Reforço escolar · Matemática ·

Quebra-Cabeça de Cartões

Dinâmica 2

2ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Campo Algébrico Simbólico	Função Logarítmica

DINÂMICA	Quebra-Cabeça de Cartões
HABILIDADE BÁSICA	H52 – Resolver problemas com números reais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
HABILIDADES PRINCIPAL	H59 – Resolver problemas, envolvendo a função logarítmica.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.

Professor

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias	Potências e Xadrez	20 a 25 min	Em trios com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar...	Log-Figurinhas	20 a 25 min	Em trios com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Corrente Logarítmica	15 a 25 min	Em trios com discussão coletiva	Coletiva
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

Caro professor:

A potenciação, embora pouco presente na vida cotidiana dos estudantes, é um conteúdo necessário para avançar no pensamento matemático. Assim, ao aprender a representar números complicados, ter mais facilidade nas operações com esses números e reconhecer que usar propriedades com os expoentes é mais prático do que trabalhar com números extensos, pode contribuir para dar sentido ao aprendizado das potências. Esta dinâmica inicialmente explora atividades envolvendo a potenciação para, então, avançar no pensamento matemático, propondo a resolução de equações logarítmicas a partir da solução das equações exponenciais equivalentes. Logo a seguir, identificam as equações equivalentes e que representam o processo utilizado para determinar o valor desconhecido. Assim, motivados pela “Corrente Logarítmica”, os estudantes passam a registrar o processo de solução dessas equações. Como sempre, professor, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar Ideias

25 MINUTOS

Atividade • Potências e Xadrez

Objetivo

Identificar regularidades numéricas da potenciação e calcular potências.

Descrição da atividade

Professor, nesta atividade, os estudantes representam potências por meio da contagem. Assim, em duplas, serão desafiados a reproduzir a situação descrita na "**Lenda do tabuleiro de xadrez**". A atividade tem início com a leitura feita por você, professor, da história da lenda do Tabuleiro de Xadrez.

Leia a história!

A Lenda do tabuleiro de xadrez

Fonte: Adaptado de http://www.historyforkids.org/learn/islam/literature/chesswheat.htm.

Cerca de 1260 a. C. Ibn Khallikan, um historiador curdo escreveu uma enciclopédia com biografias de muitos homens famosos. Uma das biografias inclui uma história, passada na Índia, sobre a invenção do xadrez. De acordo com essa história, o rei Shihram era um tirano que oprimia os seus súditos. Um homem sábio chamado Sissa ibn Dahir, para lhe mostrar que um rei precisa de todos os seus súditos, devendo cuidar bem de todos eles, inventou um jogo para o rei jogar – o xadrez. O rei decidiu recompensar Sissa pela sua dedicação e perguntou-lhe o que ele gostaria de receber. Sissa respondeu que não queria nenhuma recompensa, mas o rei insistiu.

— Eu gostaria que colocasse um grão de trigo na primeira casa do meu tabuleiro, dois na segunda casa, quatro na terceira casa, oito na quarta e assim por diante.

Assim, o rei deveria duplicar o número de grãos de trigo ao preencher cada uma das 64 casas do tabuleiro.

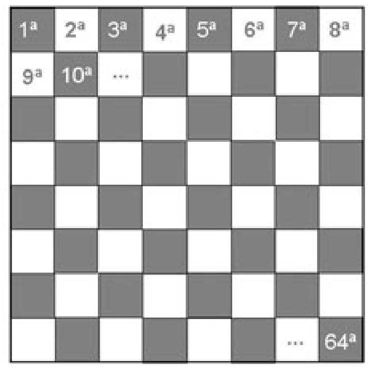
— Que parvo! — pensou o rei. — Essa é uma pequena recompensa, eu ter-lhe-ia dado muito mais!

O rei ficou espantado com a simplicidade do pedido, porém ainda mais surpreso ficou quando constatou que não conseguiria satisfazê-lo, pois o número total de grãos no tabuleiro seria enorme. Quando os escravos começaram a preencher a segunda metade do tabuleiro de xadrez, o rei Shihram percebeu que não poderia pagar mais…

Agora Sissa não parece assim tão parvo, aos olhos do rei. Na verdade, para preencher todas as casas do tabuleiro, ele precisaria de tanto trigo como seis vezes o peso de todos os seres vivos na Terra.

Sissa foi bem mais esperto do que o rei pensava!

Veja um tabuleiro de Xadrez.



Fonte: http://nautilus.fis.uc.pt/cab/5/xadrez.php.

O tabuleiro tem 64 casas.

Após a leitura da história, responda aos questionamentos a seguir.

1. Complete a cartela com o número de grãos de trigo das casas do tabuleiro da história:

1ª CASA	2ª CASA	3ª CASA	4ª CASA	5ª CASA	6ª CASA	7ª CASA
1	2	4	8	16	32	64

a. Quantos grãos de trigo são necessários para preencher a 10ª casa?

