sendo G(x,y) um ponto genérico ou seja um ponto qualquer da reta, através da condição de alinhamento de 3 pontos, chegamos facilmente à equação segmentaria da reta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Nota: se **p** ou **q** for igual a zero , não existe a equação segmentária (Lembre-se: não existe divisão por zero); portanto , retas que passam na origem não possuem equação segmentaria.

Exercício resolvido

Ache a equação segmentária da reta de equação geral 2x + 3y - 18 = 0.

Solução:
Podemos escrever: 2x + 3y = 18 ; dividindo ambos os membros por 18 vem:
2x/18 + 3y/18 = 18/18 ∴ x / 9 + y / 6 = 1. Vemos portanto que p = 9 e q = 6 e portanto a reta corta os eixos coordenados nos pontos A(9,0) e B(0,6).

Equações paramétricas da reta

Quando um ponto qualquer P(x , y) de uma reta vem com suas coordenadas x e y expressas em função de uma terceira variável t (denominada parâmetro), nós temos nesse caso as equações paramétricas da reta.

x = f(t) onde f é uma função do 1o. grau
y = g(t) onde g é uma função do 1o. grau

Nestas condições , para se encontrar a equação geral da reta , basta se tirar o valor de t em uma das equações e substituir na outra .

Exercício resolvido

Um móvel descreve uma trajetória retilínea e suas coordenadas em função do tempo t , são:
x = 3t + 11
y = -6t +10
Qual a equação segmentária dessa trajetória?

Solução:
Multiplicando ambos os membros da 1ª equação paramétrica por 2, vem: 2x = 6t + 22.

Somando agora membro a membro com a 2ª equação, obtemos: $2x + y = 32$ (observe que a variável t é eliminada nessa operação pois $6t + (-6t) = 0$). Dividindo ambos os membros da equação obtida por 32 fica:
$2x / 32 + y / 32 = 32 / 32 \therefore x / 16 + y / 32 = 1$, que é a equação segmentária procurada.

Retas perpendiculares

Sabemos da Geometria Plana que duas retas são perpendiculares quando são concorrentes e formam entre si um ângulo reto (90º) . Sejam as retas r: $y = m_r x + n_r$ e s: $y = m_s x + n_s$. Nestas condições podemos escrever a seguinte relação entre os seus coeficientes angulares:
$m_s = - 1 / m_r$ ou $m_r . m_s = -1$.
Dizemos então que se duas retas são perpendiculares, o produto dos seus coeficientes angulares é igual a -1.

Deixaremos de demonstrar esta propriedade, não obstante a sua simplicidade, mas se você se interessar em ver a demonstração, mande-me um e-mail solicitando.

Exercício resolvido

Dadas as retas de equações $(2w - 2)x + (w - 1)y + w = 0$ e $(w - 3)y + x - 2w = 0$, podemos afirmar que:

a) elas são perpendiculares para qualquer valor de w
b) elas são perpendiculares se $w = 1$
c) elas são perpendiculares se $w = -1$
d) elas são perpendiculares se $w = 0$
e) essas retas não podem ser perpendiculares

Solução:
Podemos escrever para a 1ª reta: $y = [-(2w-2) / (w-1)].x - w /(w-1)$.

Analogamente para a 2ª reta: $y = [-1 / (w-3)].x + 2w / (w-3)$. Ora, os coeficientes de x são os coeficientes angulares e, pelo que já sabemos, a condição de perpendicularidade é que o produto desses coeficientes angulares seja igual a **-1**. Logo:

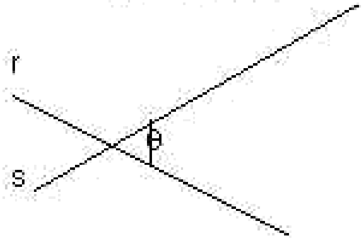
$$\frac{-(2w-2)}{w-1} \cdot \frac{-1}{w-3} = -1$$

Efetuando os cálculos indicados e simplificando-se obtemos: $w^2 - 2w + 1 = 0$, que é equivalente a
$(w - 1)^2 = 0$, de onde conclui-se que $w = 1$.

Ângulo formado por duas retas

Sendo m_r e m_s os coeficientes angulares das retas r e s respectivamente , a tangente do ângulo agudo θ formado pelas retas é dado por :

$$tg\,\theta = \left|\frac{Mr - Ms}{1 + Mr\,.\,Ms}\right|$$



Notas:
1 - Ângulo agudo: ângulo cuja medida está entre 0 e 90º.

2 - Observe dois casos particulares da fórmula anterior, que merecem ser mencionados:

a) se as retas r e s, ao invés de serem concorrentes, fossem paralelas, o ângulo θ seria nulo e portanto tg θ = 0 (pois tg 0 = 0). Nestas condições, o denominador da fórmula teria que ser nulo, o que resultaria em $m_r = m_s$, ou seja, os coeficientes angulares teriam que ser iguais. Já vimos isto num texto anterior, mas é bom repetir: RETAS PARALELAS POSSUEM COEFICIENTES ANGULARES IGUAIS.

b) se as retas r e s fossem além de concorrentes, PERPENDICULARES, teríamos θ = 90º . Neste caso a tangente não existe (não existe tg 90º , sabemos da Trigonometria); mas se considerarmos uma situação limite de um ângulo tão próximo de 90º quanto se queira, sem entretanto nunca se igualar a 90º , a tangente do ângulo será um número cada vez maior, tendendo ao infinito. Ora, para que o valor de uma fração seja um número cada vez maior, tendendo ao infinito, o seu denominador deve ser um número infinitamente pequeno, tendendo a zero. Nestas condições, o denominador da fórmula anterior $1+m_r \,.\, m_s$ seria um número tão próximo de zero quanto quiséssemos e no limite teríamos $1 + m_r \,.\, m_s = 0$.

