Volume 2 • Módulo 2 • Matemática • Expansão

Trigonometria na circunferência

André Luiz Cordeiro dos Santos, Leo Akio Yokoyama, Telma Alves e Wallace Vallory Nunes

Introdução

Nesta unidade, abordaremos a trigonometria na circunferência. Com o objetivo de oferecer a você, professor, recursos para complementar a discussão deste tema em sala de aula, pesquisamos e elaboramos algumas atividades. Disponibilizamos também alguns recursos didáticos para facilitar o desenvolvimento destas atividades. O resumo e o detalhamento de nossas sugestões serão apresentados nas tabelas e textos das próximas páginas. A proposta é que você os utilize de acordo com a realidade de cada turma, fazendo alterações e adaptações sempre que julgar necessário.

Mais uma vez, seria muito importante que a primeira aula desta unidade se iniciasse com uma atividade disparadora. Esta atividade tem o objetivo de promover a interação entre os alunos e despertar o interesse sobre o tema. Neste momento, espera-se que os alunos consigam determinar todos os ângulos notáveis do círculo trigonométrico, os ângulos em radianos e as soluções das equações trigonométricas para a primeira volta do ciclo.

Além disso, é importante que a última aula desta unidade seja dividida em duas etapas. Na primeira etapa, sugerimos uma revisão geral sobre o tema desta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada dos principais tópicos estudados. Já para a segunda etapa, recomendamos um momento de avaliação, onde serão relevantes as reflexões e não a mera reprodução de uma coletânea de exercícios. Exercícios são importantes para fixação do conteúdo, mas as reflexões sobre as ideias contidas em cada um deles são muito mais relevantes.

Apresentação da unidade do material do aluno

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	2	Expansão	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Trigonometria na circunferência	Ciclo Trigonométrico
Objetivos da unidade	
Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica.	
Identificar o radiano como unidade de medida de arco.	
Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.	
Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.	
Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	279 a 280
Seção 1 – Calculando distâncias na circunferência	281 a 289
Seção 2 – Organizando os conceitos trabalhados	289 a 298
Veja ainda	299 a 300
O que perguntam por aí?	307 a 308
Caia na Rede	309 a 312

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Descobrindo os ângulos em graus	Cópias da folha de atividades	Esta atividade busca familiarizar os alunos com os ângulos notáveis no ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	15 minutos
	Descobrindo os ângulos em radianos	Cópias da folha de atividades	Esta atividade busca favorecer determinação dos ângulos em radianos no ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	35 minutos

Seção 1 - Calculando distâncias na circunferência

Páginas no material do aluno
281 a 289

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Ornamentação do portal	Cópias da folha de atividades, folha A4	Esta atividade objetiva o cálculo de medidas na circunferência com uso da trigonometria no primeiro e segundo quadrante.	Grupos de 3 ou 4 participantes	15 minutos

Seção 2 – Organizando os conceitos trabalhados

Páginas no material do aluno
289 a 298

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Equações trigonométricas	Cópias da folha de atividades	Esta atividade pretende determinar as soluções de equações trigonométricas para ângulos da primeira volta do ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	30 minutos
	Os arcos associados no ciclo trigonométrico	Folhas de atividades (disponíveis no pen drive); régua e lápis; Software Free-Geogebra, para ser possível abrir o arquivo disponível no pen drive	A atividade tem como objetivo desenvolver a habilidade de determinar e visualizar os arcos associados de um arco x do primeiro quadrante, no segundo e quarto quadrantes.	Duplas ou trios	35 minutos

Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de Aprendizagem	Caderno ou folha de papel	Os alunos serão convidados a registrar as aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos
	Questão dissertativa	Cópias da folha de atividades, caderno ou folha de papel A4	Questão dissertativa para avaliação da aprendizagem. Pode ainda ser utilizada para complementar a seção "O que perguntam por aí?"	Em grupos de 3 ou 4 alunos	20 minutos
	Questão objetiva (modelo Enem)	Cópias da folha de atividades	Questão dissertativa para avaliação da aprendizagem. Pode ainda ser utilizada para complementar a seção "O que perguntam por aí?	Individual	15 minutos

Atividades Iniciais

A seguir, apresentaremos algumas sugestões que têm por objetivo favorecer a discussão do conteúdo de forma mais dinâmica. Para tanto, é necessário que você, professor, aproveite a oportunidade para promover uma discussão coletiva em sua sala de aula. Isto diminuirá a resistência dos alunos ao novo conteúdo e facilitará o processo de ensino-aprendizagem. Foram elaboradas atividades que visam contribuir para construção do conhecimento antes de sua formalização. Se for necessário, adapte estas atividades à realidade das suas turmas. Caso isso não seja possível, fique à vontade para usar como atividade inicial uma atividade do seu acervo que seja semelhante às apresentadas.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Descobrindo os ângulos em graus	Cópias da folha de atividades	Esta atividade busca familiarizar os alunos com os ângulos notáveis no ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	15 minutos

Aspectos operacionais

Solicite que os alunos organizem-se em duplas ou em trios e, em seguida, distribua a folha de atividades. Primeiro, deixe-os analisar o círculo trigonométrico. Eles terão dificuldades em transpor para o ciclo aquilo que é pedido. Por isso, é interessante chamar atenção para a orientação que deve ser seguida no ciclo. Peça aos alunos que tentem determinar o valor dos ângulos apenas com as perguntas indicadas. Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos, fazendo os questionamentos descritos na seção Aspectos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

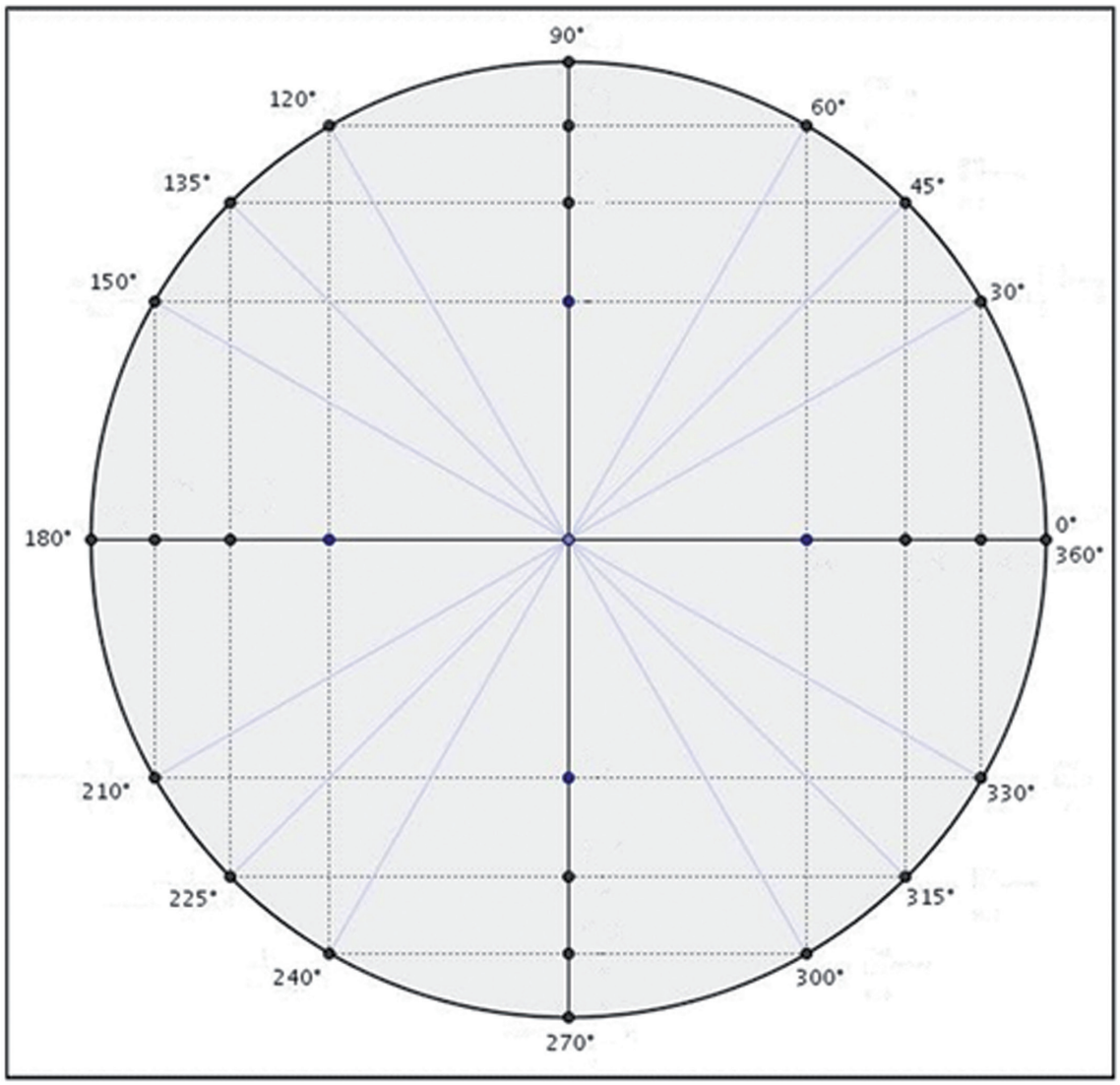
A atividade pretende mostrar, de uma maneira simples, como determinar todos os ângulos notáveis do círculo trigonométrico. As perguntas têm por objetivo explorar a relação entre os ângulos notáveis do círculo trigonométrico.

Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos, fazendo os seguintes questionamentos:

- Existe uma correspondência entre os pontos do ciclo? Por exemplo, entre G e H, entre F e I?
- É possível determinar todos os ângulos notáveis do círculo trigonométrico apenas analisando a relação entre eles?

- Existem outras relações equivalentes às indicadas nas questões? Por exemplo, o ângulo assinalado pelo ponto N pode ser determinado, observando a diferença entre 180° e o ângulo assinalado pelo ponto M?

A seguir, apresentamos as soluções e demais comentários sobre a atividade.



a. B. Perceba que ele está no meio do caminho entre 0° e 180°.

R: 90°.

b. F. Perceba que a diferença entre os ângulos B e E é de 30 graus.

R: 120°.

c. G. A diferença entre 180° e G é igual à diferença entre 0° e 30°.

R: 150°.

d. H. A diferença entre 180° e H é igual à diferença entre 0° e 30°.

R: H = 210°.

e. I. A diferença entre 180° e I é igual à diferença entre 0° e 60°.

R: I = 240°.

f. J. A diferença entre I e J é igual à diferença entre B e 60 graus.

R: J = 270°.

g. K. A diferença entre J e K é igual à diferença entre J e I.

R: K = 300°

h. L. A diferença entre 0° e L é igual à diferença entre 0° e 30°.

R: L = 330°

i. M. A diferença entre B e M é igual à diferença entre B e 45°.

R: M = 135°

j. N. A diferença entre 180° e N é igual à diferença entre 0° e 45°.

R: N = 225°

k. P. A diferença entre 360º e P é igual à diferença entre 0° e 45°.

R: O = 315°

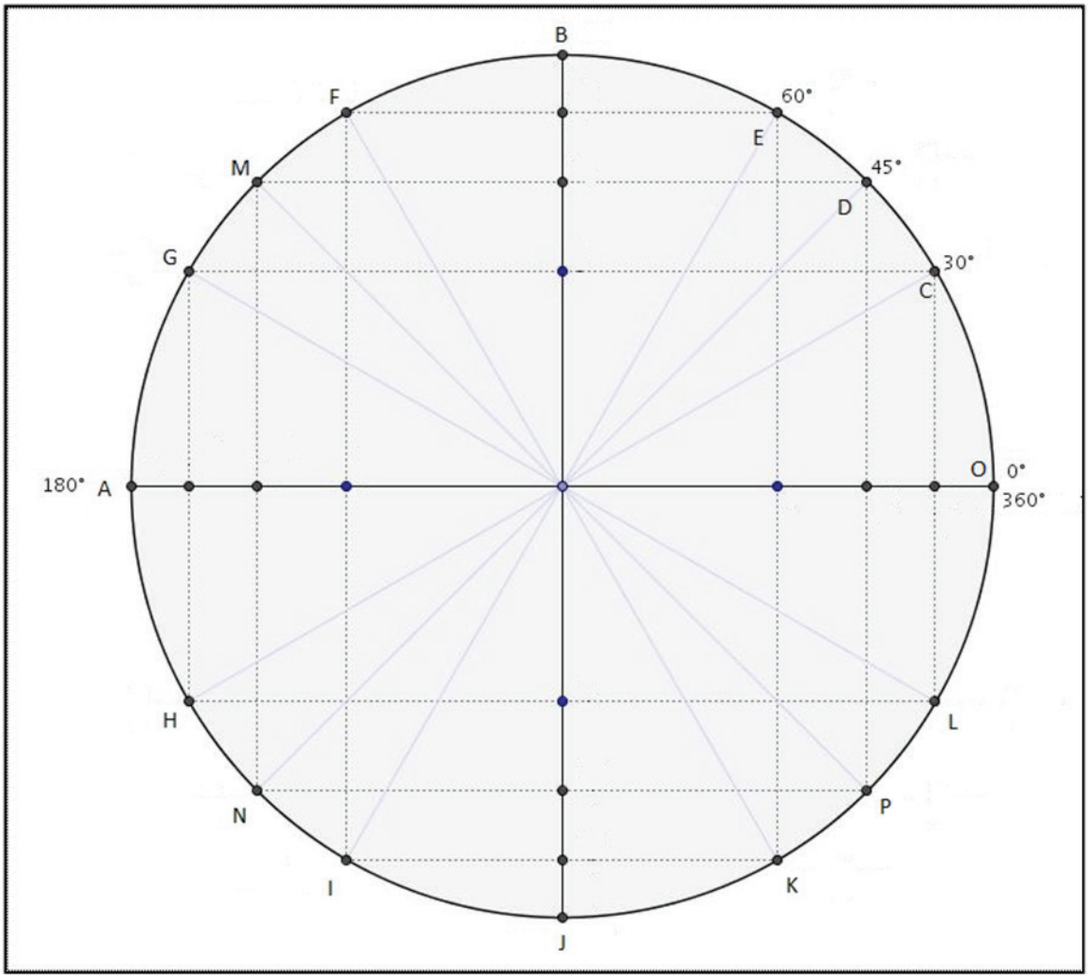
Atividade

Folha de atividades – Descobrindo os ângulos em graus

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

Observe o círculo trigonométrico a seguir:



O ponto A, C, D e E marcam, respectivamente, os ângulos de 180°, 30°, 45° e 60°. Determine o ângulo correspondente ao ponto indicado e preencha as lacunas:

a. Qual o ângulo correspondente ao ponto B? Perceba que ele está no meio do caminho entre 0° e 180°.

b. Qual o ângulo correspondente ao ponto F? Perceba que a diferença entre os ângulos B e E é de _____ graus.

c. Qual o ângulo correspondente ao ponto G? A diferença entre 180° e G é igual à diferença entre 0° e _____°.

d. Qual o ângulo correspondente ao ponto H? A diferença entre 180° e H é igual à diferença entre 0° e _____°.

e. Qual o ângulo correspondente ao ponto I? A diferença entre 180° e I é igual à diferença entre 0° e _____°.

f. Qual o ângulo correspondente ao ponto J? A diferença entre I e J é igual à diferença entre B e _____ graus.

g. Qual o ângulo correspondente ao ponto K? A diferença entre J e K é igual à diferença entre J e _____.

h. Qual o ângulo correspondente ao ponto L? A diferença entre 0° e L é igual à diferença entre 0° e ____°.

i. Qual o ângulo correspondente ao ponto M? A diferença entre B e M é igual à diferença entre B e ____°.

j. Qual o ângulo correspondente ao ponto N? A diferença entre 180° e N é igual à diferença entre 0°e ____°.

k. Qual o ângulo correspondente ao ponto P? A diferença entre 360° e P é igual à diferença entre 0° e ____°.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Descobrindo os ângulos em radianos	Cópias da folha de atividades	Esta atividade busca favorecer determinação dos ângulos em radianos no ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	35 minutos

Aspectos operacionais

Solicite que os alunos organizem-se em duplas ou em trios e distribua a folha de atividades.

