Reforço escolar • Matemática •

Invertendo a exponencial

Dinâmica 3

2ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Algébrico Simbólico	Função Logarítmica

Professor

DINÂMICA	Invertendo a exponencial.
HABILIDADE PRINCIPAL	H52 – Resolver problemas com números reais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, **potenciação**).
HABILIDADES ASSOCIADAS	H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como **inversa da função exponencial**.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar ideias	Caça Potências	20 a 30 min	Grupos de 2 ou 3 alunos com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar...	Ciclo de Valores	15 a 20 min	Grupos de 2 ou 3 alunos com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Entrando no Mundo dos Gráficos	20 a 25 min	Grupos de 2 ou 3 alunos com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro professor:

Nesta dinâmica, será mais uma vez focalizado o logaritmo como inverso da exponencial de mesma base. Para melhor lidar com esses números, será feita uma revisão da definição de potência, em particular com expoentes negativos e fracionários. Essas potências culminam em um tema que lida com questões complicadas para grande parte de nossos estudantes: raízes e frações. De início, sugerimos um ambiente lúdico, no qual o aluno tem a oportunidade de se familiarizar com as várias formas de representar um mesmo número. Em seguida, ele se depara com um Ciclo de Valores no qual esperamos que ele perceba a relação inversa entre o logaritmo e a exponencial de mesma base. Finalmente, ele pode perceber essa relação através da representação gráfica. Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Matemática

Primeira Etapa
Compartilhar Ideias

30 MINUTOS

Atividade • Caça Potências

Objetivo

Explorar a definição de potências, sobretudo, com expoentes negativos e fracionários.

Descrição da atividade

Prezado professor, esta atividade foi preparada para que os estudantes relembrem as definições de expoente negativo e fracionário o que lhes permitirá uma melhor compreensão da função exponencial e logarítmica. Os alunos deverão, em grupo, buscar na tabela conjuntos de três representações numéricas consecutivas que indicam o mesmo valor. A procura pode ser feita na horizontal, vertical e diagonal. O jogo termina quando acabar o tempo estipulado por você (aconselhamos que seja em torno de 10 min). Os membros de cada grupo devem se ajudar na tentativa de descobrir o máximo de conjuntos de representações dentro do tempo disponível. Veja a descrição a seguir.

Você e seus colegas devem procurar no Caça Potências conjuntos de três representações numéricas consecutivas que indicam o mesmo valor, como no exemplo.

A procura pode ser feita na horizontal, vertical ou diagonal.

O jogo termina, quando o tempo acabar.

2^0	$1^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{1}$	$3^5 \div 3^2$	3^3	27	5^{-1}	6	18	35
2^5	$\sqrt[3]{27}$	41	100	0,5	2^{-1}	$2^{11} \div 2^{12}$	$\frac{1}{5}$	70	1,2
$4^{\frac{5}{2}}$	13	3	23	10^2	13	0,001	63	0,2	11
32	3^7	17	$27^{\frac{1}{3}}$	11	$\sqrt{10000}$	10^{-3}	2	$16^{\frac{1}{4}}$	10
$\sqrt{25}$	25	343	7^3	$7 \cdot 7 \cdot 7$	49	$10^5 \div 10^8$	$8^{\frac{1}{3}}$	1	$\frac{1}{2}$
$8^{\frac{3}{2}}$	2^3	8	$\frac{16}{2}$	42	256	$\sqrt[4]{16}$	6	8	2^{-1}
5^{-2}	$\frac{1}{25}$	$5^3 \div 5^5$	35	5^3	3^5	4^4	5	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\sqrt{49}$	0	28	$25^{\frac{3}{2}}$	33	12	1	$4^2 \cdot 4^2$	2^3	3^{-2}
$49^{\frac{1}{2}}$	14	125	15	5,3	$\frac{10}{10}$	1000	$10^{\frac{6}{2}}$	10^3	$\frac{1}{9}$
7	32	2^5	$2^3 \cdot 2^2$	10^0	13	23	20	21	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Recursos necessários:

- Caça Potências
- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, divida a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *Para a realização desta etapa, você deve entregar para cada grupo um Caça Potências.*
- *De acordo com a sua turma estipule um tempo para que os alunos busquem os trios, recomendamos 10 minutos, para que sobre um tempo para a discussão coletiva.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, você pode aproveitar o exemplo para retomar com a turma as propriedades de potenciação. Repare que o exemplo aborda um expoente fracionário, você pode aproveitá-lo e adaptá-lo para também retomar o caso do expoente negativo.*
- *No caso dos expoentes fracionários, é possível que alguns alunos não se lembrem ou até mesmo não conheçam a sua definição. Nesse caso, talvez seja interessante apresentá-la.*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \ n \neq 0 \text{ e a} > 0$$