Ora, se $1 + m_r \,.\, m_s = 0$, podemos escrever que $m_r \,.\, m_s = -1$, que é a condição necessária e suficiente para que as retas sejam perpendiculares, conforme já vimos num texto anterior publicado nesta página. Assim, é sempre bom lembrar: RETAS PERPENDICULARES POSSUEM COEFICIENTES ANGULARES QUE MULTIPLICADOS É IGUAL A MENOS UM.

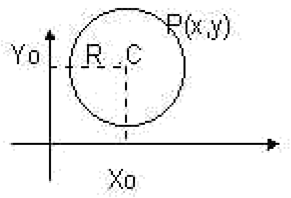
Exercício resolvido

Determine o ângulo agudo formado pelas retas **r** : 3x - y + 2 = 0 e **s** : 2x + y - 1 = 0.

Solução:
Para a reta r : y = 3x + 2. Logo, $m_r = 3$.
Para a reta s : y = - 2x + 1. Logo, $m_s = -2$.
Substituindo os valores na fórmula anterior e efetuando os cálculos, obtemos tgθ = 1, o que significa que o ângulo entre as retas é igual a 45º, pois tg45º = 1.

Estudo simplificado da circunferência

Considere a circunferência representada no plano cartesiano , conforme abaixo , cujo centro é o ponto $C(x_o , y_o)$ e cujo raio é igual a R , sendo P(x , y) um ponto qualquer pertencente à circunferência .



Podemos escrever: PC = R e pela fórmula de distancia entre dois pontos, já vista em outro texto publicado nesta página, teremos: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, que é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro $C(x_0,y_0)$ e raio R. Assim, por exemplo, a equação reduzida da circunferência de raio 5 e centro no ponto C(2,4) é dada por: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Caso particular: Se o centro da circunferência coincidir com a origem do sistema de coordenadas cartesianas ou seja o ponto O(0,0) , a equação reduzida da circunferência fica:
$x^2 + y^2 = R^2$

Para obter a Equação Geral da circunferência, basta desenvolver a equação reduzida . Temos:
$x^2 - 2x \cdot x_o + x_o^2 + y^2 - 2y \cdot y_o + y_o^2 - R^2 = 0$.

Fazendo $-2x_o = D$, $-2y_o = E$ e $x_o^2 + y_o^2 - R^2 = F$, podemos escrever a equação
$x^2 + y^2 + D x + E y + F = 0$ (Equação geral da circunferência).

Então , concluímos que quando os coeficientes de x^2 e y^2 forem unitários , para determinar as coordenadas do centro da circunferência , basta achar a metade dos coeficientes de x e de y , com os sinais trocados ou seja : $\mathbf{x_0 = - D / 2}$ e $\mathbf{y_0 = - E / 2}$.

Se os coeficientes de x^2 e de y^2 não forem unitários , temos que dividir a equação pelo coeficiente de x^2 que é sempre igual ao coeficiente de y^2 , no caso da circunferência.

Para o cálculo do raio R , observemos que $F = x_o^2 + y_o^2 - R^2$.
Mas, $x_o = - D / 2$ e $y_o = - E /2$. Logo , podemos escrever a seguinte equação para o cálculo do raio R a partir da equação geral da circunferência:

$$R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

Cuidado! Para que a equação $x^2 + y^2 + D x + E y + F = 0$, possa representar uma circunferência, tem de ser atendida a condição
$D^2 + E^2 - 4.F > 0$, pois não existe raiz quadrada real de número negativo .

Observe que se $D^2 + E^2 - 4.F = 0$, a equação $x^2 + y^2 + D x + E y + F = 0$ representa apenas um ponto do plano cartesiano! Por exemplo : $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ é a equação de um ponto! Verifique.

Qual a sua interpretação para o caso $D^2 + E^2 - 4F$ ser negativo? Ora, como não existe raiz quadrada real de número negativo, conclui-se facilmente que a circunferência não existe neste caso!

Exemplo:
Dada a equação $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$, temos: $D = - 6$, $E = 8$ e $F = 0$.
Logo, pelas igualdades anteriores, podemos determinar as coordenadas do centro e o raio como segue:

$x_o = - (-6) / 2 = 3$; $y_o = - 8 / 2 = -4$ e $R = 5$ (faça as contas).
Portanto, o centro é o ponto C(3, -4) e o raio é igual a 5 u.c (u.c = unidade de comprimento).

Propor algumas questões do livro didático adotado na escola do Manoel Paiva.

Apresentar o Roteiro de Ação 3 (item 1 da bibliografia) no data show , solicitar que os alunos façam os exercícios e promover um debate.

AVALIAÇÃO:

A avaliação deverá ser feita observando a participação dos alunos nas atividades propostas , pontuando a atividade do Roteiro de Ação 3 e complementando a nota com um teste sobre os conteúdos estudados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=38 Acesso de 20 a 27 de nov. de 2012. (1)

http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-analitica.htm Acesso de 20 a 27 de nov. de 2012. (2)

http://www.paulomarques.com.br/arq6-4.htm Acesso de 20 a 27 de nov. de 2012. (3)

http://www.somatematica.com.br/historia/analitica.php Acesso de 20 a 27 de nov. de 2012. (4)

Paiva, M. *Matemática Manoel Paiva.* 1.ed. São Paulo:Moderna, 2005. Volume único (5)

Giovanni, J. R. *Matemática fundamental:uma nova abordagem:ensino médio*. São Paulo:FTD,2002. Volume único (6)