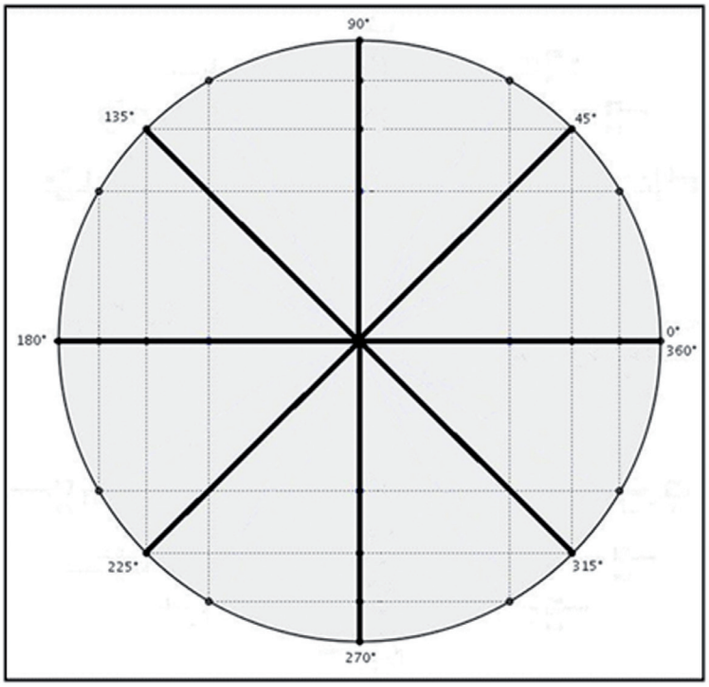
Primeiro, deixe-os analisar o círculo trigonométrico. Considere que estas perguntas propõem-se a explorar a relação entre os ângulos notáveis do círculo trigonométrico, expressos em radianos. Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos, fazendo os questionamentos descritos na seção Aspectos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

A atividade a seguir pretende mostrar que a utilização de um raciocínio de proporcionalidade facilita muito a determinação dos ângulos em radianos no círculo trigonométrico.

É comum os alunos apresentarem muita dificuldade em compreender e registrar os ângulos em radianos. Normalmente, eles escrevem em graus para depois transformar (de alguma forma) para radianos - e, ainda assim, têm dificuldades com os ângulos do terceiro e quarto quadrantes.

É importante usar o ciclo trigonométrico da figura a seguir para mostrar aos alunos o semicírculo, dividido em quatro partes. A imagem pode ajudá-los a identificar a relação entre as partes e os ângulos notáveis (90°, 135°, 180°) associados a 45°.



Também vale a pena utilizar o semicírculo dividido em quatro partes, mas desta vez utilizando a medida π radianos: a extremidade do primeiro setor vale $\frac{\pi}{4}$; a extremidade do segundo setor vale $\frac{2\pi}{4}$; a extremidade do terceiro setor vale $\frac{3\pi}{4}$ e a extremidade do quarto setor é $\frac{4\pi}{4}$. Cabe ainda mostrar o desdobramento dessa estratégia para o semicírculo de 180° (π radianos) a 360° (2π radianos).

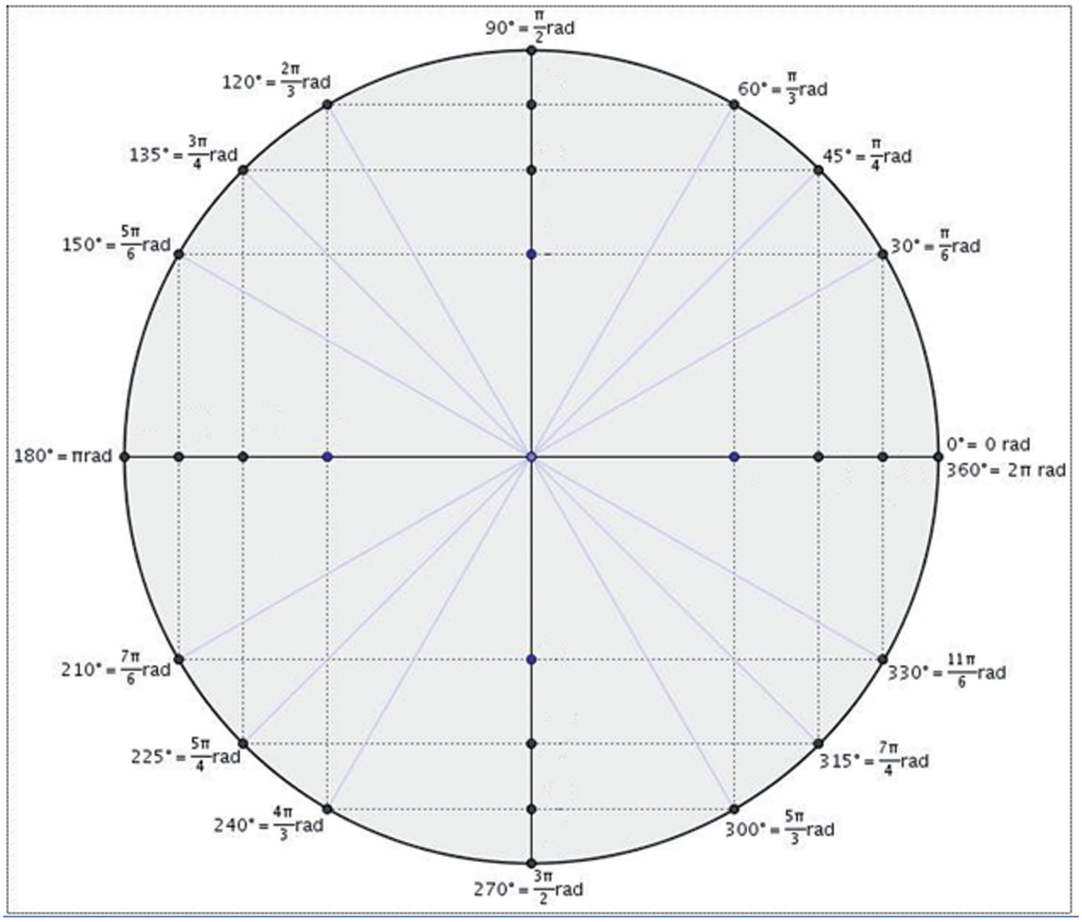
A ideia que está em jogo – a de fazer uma associação entre a divisão do semicírculo em partes iguais e os valores dos ângulos formados nessa divisão - pode ser aplicada para os ângulos notáveis associados a 30° (semicírculo dividido em seis partes) e para os ângulos notáveis associados a 60° (semicírculo dividido em três partes). É recomendável que os alunos desenvolvam a habilidade de desenhar o ciclo com as marcações dos ângulos.

As indicações para encontrar os ângulos em radianos podem variar. Por exemplo, para determinar o correspondente ao ângulo de 120°, pode-se pensar em 4 vezes o ângulo de 30°. Os ângulos que forem múltiplos de 30° podem

ser pensados a partir de 30°, mas às vezes fica mais fácil pensar nos múltiplos de 60°.

Ao final da atividade, promova um debate a partir das respostas e questões que surgirem, durante o processo. Procure conduzir o debate de modo a responder a seguinte questão: é possível, a partir do ângulo de 360°, determinar todos os outros ângulos sem a necessidade de memorização?