- *Já para o caso dos expoentes negativos, muito provavelmente os alunos devem se lembrar, mas não custa relembrar.*

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m, \ \text{a} \neq 0$$

- *É aconselhável que durante a realização do Caça Potências você circule entre os grupos auxiliando os alunos que mostrarem dificuldades com as representações.*
- *Os alunos podem descobrir mais 20 trios no Caça Potências. Após o término do tempo estipulado, você deve promover uma discussão coletiva quando toda a turma deve mostrar os trios que foram encontrados em seus grupos. É importante que você discuta com a turma os trios que envolvem os expoentes fracionários e negativos, pois eles serão importantes para a próxima etapa. Talvez seja interessante que você reproduza um Caça Potências maior previamente para que, nesse momento, você utilize com a turma para marcar os trios encontrados e para os alunos individualmente marcarem no seu encarte.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

20 MINUTOS

Atividade • Ciclo de Valores

Objetivo

Relacionar a exponencial e o logaritmo.

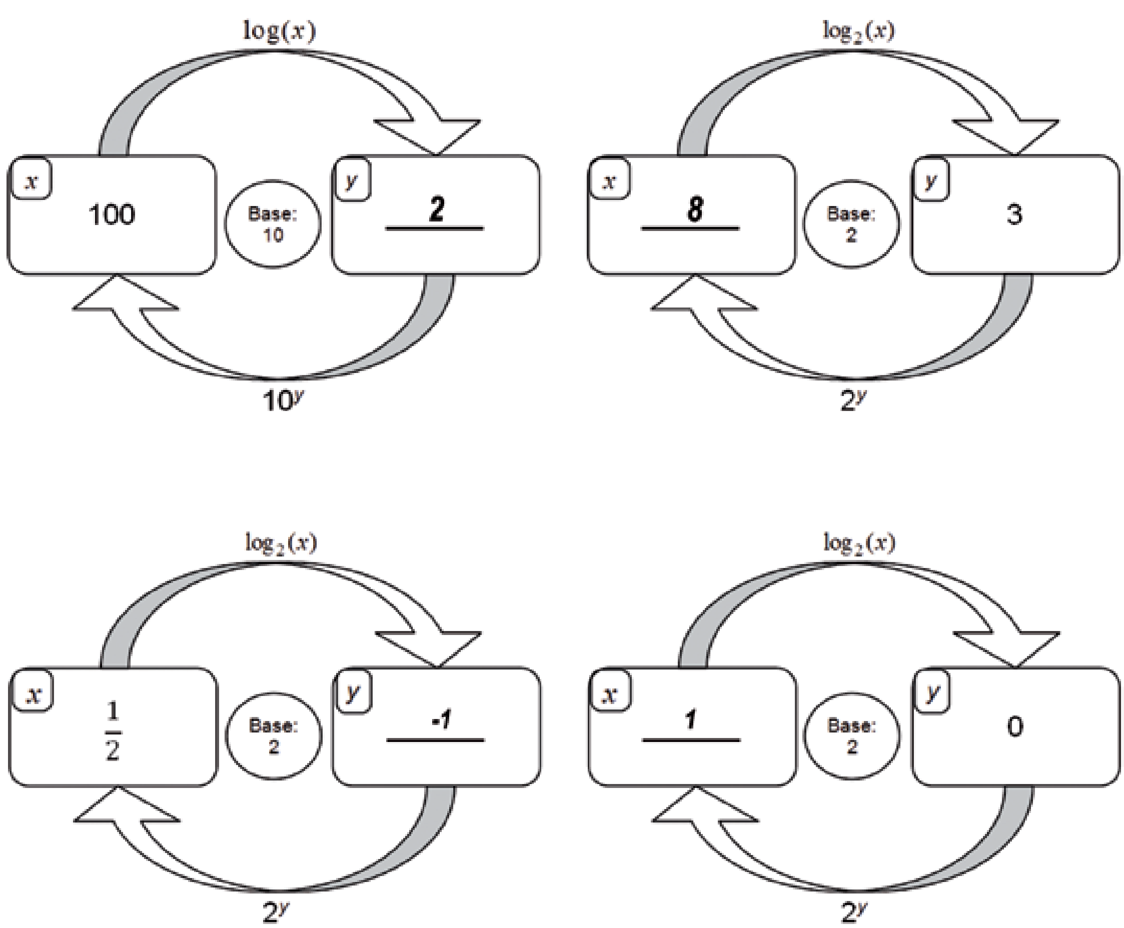
Descrição da atividade

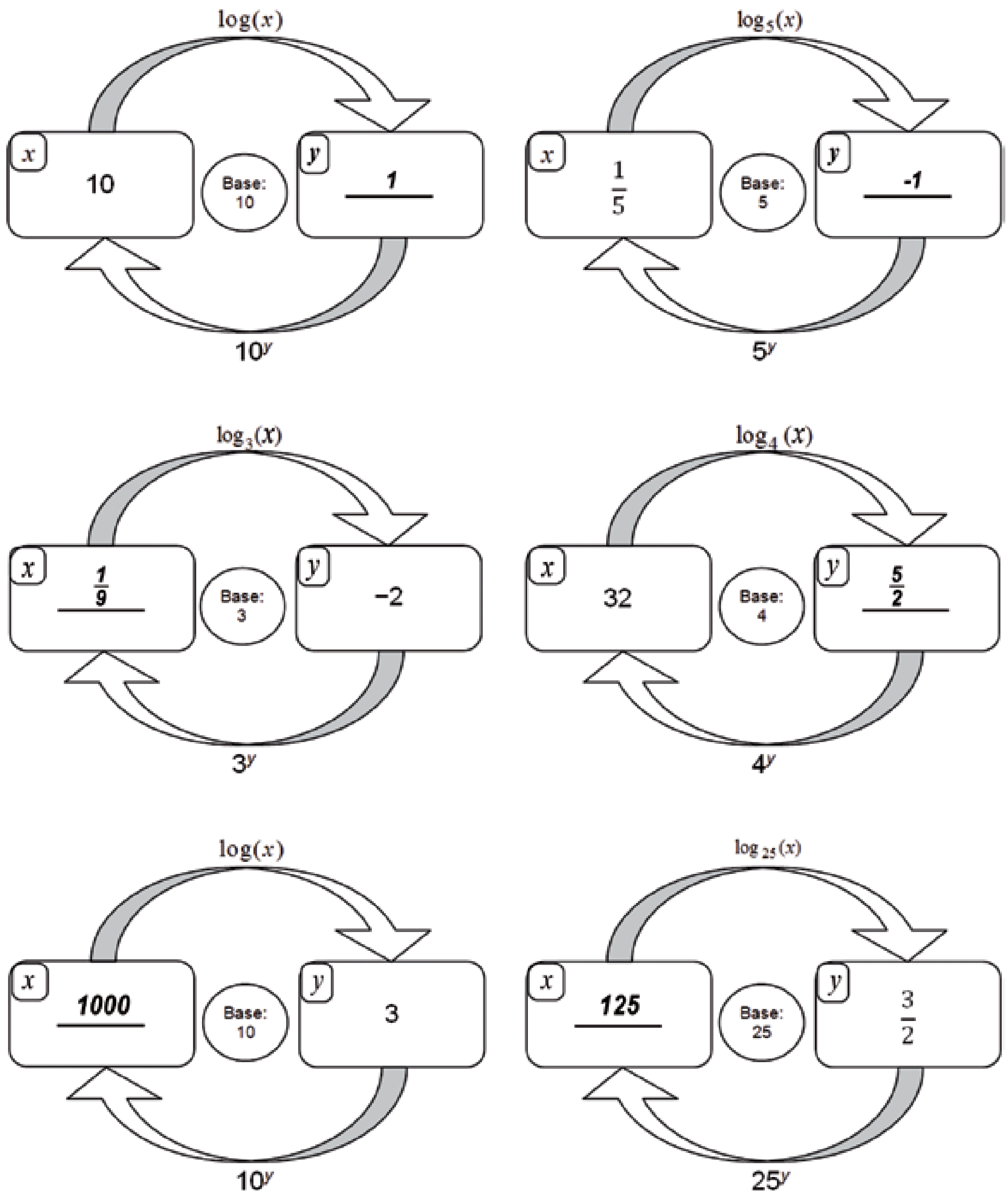
Professor, nessa etapa, os alunos devem completar os valores desconhecidos num ciclo que relaciona o logaritmo e a exponencial. Veja a proposta a seguir.