Resposta

São necessários 512 grãos de trigo.

2. Organize, na tabela a seguir, as informações obtidas na questão 1.

NÚMERO DA CASA	NÚMERO DE GRÃOS		POTÊNCIAS DE BASE 2
1	1	1	2^0
2	2	2	2^1
3	4	2 x 2 = 4	2^2
4	8	2 x 2 x 2 = 8	2^3
5	16	2 x 2 x 2 x 2 = 16	2^4
6	32	2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32	2^5
7	64	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 64	2^6
:	:		:

3. Você deve ter reparado que a tabela é formada apenas por potências de base 2. Será que podemos pensar em “reduzir” a quantidade de casas? A tabela a seguir representa algumas potências de base 2 menores do que 1, complete-a.

POTÊNCIAS DE 2	OPERAÇÃO	FRAÇÃO	DECIMAL
2^{-1}	$1 \div 2^1$	$\frac{1}{2}$	0,5
2^{-2}	$1 \div 2^2$	$\frac{1}{4}$	0,25
2^{-3}	$1 \div 2^3$	$\frac{1}{8}$	0,125
2^{-4}	$1 \div 2^4$	$\frac{1}{16}$	0,0625

Recursos necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, organize a turma em trios.*
- *Sugerimos que o texto inicial seja lido com a turma para o posterior desenvolvimento da etapa.*

Intervenção Pedagógica:

- *Professor, na questão 1, os alunos, além de registrar na tabela o número de grãos das casas 1 a 7, devem extrapolar até a décima casa. Acreditamos que uma boa parte deles irá calcular as casas 8 e 9 para então chegar ao resultado do número de grãos da décima casa. É interessante que, no fechamento, você promova uma generalização que relacione o número de grãos e o número da casa: o número de grãos pode ser calculado como 2^{c-1}, onde c é o número da casa.*
- *Na questão 2, vale a pena reforçar a definição de potências de expoentes inteiros positivos como um produto de fatores iguais, bem como a definição de potência de expoente zero, o que nos permite representar o número de grãos da casa 1 como uma potência de base 2, pois, $2^0 = 1$.*
- *O expoente negativo surge na tabela do item 3 com a representação fracionária e decimal. É importante observar, junto aos alunos, que os valores vão ficando cada vez menores à medida que o expoente vai diminuindo, embora a base permaneça a mesma. Caso entenda como necessário, estenda a tabela para outros expoentes negativos.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

25 MINUTOS

Atividade • Log-Figurinhas

Objetivo

Observar a resolução de equações logarítmicas, a partir da composição das equações equivalentes.

Descrição da atividade

Nessa etapa, começamos o trabalho sobre a resolução de equações logarítmicas, utilizando o Log-Figurinhas. No anexo, você encontra cinco álbuns (conjuntos de cartas). Cada álbum é formado por figurinhas (cartas). Distribua os cinco conjuntos para cada grupo. O objetivo é que cada grupo monte os cinco álbuns. Para montar cada álbum, os alunos devem compor as figurinhas a fim de formar uma sequência verdadeira que represente a solução da equação logarítmica representada na figurinha com a inscrição “INÍCIO”. Veja a seguir a proposta da atividade.

Você recebeu de seu professor figurinhas (cartas) que formam cinco Log-Álbuns diferentes. Observe a figurinha com a inscrição “INÍCIO” e a equação logarítmica nela escrita. Organize as demais figurinhas desse conjunto, a fim de que a tira que se forme represente a solução dessa equação logarítmica.

Observe um Log-Álbum completo como exemplo.

INÍCIO	$\log_3 9 = x$	$3^x = 9$	$3^x = 3^2$	$x = 2$	FIM

Após montar os cinco Log-Álbuns, registre as sequências obtidas.

INÍCIO	$\log_{17} 1 = x$	$17^x = 1$	$17^x = 17^0$	$x = 0$	FIM

INÍCIO	$\log_3 \frac{1}{9} = x$	$3^x = \frac{1}{9}$	$3^x = \frac{1}{3^2}$	$3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3^x = 3^{-2}$	$x = -2$	FIM

INÍCIO	$\log_2 256 = x$	$2^x = 256$	$2^x = 2^8$	$x = 8$	FIM

INÍCIO → $\log_4 8 = x$ → $4^x = 8$ → $(2^2)^x = 2^3$ → $2^{2x} = 2^3$ → $2x = 3$ → $x = \frac{3}{2}$ → FIM