A seguir, apresentamos o círculo trigonométrico preenchido e as respostas comentadas das atividades.



a. Se 180° = π rad, qual o valor do ângulo de 90° em radianos?

R**:** π/2 rad

b. Se 90° = π /2 rad, qual o valor do ângulo de 45° em radianos?

R: π/4 rad

c. Se 90° = π /2 rad, qual o valor do ângulo de 30° em radianos? Lembre-se de que 30 é 1/3 (a terça parte) de 90°.

R: π/6 rad

d. Se 30° = π/6 rad, qual o valor do ângulo de 60° em radianos?

R: π/3 rad

e. Se 60° = π/3 rad, qual o valor do ângulo de 120° em radianos?

R: 2π/3 rad

f. Se 30° = π/6 rad, qual o valor do ângulo de 150° em radianos?

R: 5π/6 rad

g. Se 30° = π/6 rad, qual o valor do ângulo de 210° em radianos?

R: 7π/6 rad

h. Se 120° = 2π/3 rad, qual o valor do ângulo de 240° em radianos?

R: 4π/3 rad

i. Se 90° = π/2 rad, qual o valor do ângulo de 270° em radianos?

R: 3π/2 rad

j. Se 30° = π/6 rad, qual o valor do ângulo de 300° em radianos?

R: 10π/6 rad = R: 5π/3 rad

k. Se 30° = π/6 rad, qual o valor do ângulo de 330° em radianos?

R: 11π/6 rad

Segunda parte

a. 135° = 3π/4 rad

b. 180° = 4π/4 rad = π rad

c. 225° = 5π/4 rad

d. 270° = 6π/4 rad = 3π/2 rad

e. 315° = 7π/4 rad

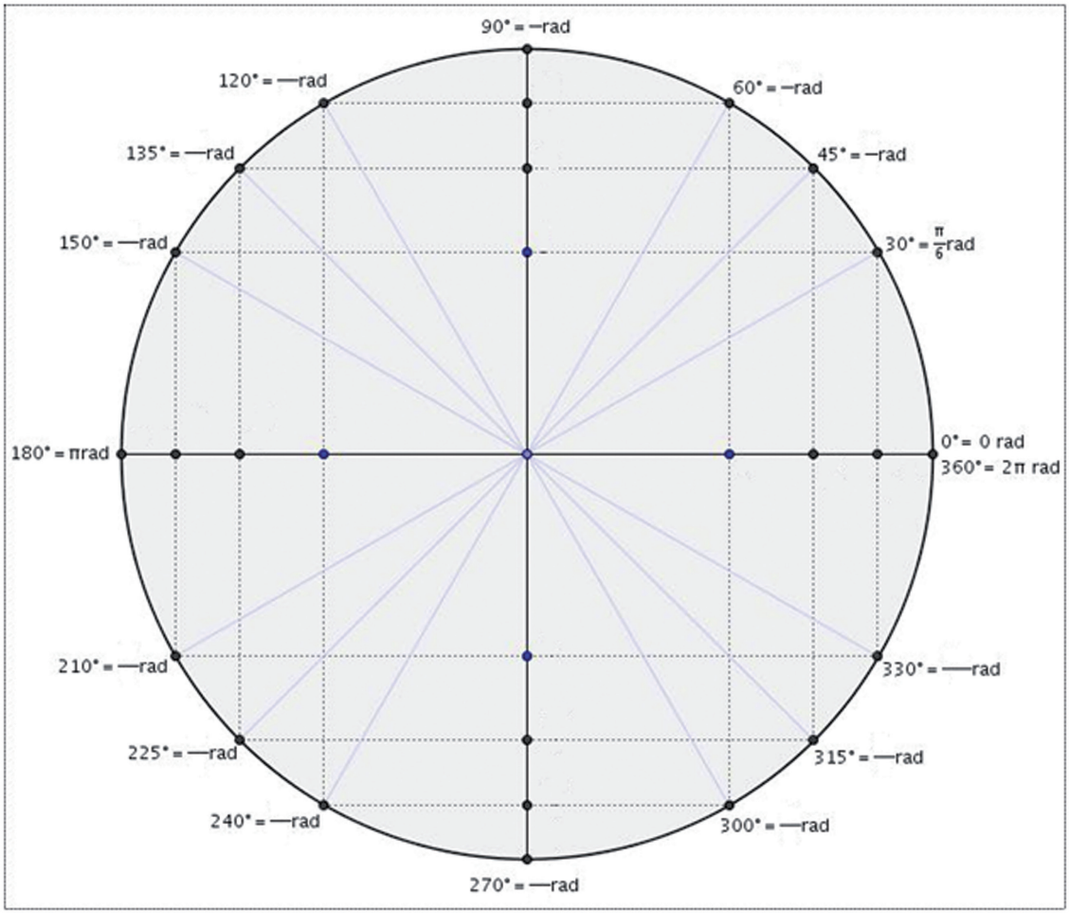
f. 360° = 8π/4 rad = 2π rad

Folha de atividades – Descobrindo os ângulos em radianos

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

Observe o círculo trigonométrico a seguir, responda às perguntas e complete as lacunas do círculo com o valor dos ângulos em radianos:



Considerando que 360° corresponde a 2π radianos e 180° é a metade de 360°, então 180° corresponde à metade de 2π que é π radianos. Continue nessa mesma lógica:

a. Se 180° = π rad, qual o valor do ângulo de 90° em radianos?

b. Se 90° = ___rad, qual o valor do ângulo de 45° em radianos?

c. Se 90° = ___rad, qual o valor do ângulo de 30° em radianos? Lembre-se que 30° é 1/3 (terça parte) de 90°.

d. Se 30° = ___rad, qual o valor do ângulo de 60° em radianos?

e. Se 60° = ___rad, qual o valor do ângulo de 120° em radianos?

f. Se 30° = ___rad, qual o valor do ângulo de 150° em radianos?

g. Se 30° = ___rad, qual o valor do ângulo de 210° em radianos?

h. Se 120° = ___rad, qual o valor do ângulo de 240° em radianos?

i. Se 90° = ___rad, qual o valor do ângulo de 270° em radianos?

j. Se 30° = ___rad, qual o valor do ângulo de 300° em radianos?

k. Se 30° = ___rad, qual o valor do ângulo de 330° em radianos?

Perceba agora que se você contar de 45° em 45° encontrará todos os ângulos múltiplos de 45°: 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° e 360°.

Então, por exemplo, 45° = $\frac{\pi}{4}$ rad, então 90° = $\frac{2\pi}{4}$ rad = $\frac{\pi}{2}$ rad.

Continue o raciocínio com os outros múltiplos de 45°:

135° = ___ rad

180° = $\frac{4\pi}{4}$ rad = ___ rad

225° = ___ rad

270° = $\frac{6\pi}{4}$ rad = ___ rad

315° = ___ rad

360° = $\frac{8\pi}{4}$ rad = ___ rad

Seção 1 - Calculando distâncias na circunferência

Páginas no material do aluno
281 a 289

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Ornamentação do portal	Cópias da folha de atividades, folha A4	Esta atividade objetiva o cálculo de medidas na circunferência com uso da trigonometria no primeiro e segundo quadrante.	Grupos de 3 ou 4 participantes	15 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em grupos de três ou quatro participantes. Distribua a folha de atividades, uma para cada grupo. Em seguida, estimule a discussão entre eles e valorize as opiniões que contribuem para a solução do problema.

Aspectos pedagógicos

Nesta atividade, os alunos estarão medindo comprimentos com a utilização das razões seno e cosseno. Utilize dos conhecimentos adquiridos na Unidade 9, com respeito à trigonometria no triângulo retângulo, para solucionar este problema. Você poderá argumentar que, no problema proposto, as medidas do primeiro e segundo quadrantes são idênticas e por isso, basta realizar os cálculos no primeiro quadrante e dobrar os respectivos valores encontrados. Compare as medidas do comprimento dos senos e cossenos dos ângulos 120° e 150° com as dos ângulos 30° e 60°. Neste momento, preocupe-se apenas com os comprimentos dos senos e cossenos. Com respeito à orientação dos eixos seno e cosseno, e os quadrantes onde são positivos ou negativos, deixe para discutir em outra atividade.