Complete as lacunas de forma que o ciclo seja verdadeiro.

Para ter certeza de que o valor está correto, verifique os dois sentidos das flechas.

Resposta





Recursos necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Mantenha os grupos formados na etapa anterior e oriente os alunos a registrarem a atividade individualmente no seu encarte.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, caso os alunos tenham dificuldade em entender a atividade, faça um exemplo com eles para explicar o mecanismo do ciclo, chamando a atenção para a ideia de transformação que o ciclo pode remeter e aproveitando para revisar a definição de logaritmo.*
- *É importante que eles verifiquem os resultados, usando os dois sentidos das flechas, ou seja, calculando a exponencial e o logaritmo.*
- *Você pode também chamar a atenção deles para o fato de que eles estão, de fato, resolvendo equações, ora exponenciais, ora logarítmicas. Se a incógnita é x, eles chegam a uma equação logarítmica e se é y, a uma equação exponencial.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

25 minutos

Atividade • Entrando no Mundo dos Gráficos

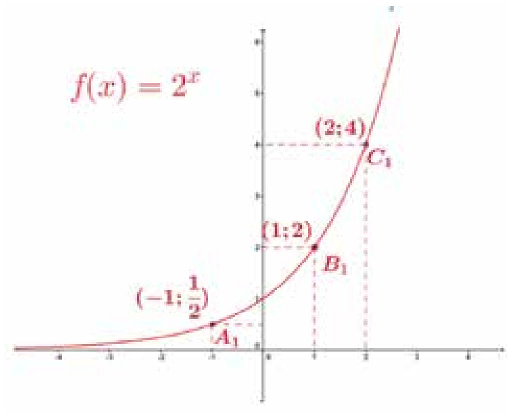
Objetivo

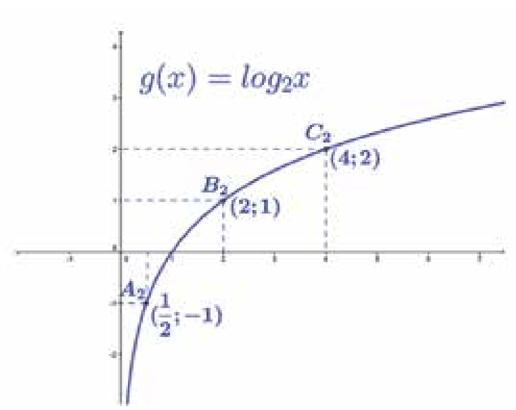
Identificar o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial.

Descrição da atividade

Professor, nesta atividade, visando ainda reforçar a relação entre a função exponencial e logarítmica como funções inversas, os alunos devem relacionar os pontos da função exponencial e da função logarítmica a partir da simetria em relação à reta y = x. Veja a proposta da atividade.

A seguir, estão representadas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = log_2 x$.





1. Verifique que o ponto B_1=(1 , 2) pertence ao gráfico da função f.

Resposta

Levando-se em conta que $f(x) = 2^x$ *, temos que* $f(1) = 2^1 = 2$ *. Logo* B_1 *pertence ao gráfico de f.*

• • • • •

2. Verifique que o ponto C_2=(4 , 2) pertence ao gráfico da função g.

Resposta

Considerando a lei $g(x) = \log_2 x$ *, temos que* $g(4) = \log_2 4 = 2$ *. Logo* C_2 *pertence ao gráfico de g.*

• • • • •

3. Observe as coordenadas dos pontos A_1 e A_2. Qual a relação entre elas?

Resposta

A abscissa do ponto A_1 *é a ordenada do ponto* A_2 *e a ordenada do ponto* A_1 *é a abscissa do ponto* A_2*.*

• • • • •

Professor

4. Agora, observe as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 e depois dos pontos C_1 e C_2. As coordenadas dos pares de pontos apresentam a mesma relação que a dos pontos A_1 e A_2?

Resposta

Sim, os pontos mantêm a mesma relação entre suas coordenadas.