INÍCIO → $\log_3 81 = x$ → $3^x = 81$ → $3^x = 3^4$ → $x = 4$ → FIM

Recursos necessários

- Encarte do aluno
- Log-Figurinhas

Professor

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha a turma organizada em trios.*
- *Previamente, recorte os Log-Álbuns, obtendo as Log-Figurinhas.*
- *Distribua cada um dos cinco Log-Álbuns para cada trio.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, para montar os Log-Álbuns, os alunos devem aplicar a definição de logaritmo, bem como a definição e as propriedades de potenciação. Sendo assim, no desenvolvimento dessa etapa, é interessante que você circule pelos trios a fim de perceber se os alunos estão tendo algum tipo de dificuldade; caso isso ocorra, sugerimos que você faça uma discussão com toda a turma para esclarecer a dúvida.*

- *As propriedades de potenciação que são necessárias para a realização desta etapa são expoente negativo e potência de potência. Além da definição de potência, isto é, dado um número, é possível escrevê-lo como uma potência, fatorando-o; ele também precisará da definição de potência de expoente nulo.*
- *Para montar os álbuns, os alunos não devem apenas perceber que as equações são equivalentes, eles devem organizar as figurinhas de maneira que a ordem formada corresponda a uma sequência para a resolução da equação. É interessante que você, professor, sinalize esse aspecto, pois não existe uma única maneira de resolver uma equação.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • Corrente Logarítmica

Objetivo

Resolver equações logarítmicas.

Descrição da atividade

Nesta atividade, os alunos devem resolver equações logarítmicas, usando a mesma ideia trabalhada na etapa anterior, mas agora a posição da variável está modificada e, além disso, eles mesmos devem completar todas as etapas do processo. Observe a proposta a seguir.

Observe a Corrente Logarítmica com a resolução da equação $\log_3 x^4 = 8$.

INÍCIO	$\log_3 x^4 = 8$	$x^4 = 3^8$	$x^4 = \left(3^2\right)^4$	$x = 3^2 = 9$	**FIM**

Discuta com seus colegas sobre a formação das demais correntes e complete as etapas de resolução. Não há problema se você utilizar mais ou menos elos da corrente.

INÍCIO	$\log_x 32 = 5$	$x^5 = 32$	$x^5 = 2^5$	$x = 2$	**FIM**
INÍCIO	$\log_x 125 = 3$	$x^3 = 125$	$x^3 = 5^3$	$x = 5$	**FIM**
INÍCIO	$\log x^5 = 10$	$x^5 = 10^{10}$	$x^5 = \left(10^2\right)^5$	$x = 100$	**FIM**
INÍCIO	$\log_2 x^2 = 6$	$x^2 = 2^6$	$x^2 = \left(2^3\right)^2$	$x = 8$	**FIM**

Recursos necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, os alunos devem continuar trabalhando em trios e registrar as etapas da solução das equações em seu encarte.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, é possível que seus alunos não recordem as propriedades de equação exponencial utilizadas. Caso perceba que eles estão com dificuldades em iniciar a atividade, relembre-os que sendo a, b x e y números reais e a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 1, temos:*

$$a^x = a^y \leftrightarrow x = y$$

e

$$a = b \leftrightarrow a^x = b^x$$

- *A propriedade de potência utilizada no exercício é $(a^m)^n = a^{m.n}$ $(a > 0, a \neq 1)$ que também foi utilizada na etapa anterior em um dos Log-Álbuns.*
- *Além de registrar as propriedades na lousa, você pode também fazer um ou dois exemplos de cada caso para que os alunos vejam exemplos da aplicação das propriedades.*
- *Chame a atenção dos alunos que para resolver “Correntes Logarítmicas” eles precisam expressar as equações exponenciais em termos de bases iguais ou de expoentes iguais para então utilizar as propriedades destacadas, além de, em alguns casos, fatorar o número e expressá-lo em forma de potência.*

• • • • •

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

ENEM 2011 • Questão 137 • Prova Azul • Adaptada

A Escala e Magnitude de Momento (denotada como M_W) é uma escala logarítmica para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada que relaciona M_W e M_0 pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$

onde M_0 é o momento sísmico.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve 7,3 de magnitude M_W.

Qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe?

a. $10^{-5{,}10}$

b. $10^{-0{,}73}$

c. $10^{12{,}00}$

d. $10^{21{,}65}$

e. $10^{27{,}00}$

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

15 MINUTOS

Resolução

Pelo enunciado, sabemos que $M_w = 7,3$. Basta então substituir o valor na fórmula:

$$M_W = -10,7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$
$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$
$$\frac{2}{3} log_{10}(M_0) = 18$$
$$log_{10}(M_0) = 18 \cdot \frac{3}{2}$$
$$log_{10}(M_0) = 27$$

Aplicando a definição de logaritmo, temos: $M_0 = 10^{27}$. Com isso, podemos concluir que a alternativa correta é a letra (E).

Distratores

Os possíveis erros para encontrar as outras quatro opções referem-se a erros na resolução da equação. Em todas as alternativas, o aluno aplica corretamente a definição de logaritmo.