Atividade

Uma empresa de ornamentação foi contratada para um evento. Durante a decoração, os empregados depararam-se com um portal semicircular de 4m de raio. O decorador que ficou responsável pela ornamentação deste portal decidiu, para efeito de estética, subdividir a semicircunferência em partes iguais (ou seja, arcos iguais em medida) e posicionar trepadeiras artificiais em hastes verticais e horizontais de acordo com esta subdivisão. Veja na figura a seguir.

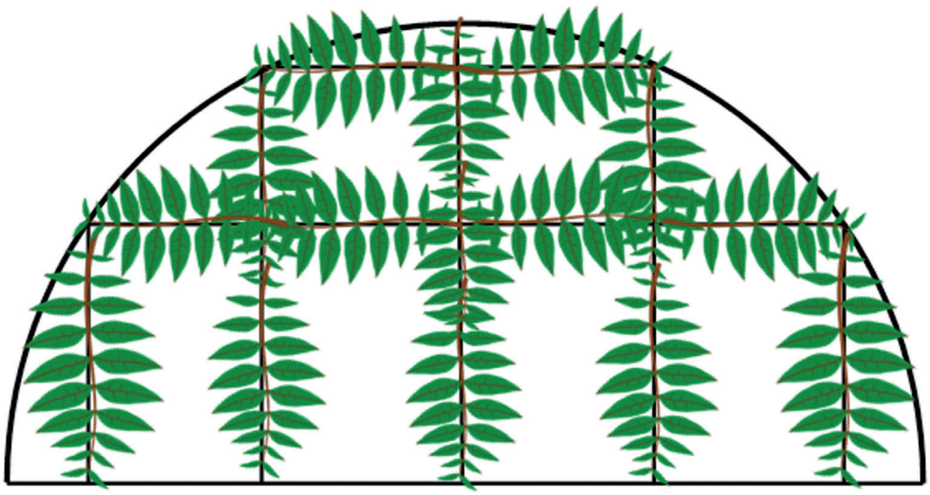


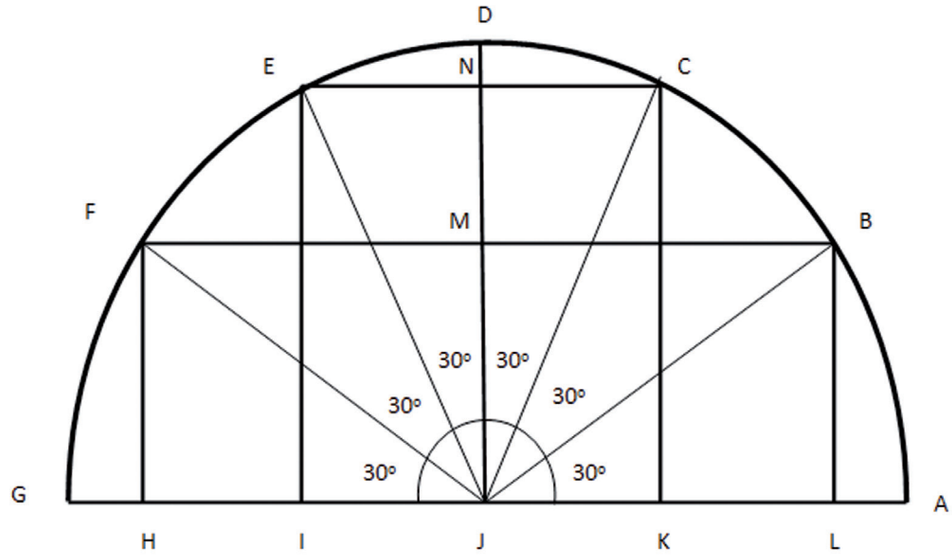
Figura elaborada pelo conteudista

Para diminuir o custo gasto na ornamentação, foi necessário descobrir quantos metros lineares de trepadeiras seriam suficientes para cobrir todas as hastes. Você saberia responder a esta pergunta? (Dica: utilize os conceitos trabalhados na Unidade 9: Trigonometria nos triângulos retângulos).

Soluções e demais comentários

Observe que a semicircunferência foi subdividida nos seguintes ângulos centrais: 30°, 60°, 90°, 120°, e 150°. Mas você pode solucionar o problema, observando apenas os ângulos do primeiro quadrante e depois efetuar os cálculos necessários para a solução final. Você, professor, poderá explorar outras soluções com seus alunos, a fim de enriquecer sua aula. Mas estimule e explore também as soluções, vindas de seus alunos. A seguir, apresentamos uma das diversas soluções para o problema proposto.

Para tanto, considere a figura a seguir que representa esta situação:



A medida do segmento LB pode ser obtida, considerando o triângulo JLB e o seno do ângulo $L\hat{J}B$. Assim, temos:

$$sen\ 30^o = \frac{LB}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{LB}{4} \Rightarrow LB = 2m$$

O segmento MB é igual ao segmento JL, que pode ser obtido pela relação:

$\cos 30^o = \dfrac{JL}{4} \Rightarrow JL = 0,87 \cdot 4 \Rightarrow JL = 3,48m$ ou, ainda, $MB = 3,48m$

A medida do segmento KC, pode ser dada a partir da análise do triângulo JKC. De forma análoga, considere o triângulo JKC e o seno do ângulo $K\hat{J}C$. Assim, temos:

$$sen\ 60^o = \frac{KC}{4} \Rightarrow 0,87 = \frac{KC}{4} \Rightarrow KC = 3,48m$$

O Segmento NC é igual ao segmento JK que pode ser obtido pela relação:

$\cos 60^o = \dfrac{JK}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{JK}{4} \Rightarrow JK = 2m$ ou ainda, $NC = 2m$

A solução final pode ser obtida a partir do seguinte somatório:

$$SF = 2 \cdot (KC + BL + NC + MB) + JD$$

$$SF = 2 \cdot (3,48 + 2 + 2 + 3,48) + 4 = 25,92m$$

Seção 2 – Organizando os conceitos trabalhados

Páginas no material do aluno
289 a 298

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Equações trigonométricas	Cópias da folha de atividades	Esta atividade pretende determinar as soluções de equações trigonométricas para ângulos da primeira volta do ciclo trigonométrico.	Duplas ou trios	30 minutos

Aspectos operacionais

Professor, antes de iniciar, é produtivo rever o conceito de equação – uma igualdade com uma incógnita a determinar. Isso ajudará os alunos a terem um melhor desempenho na atividade.

Solicite que os alunos organizem-se em duplas ou em trios e distribua a folha de atividades. Primeiro, deixe-os analisar o círculo trigonométrico e, em seguida, procure ressaltar que, numa equação trigonométrica, a solução é um ângulo, cuja medida pode ser expressa em graus ou em radianos.