• • • • •

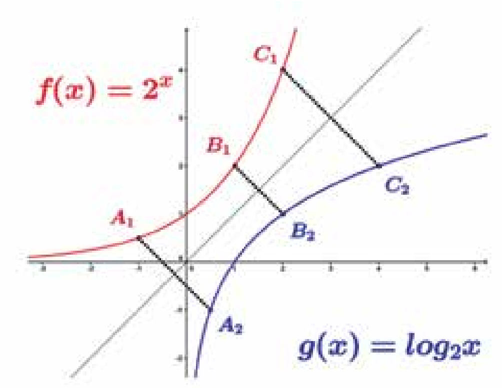
5. Imagine um ponto D_1 no gráfico da função f(x) cuja abcissa vale 3. Mantendo-se a mesma relação observada nos itens 3 e 4, quais são as coordenadas do ponto D_2 sobre o gráfico da função g(x)? Explique como você pensou.

Resposta

O ponto D_1 tem coordenadas $(3, 2^3) = (3, 8)$. Mantendo-se a relação podemos concluir que as coordenadas do ponto D_2 são (8, 3).

• • • • •

6. Observe os gráficos das funções f e g representados num mesmo plano cartesiano, juntamente com a reta pontilhada y = x.



Pense numa maneira de obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f, levando-se em consideração a reta y = x.

Resposta

É possível obter o gráfico de g, refletindo o gráfico de f em relação à reta y = x.

• • • • •

Matemática

Recursos necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- Continue com a turma organizada nos grupos formados anteriormente.

Intervenção Pedagógica

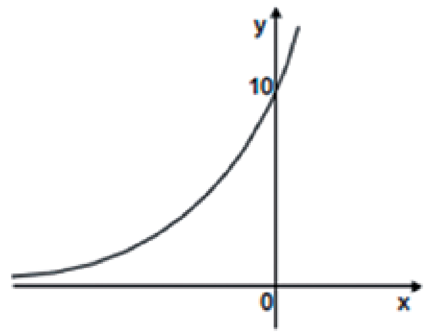
- *Professor, no itens 1 e 2 esperamos que os alunos percebam que um ponto pertence ao gráfico de uma função quando a imagem da abscissa é exatamente a ordenada ((x; f(x))). Caso a sua turma não se lembre desse fato, é importante que você o retome.*
- *Nos itens 3 e 4, talvez seja importante reforçar que a abscissa do ponto é a ordenada do outro. Durante a discussão coletiva da atividade, provoque a associação desta etapa com a etapa anterior, Ciclo de Valores, para reforçar a ideia da relação inversa entre o logaritmo e a exponencial de mesma base.*
- *Caso o aluno tenha dificuldade em encontrar as coordenadas de* D_2 *no item 5, oriente-o para trabalhar com as leis de formação das funções f e g, da maneira que ele quiser. No caso dele optar por usar a lei de formação da função g, ele deve resolver a equação logarítmica* $\log_2 y=3$*, obtendo* $y = 8$ *e, consequentemente, as coordenadas de* $D_2 = (8\,,\,3)$*.*
- *No item 6, os alunos podem ter dificuldade para perceber que a reta* $y = x$ *é um eixo de simetria. Nesse caso, sugira que os alunos refaçam o desenho em um papel à parte para que possam dobrá-lo. Reforce com a turma o fato de haver uma permuta entre as variáveis x e y nas funções f e g e, por isso, essas funções são ditas inversas. Vale ressaltar que a relação de simetria entre os gráficos só pode ser percebida quando utilizamos a mesma escala nos dois eixos.*

Quarta Etapa
Quiz

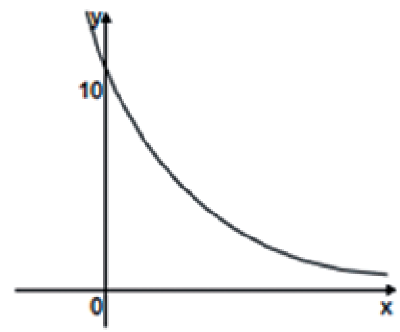
Atividade • Avaliação Diagnóstica/ SAERJINHO 2011

Qual é o gráfico que melhor representa a função inversa da função $f : IR \to IR^*_+$, definida por $f(x) = 10^x$?