No caso do item (a), o aluno erra ao operar com -10,7, calculando $-10,7 + 7,3 = -3,4$.

No item (b), ele soma $-10,7 + \frac{2}{3}$, obtendo aproximadamente -10, como fator de multiplicação do log.

Já no item (c), ele erra ao multiplicar $18 = 10,7 + 7,3$ por $\frac{2}{3}$, no lugar de $\frac{3}{2}$, obtendo 12.

Já no caso do item (d), o aluno primeiro multiplicou $7,3 \cdot \frac{3}{2}$ e depois somou 10,7.

Professor

Etapa Flex

Para saber +

Os logaritmos foram inventados no início do século 17, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, com vistas à elaboração de tabelas de navegação.

Com efeito, a regra

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

e suas consequências, tais como

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

e

$$\log(x^n) = \mathrm{n} \cdot \log x$$

permitem reduzir cada operação aritmética (exceto, naturalmente, a adição e a subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos. Esta maravilhosa utilidade prática dos logaritmos perdurou até recentemente, quando foi vastamente superada pelo uso das calculadoras eletrônicas.

A função logaritmo, entretanto, juntamente com sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais importantes na Matemática, por uma série de razões que vão muito além da sua utilidade como instrumento de cálculo aritmético. Propriedades operatórias como essas são importantes para resolver algumas equações logarítmicas. Por exemplo, para resolver a equação

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-2) = 1$$

no universo dos números reais, primeiro utilizamos a propriedade operatória que transforma a adição de logaritmos em multiplicação de logaritmandos

$$\log_2(x-3)\cdot(x-2) = 1$$

Em seguida, usamos a definição de logaritmos

$$(x-3)(x-2) = 2^1$$

Isso transforma o nosso problema inicial em uma equação do segundo grau, cujas raízes são 1 e 4. O valor de x = 1 transforma o logaritmando em valores negativos, logo deve ser descartado, devido à condição do logaritmo.

Assim, a única solução dessa equação logarítmica é x = 4.

Etapa Flex

Agora, é com você!

1. Escreva números nos quadrinhos em branco. Você sabe que pode discutir o assunto com seus colegas e, se houver dúvidas, recorra ao seu professor.

$10^1 = \boxed{10}$ $\quad$ $10^{\boxed{2}} = 10 \cdot 10$ $\quad$ $\boxed{10}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$

$2^{\boxed{-1}} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $2^{\boxed{0}} = 1$ $\quad$ $2^2 = \boxed{2 \cdot 2}$

$2^{\boxed{3}} = 8$ $\quad$ $\boxed{2}^5 = 32$ $\quad$ $2^{\boxed{6}} = 64$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \boxed{\frac{1}{9}}$ $\quad$ $\boxed{3}^{-1} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $3^{\boxed{2}} = 9$

$3^3 = \boxed{27}$ $\quad$ $3^{\boxed{4}} = 81$ $\quad$ $3^{\boxed{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3$

Agora, um desafio!

Complete o mosaico de funções, considerando que cada hipotenusa é o elo entre uma equação logarítmica e seu possível resultado. Você precisa usar todas as expressões da lista a seguir:

$\log_4(x-1) = \frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\log_x 32 = 5$	1
$\log x = 2$	$\frac{17}{5}$	$\log_2(3-x) = -1$	625
$\log_x \frac{1}{9} = -1$	16	$\frac{1}{4}$	$\log_{x-2} 4 = 2$

Professor

$\log_4 (x-1)=\frac{1}{2}$	$\log_2 x=0$	$\log x=2$	$\log_8 x=\frac{4}{3}$
3	1	100	16
$\log_4 (5x-1)=2$	$\log_x \frac{1}{9}=-1$	$\log_2 (3x+1)=3$	$\log_{x-2} 4=2$
$\frac{17}{5}$	9	$\frac{7}{3}$	4
$\log_x 32=5$	$\log_5 x=4$	$\log_2 (3-x)=-1$	$\log_{\frac{1}{2}} x=2$
2	625	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$

INÍCIO	$\log_{17} 1 = x$	$17^x = 1$	$17^x = 17^0$	$x = 0$	FIM		
INÍCIO	$\log_3 \frac{1}{9} = x$	$3^x = \frac{1}{9}$	$3^x = \frac{1}{3^2}$	$3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3^x = 3^{-2}$	$x = -2$	FIM
INÍCIO	$\log_2 256 = x$	$2^x = 256$	$2^x = 2^8$	$x = 8$	FIM		
INÍCIO	$\log_4 8 = x$	$4^x = 8$	$(2^2)^x = 2^3$	$2^{2x} = 2^3$	$2x = 3$	$x = \frac{3}{2}$	FIM
INÍCIO	$\log_3 81 = x$	$3^x = 81$	$3^x = 3^4$	$x = 4$	FIM		

Anexo I