Peça aos alunos que, com o auxílio do círculo trigonométrico, respondam às questões. Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos e dos questionamentos apresentados na seção Aspectos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

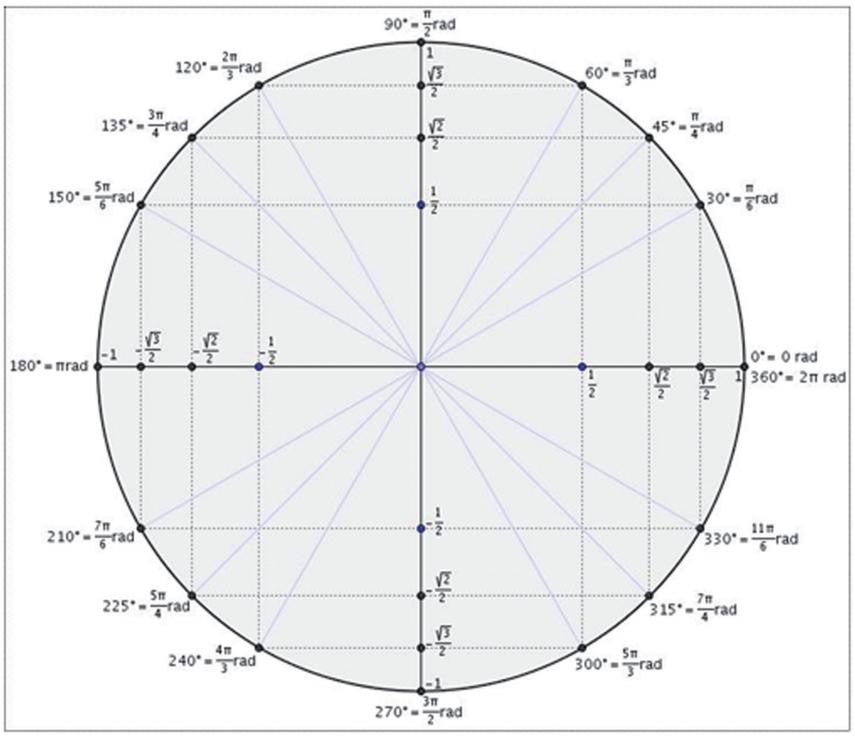
A atividade tem como objetivo determinar as soluções das equações trigonométricas para a primeira volta do ciclo. Os alunos tendem a não executar as tarefas por não entenderem o conteúdo do enunciado e por não perceberem que a solução de uma equação trigonométrica é um ângulo, cuja medida pode ser expressa em graus ou radianos. Procure esclarecer bastante esse ponto. Os alunos também têm dificuldades de se apropriar da interpretação das equações. Por isso, incentive-os a escrever, para cada equação da atividade, a interpretação sugerida. Além disso, no debate que será realizado depois da atividade, procure conduzir os diálogos de forma a abordar os seguintes questionamentos:

- Em que situações há duas soluções para a equação trigonométrica?
- Em que situações a equação trigonométrica admite apenas uma solução, considerando ângulos até 360º?

A seguir, apresentamos as soluções e comentários sobre as atividades propostas.

Soluções e demais comentários

As respostas estão em graus e para saber em radianos, basta observar o gráfico:



Atividade 1

a. $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **60°e 120°.**

b. $\text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **210° e 330°.**

c. $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **225° e 315°**.

d. $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **240° e 300°**.

e. $\text{sen } x = 1$ O ângulo que satisfaz essa equação é **90º.**

f. $\text{sen } x = -1$ O ângulo que satisfaz essa equação é **270º**.

Atividade 2

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **30º e 330º**.

b. $\cos x = -\frac{1}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **120º e 240º**.

c. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **135º e 225º**.

d. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são **150º e 210º**.

e. $\cos x = 1$ O ângulo que satisfaz essa equação é **0º ou 360º**.

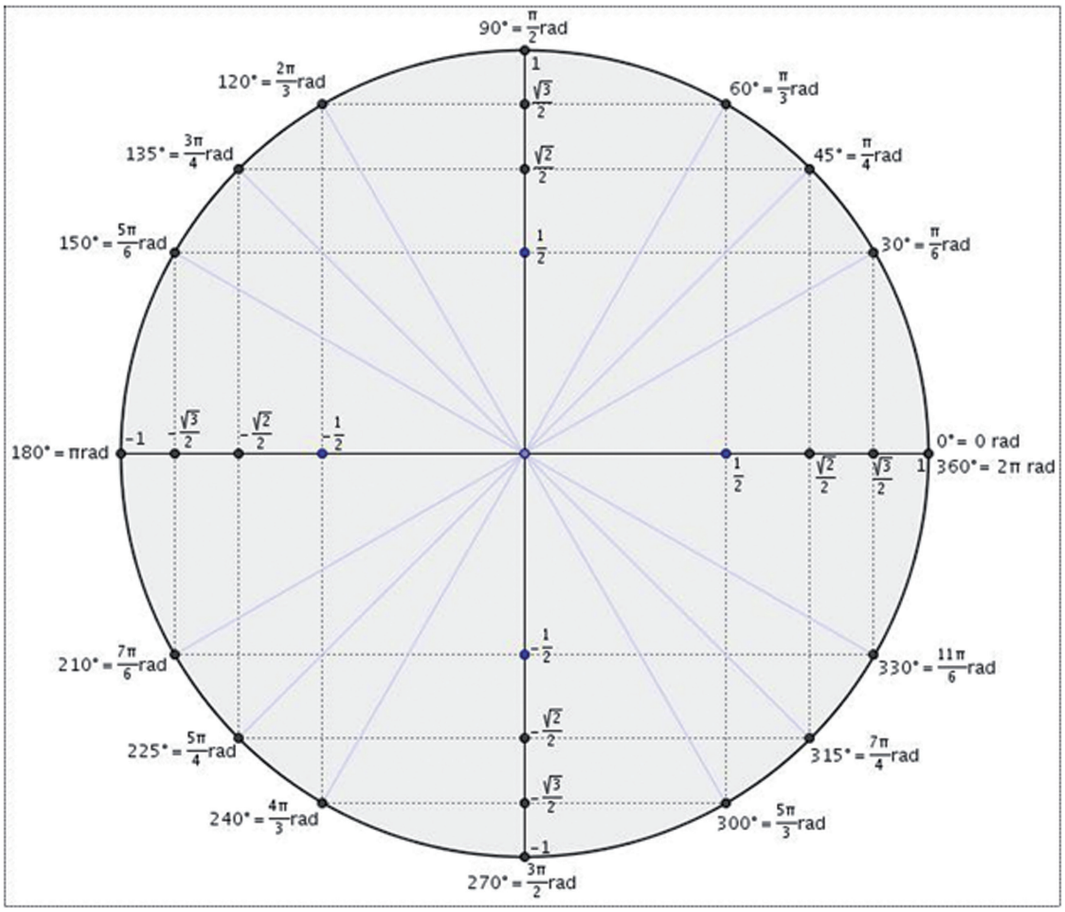
f. $\cos x = -1$ O ângulo que satisfaz essa equação é **180º.**

Folha de atividades – Equações trigonométricas

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

Observe a figura a seguir:



Atividade 1

Perceba que, para a equação $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a incógnita é um ângulo. É possível interpretar essa equação como uma pergunta: "Quais são os ângulos x cujo seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$?".

Observando o círculo trigonométrico acima, determina-se que 45° = $\frac{\pi}{4} rad$ e 135° = $\frac{3\pi}{4} rad$ são as soluções da equação $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Encontre as soluções das seguintes equações, completando as lacunas:

a. $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

b. $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

c. $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

d. $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

e. $\text{sen } x = 1$ O ângulo que satisfaz essa equação é ____.

f. $\text{sen } x = -1$ O ângulo que satisfaz essa equação é ____.

Atividade 2

Observe que para a equação $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a incógnita é um ângulo. É possível interpretar essa equação da seguinte forma: "Para quais ângulos x o cosseno de x vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$?".

Observando o círculo trigonométrico da figura, determina-se que 45° = $\frac{\pi}{4} rad$ e 315° = $\frac{7\pi}{4} rad$ são as soluções da equação $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Encontre as soluções das seguintes equações, completando as lacunas:

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

b. $\cos x = -\frac{1}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

c. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

d. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Os ângulos que satisfazem essa equação são ___ e ___.

e. $\cos x = 1$ O ângulo que satisfaz essa equação é _____.

f. $\cos x = -1$ O ângulo que satisfaz essa equação é _____.