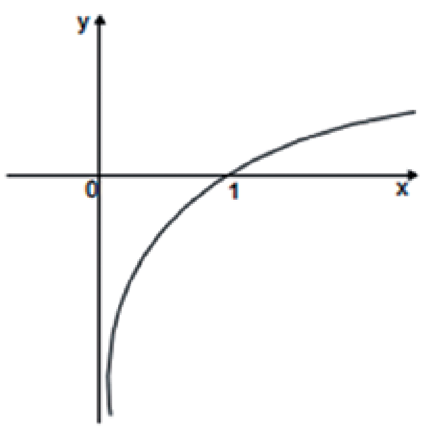
A)



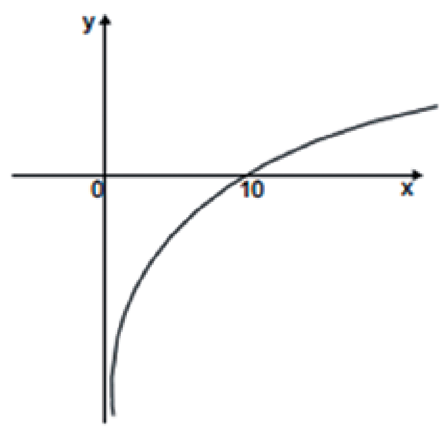
B)



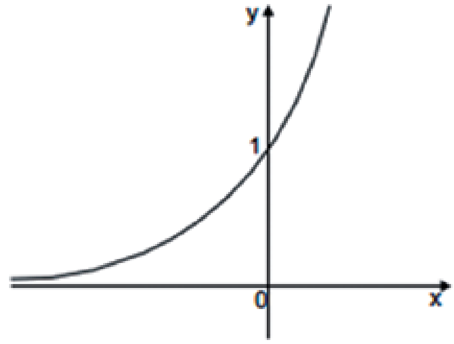
C)



D)



E)



A resposta correta é a letra (c)

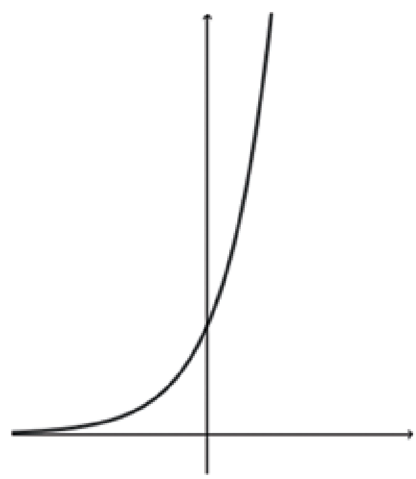
Quinta Etapa

Análise das respostas ao Quiz

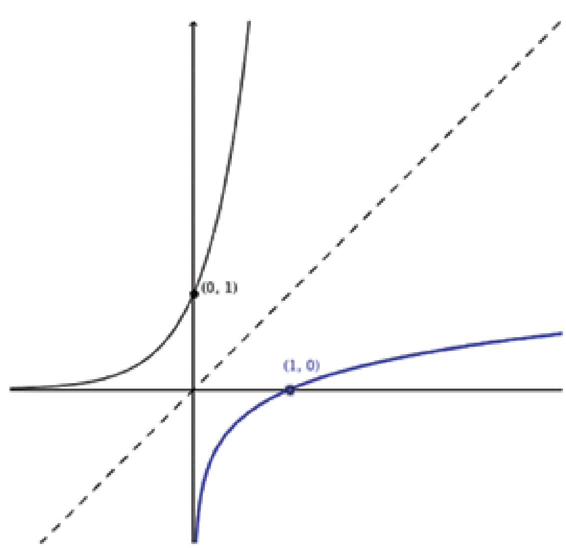
15 MINUTOS

Resposta

O aluno deve observar que a função $f(x) = 10^x$ é uma exponencial crescente; logo, ela passa pelo ponto (0, 1) e seu gráfico é o seguinte:



Fazendo a simetria em relação à reta y = x, temos:



Com isso, a resposta correta é a alternativa **(c)**.

Distratores

Os alunos que optarem pelas alternativas (a), (b) ou (e), provavelmente, pensaram apenas no gráfico da exponencial $f(x)=10^x$, sendo que no item (a) acreditam que a interseção com o eixo y é o ponto (0, 10) e no item (b), além da interpretação equivocada do ponto de interseção pensam ainda que o gráfico corresponde ao gráfico de uma exponencial decrescente.

Os alunos que assinalarem a alternativa (d) mostram ter compreendido o processo de simetria em relação a reta y = x, mas possivelmente acreditam que a interseção da exponencial com o eixo y é o ponto (0, 10) e, consequentemente, que o ponto de interseção do gráfico da função logarítmica é o ponto (10, 0).