Seção 2 – Organizando os conceitos trabalhados

Páginas no material do aluno
289 a 298

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os arcos associados no ciclo trigonométrico	Folhas de atividades (disponíveis no pen drive); régua e lápis; Software FreeGeogebra, para ser possível abrir o arquivo disponível no pen drive	A atividade tem como objetivo desenvolver a habilidade de determinar e visualizar os arcos associados de um arco x do primeiro quadrante, no segundo e quarto quadrantes.	Duplas ou trios	35 minutos

Aspectos operacionais

Essa atividade foi criada para ser realizada no laboratório de informática da escola, com os alunos divididos em duplas ou em trios. Se houver computadores suficientes no laboratório de informática, leve os alunos até lá, peça para que se dividam em duplas ou em trios e que cada dupla ou trio posicione-se em frente a um computador. Do contrário, use o computador da sala de aula e o datashow para projetar o arquivo da atividade e peça para que os alunos dividam-se em duplas ou em trios. Em ambos os casos, certifique-se de que o software FreeGeogebra já está instalado nos computadores.

Quando os alunos estiverem acomodados, distribua uma folha de atividades para cada um.

A ideia é que, depois da realização da atividade, cada dupla ou trio vá ao quadro ou ao computador com datashow mostrar sua resposta para a turma.

Aspectos pedagógicos

Professor, de início, abra o Geogebra e utilize o Ciclo Trigonométrico Completo para reforçar a associação visual dos arcos e revisar o conteúdo para aqueles que ainda não se apropriaram dele. Caso esteja usando o computador com datashow em sala, use o Geogebra para fazer a parte inicial (o posicionamento o ponto P no ciclo trigonométrico) de cada uma das atividades. Isso ajudará os alunos a visualizar o que se pede.

Depois de distribuir a folha, peça aos alunos que analisem o ciclo trigonométrico completo, com atenção antes de fazer a atividade. Caso você perceba que os alunos estão com muitas dúvidas em realizar as atividades e/ou entender o raciocínio proposto, peça que recorram ao Ciclo Trigonométrico Completo novamente. Caso esteja usando apenas o computador com o Datashow, chame a atenção da turma e apresente exemplos para reforçar os pontos em que os alunos estiverem com mais dificuldade. Aos poucos, eles mesmos irão buscar as soluções sem recorrer ao programa ou aos seus esclarecimentos.

Quando os alunos utilizarem a folha com o ciclo trigonométrico e começarem a identificar as razões trigonométricas através da construção dos triângulos retângulos formados pelos eixos (catetos) e o raio do círculo trigonométrico (hipotenusa), podem ter dificuldade em interpretar a expressão pontos simétricos. Por isso, comente o conceito de simetria: pontos equidistantes de um eixo dado. Ao mover os pontos sobre o ciclo trigonométrico, chame muita atenção para os novos arcos formados e para os segmentos que representam seus seno e cosseno.

Os alunos devem marcar, no eixo horizontal e vertical da folha de atividades, as projeções que representam respectivamente o cosseno e o seno do arco. Utilize a relação $s(\alpha)= 180+\alpha$, utilizada para determinar os arcos associados no terceiro quadrante. Use a relação $s(\alpha)=360-\alpha$, para determinar os arcos associados no quarto quadrante, como avaliação ou como fixação do raciocínio no ciclo trigonométrico.

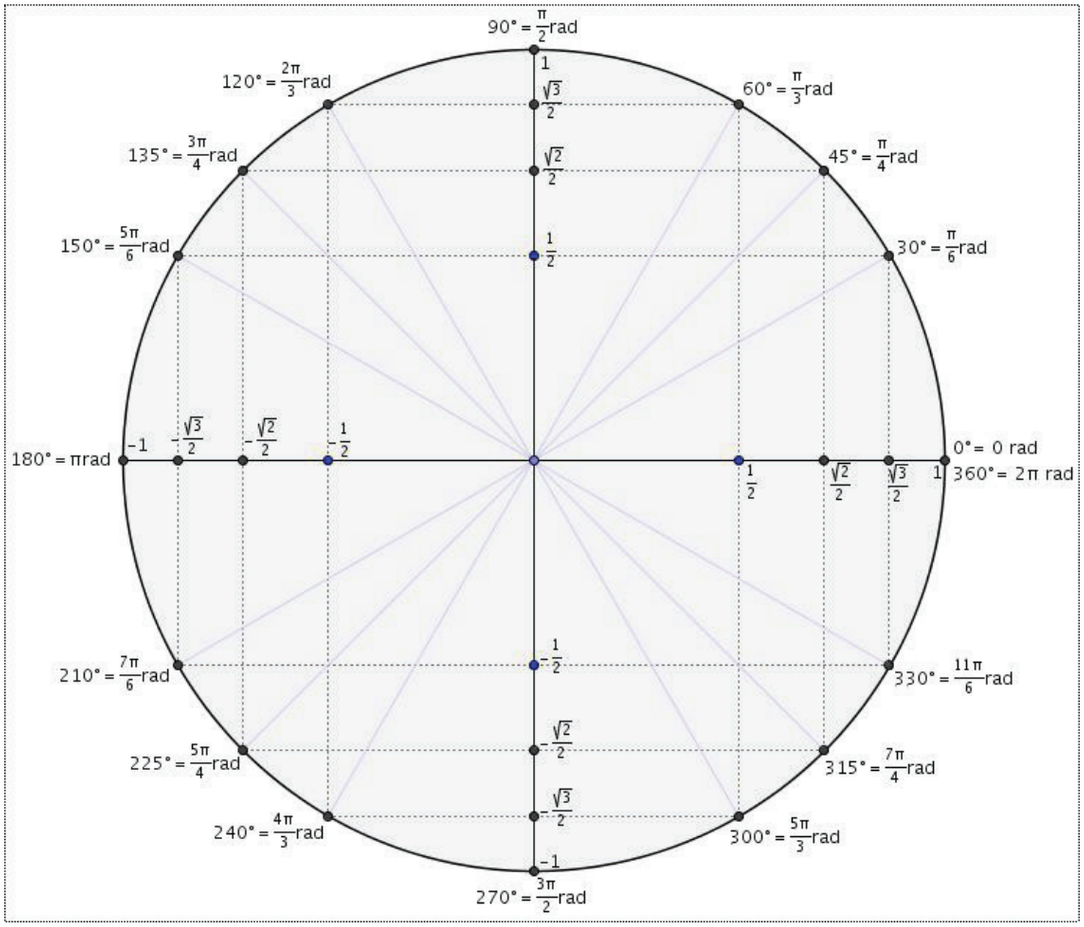
Para cada item, uma dupla deve ir ao quadro e posicionar corretamente o ponto P no arquivo do Geogebra, a fim de verificar os triângulos formados no segundo e quarto quadrante e identificar, sobre os eixos, os segmentos que representam os senos e cossenos dos arcos da atividade.

Folha de atividades – Os arcos associados no ciclo trigonométrico

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

Observe atentamente a figura a seguir. Ela será chamada de ciclo trigonométrico.



Atividade 1

Observe atentamente o ciclo trigonométrico apresentado na figura anterior. Perceba que o arco de 30° tem um arco correspondente no segundo quadrante, que vamos chamar s(30°), cujo valor é de 150°. Atente para o fato de que 150° = 180° - 30° ou $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Se estiver usando o computador, procure observar esta mesma correspondência no arquivo do Geogebra, posicionando o ponto P de modo que o arco α seja de aproximadamente 30° ou $\frac{\pi}{6}$. Observe a formação de um triângulo cujos vértices são O, P e P´´.

Perceba também a formação, no segundo quadrante, de outro triângulo, cujos vértices são pontos simétricos, em relação ao eixo OSEN(α), aos vértices O, P, P''. Seguindo o mesmo raciocínio, use a régua e a folha de atividades para esboçar os triângulos relativos aos ângulos apresentados abaixo. Use as informações obtidas com o esboço para completar as sentenças:

a. Se α= 20° então s(20°) = 180° - _____ = _____

b. Se α= 50° então s(50°) = 180° - _____ = _____

c. Se α= 60° então s(60°) = _____ - _____ = _____

d. Se α= 70° então s(70°) = _____ - _____ = _____

e. Se α= 45° então s(__°) = _____ - _____ = _____

Atividade 2

Observe no ciclo trigonométrico completo que o arco de 30° tem um arco correspondente no quarto quadrante, que vamos chamar s(30°). O valor é de 330°. Perceba que 330° = 360° - 30°ou $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Observe esta mesma correspondência no arquivo do Geogebra, posicionando o ponto P de modo que o arco α seja de aproximadamente 30° ou $\frac{\pi}{6}$. Observe o triângulo formado pelos pontos O, P e P''. Perceba que, no quarto quadrante, foi formado um triângulo cujos vértices são pontos simétricos, em relação ao eixo OCOS(α), aos vértices O, P, P''. Seguindo o mesmo raciocínio, use a régua e a folha de atividades, para esboçar os triângulos relativos aos ângulos apresentados abaixo. Use as informações obtidas com o esboço para completar as sentenças:

a. Se α= 20° então s(20°) = 360° - _____ = _____

b. Se α= 50° então s(50°) = 360° - _____ = _____

c. Se α= 60° então s(60°) = _____ - _____ = _____

d. Se α= 70° então s(70°) = _____ - _____ = _____

e. Se α= 45° então s(__°) = _____ - _____ = _____

Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de Aprendizagem	Caderno ou folha de papel	Os alunos serão convidados a registrar as aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos

Aspectos operacionais

Caso você siga nossa estimativa de aulas, para abordar o conteúdo, esperamos que, no quarto dia de aula, você possa realizar com seus alunos um momento de consolidação do que foi aprendido. Você pode propor neste momento que o aluno registre, individualmente, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. O registro pode ser feito no caderno ou numa folha A4 avulsa.

Após este momento, seria interessante que você e seus alunos pudessem avaliar esta aprendizagem. Ao final, faça uma compilação dos registros e compartilhe com os alunos as informações obtidas . Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

Aspectos pedagógicos

Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os principais pontos que você irá indicar para os alunos que ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, de maneira a fazer com que este momento de avaliação torne-se agradável.

Apresentamos a seguir algumas questões para os alunos responderem. A ideia é que elas complementem as questões que você geralmente usa para avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Desenhe um ciclo trigonométrico, marque um ângulo qualquer e indique o seno e o cosseno deste ângulo.
3. Quanto maior o ângulo, maior é o seu cosseno. Verdadeiro ou falso?

4. Você saberia descrever alguma situação cotidiana na qual seja importante o conhecimento de trigonometria?

5. Escreva o que você compreendeu da palavra "periódico" no estudo desta unidade.

6. Você poderia dar um exemplo de fenômeno natural que seja periódico?

Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Cópias da folha de atividades, caderno ou folha de papel A4	Questão dissertativa para avaliação da aprendizagem. Pode ainda ser utilizada para complementar a seção "O que perguntam por aí?"	Em grupos de 3 ou 4 alunos	20 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade é mais uma oportunidade de se avaliar a aprendizagem adquirida. Nela você deverá separar a turma em grupos de três ou quatro participantes e distribuir a folha de atividades. Em seguida, peça que os grupos respondam ao que se pede. Logo após, uma estratégia interessante é pedir que cada grupo avalie a resposta de outro grupo, a fim de fixar os conceitos envolvidos. Depois, você pode destacar a solução correta do problema, valorizando os aspectos principais.

Aspectos pedagógicos

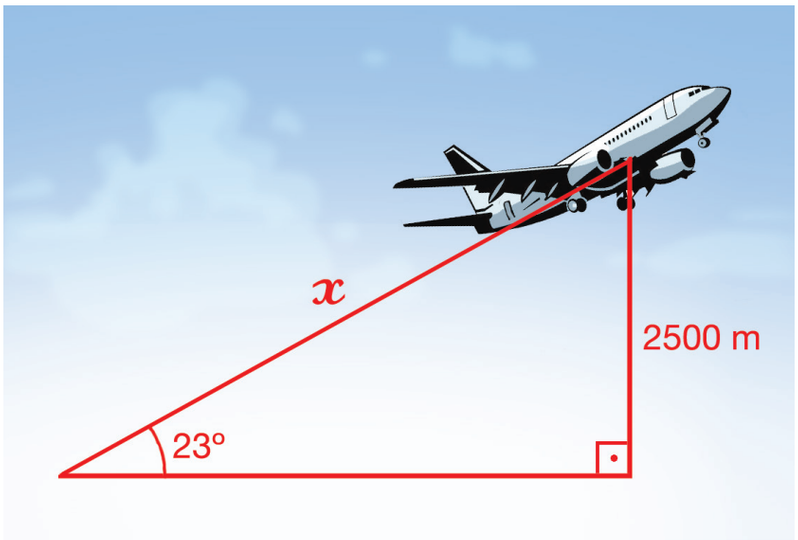
Esta atividade pode ser usada para complementar seção "O que perguntam por aí?". No que diz respeito ao conteúdo, você pode lembrá-los das razões trigonométricas básicas. Rompida esta eventual barreira, os cálculos são imediatos. Talvez seja necessário relembrar o teorema de Pitágoras. Tente encorajá-los de modo a chegarem à resposta desejada. Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade.

Folha de atividades – Avaliação – Questão dissertativa

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

1.



São muitas as ocasiões em que o conhecimento da trigonometria é importante. Na figura acima, você pode perceber que é possível calcular a distância que um avião passa de um determinado local no solo, desde que seja conhecida a altitude da aeronave e o ângulo de visada. Dado que sen 23° = 0.39, ache o valor da distância x.

2. Complete a tabela e, a seguir, para cada ângulo, desenhe um ciclo e indique suas respectivas razões trigonométricas.

Θ°	Θ rad	sen Θ	cos Θ
0°			
30°			
45°	p/4		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°			
90°			
180°			
270°			
360°			

Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão objetiva (modelo Enem)	Cópias da folha de atividades	Questão dissertativa para avaliação da aprendizagem. Pode ainda ser utilizada para complementar a seção "O que perguntam por aí?	Individual	15 minutos

Aspectos operacionais

Você poderá seguir o mesmo procedimento da atividade anterior. Mas lembre-se de valorizar as soluções, falas, sugestões dos alunos, durante o desenvolvimento da atividade. Procure trabalhar com autoestima de seus alunos, considerando sempre que esta é uma oportunidade dele se apropriar desses conceitos.

Aspectos pedagógicos

Certifique-se de que os alunos compreenderam o que é pedido no problema. Dê orientações no sentido de fazer com que eles consigam atingir a resposta procurada, destacando a possibilidade de usar o conhecimento de sala de aula, no mundo real.

No problema em questão, cabe orientar que é importante associar a medida da altura a uma incógnita. Identifique a altura na figura e também o triângulo retângulo. Peça a eles que identifiquem os catetos e a hipotenusa desse triângulo. Feito isto, convide-os a recorrer aos conhecimentos de trigonometria já obtidos previamente, destacando o fato de um dos ângulos agudos medir 30°.

Soluções e comentários

Se h denota a medida da altura do suporte, o cateto oposto ao ângulo de 30º, conforme figura, mede [(h-3) + 4]= h+1. Como a hipotenusa do referido triângulo mede 24 cm e sem 30°=1/2, segue que

$$sen\ 30 = \frac{h+1}{24}$$

donde resulta que,

$$\frac{h+1}{24} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, h=11 cm

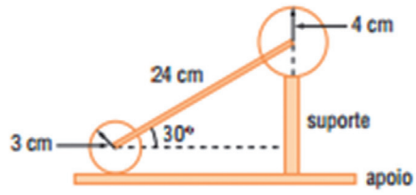
Atividade

Folha de atividades – Avaliação – Questão objetiva

Nome da escola:_____

Nome do aluno:_____

(PUCC-SP) A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte, aparecem dois círculos, com raios de 3 cm e 4 cm, um suporte vertical e um apoio horizontal.



A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é:

a. 7 cm

b. 11 cm

c. 12 cm

d. 14 cm

e. 16 cm