Etapa Flex

Para saber +

Um cuidado que se deve ter, relativamente às potências de expoente fracionário, é com sua definição. A potência é definida como produto de fatores iguais quando o expoente é um inteiro maior ou igual a 2, pois só nesses casos faz sentido falar em número de fatores. Os demais casos de expoentes, como 0, 1 e expoentes inteiros negativos são definidos separadamente com a intenção de manter a maioria das propriedades válidas para as potências definidas como produto de fatores iguais. Assim é que se define: a^1 como a, a^0 como 1, sempre que a ≠ 0 (o caso de 0^0 não tem uma definição que se aplique sempre, então não se define). Também para a ≠ 0, é possível definir a potência com expoente negativo como $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, sempre que n seja um número inteiro (o uso da divisão é que impõe a exigência de que a seja diferente de 0).

Algumas justificativas já foram apresentadas, em outra dinâmica, para mostrar que essas são definições *naturais*, pelo interesse em manter propriedades que valiam para potências de expoentes naturais maiores ou iguais a 2. Esta mesma razão levou à definição dada aqui da potência com expoente racional.

Senão, vejamos: Se m e n são inteiros, então: $(a^n)^m=a^{n.m}$. Preste atenção que não podemos concluir $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q=a^{\frac{p}{q}.q}$ porque não sabemos o que seja $a^{\frac{p}{q}}$, mas podemos dar uma definição de forma que essa propriedade continue valendo. Qual será essa definição?

Ora, $\frac{p}{q}.q = p$; logo, para manter a propriedade do cálculo de potência de potência, será necessário que $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}.q}$ seja igual a a^p mas, o número que elevado a q dá a^p é a raiz de ordem q de a^p, então aí está a definição que estávamos procurando:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\text{, } q \neq 0 \text{ e } a > 0}$$

Repare que esta não é uma demonstração dessa igualdade, mas sim, uma definição do seu 1º membro que não tinha sentido antes de ser definido.

Uma outra observação que pode ser interessante é que essa definição permite transformar raízes em potências! O que torna quase todos os cálculos com radicais mais simples.

O *link* abaixo refere-se à Aula de número 57 do Telecurso que aborda as potências com expoentes fracionários, incluindo sua definição, uma recordação das propriedades das potências e algumas aplicações:

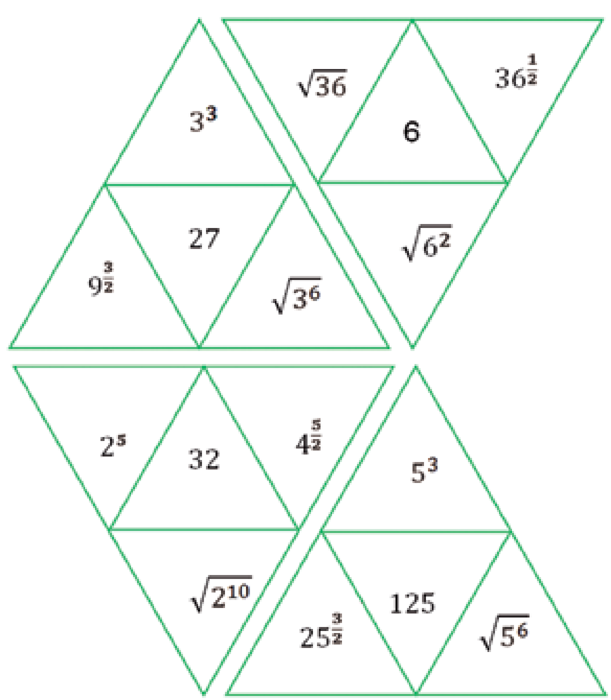
- http://www.youtube.com/watch?v=dn8oNRAOWDw

Professor

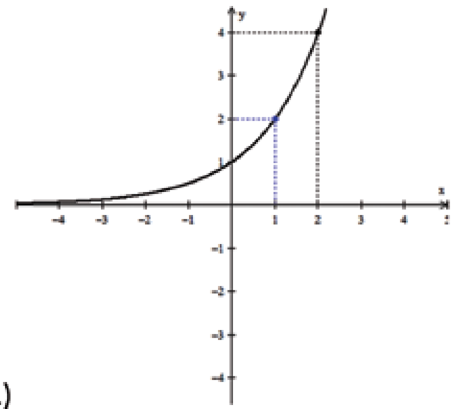
Agora, é com você!

1. Complete as expressões nas "pontas" de modo que o valor da expressão em cada uma delas seja igual ao número do "miolo":

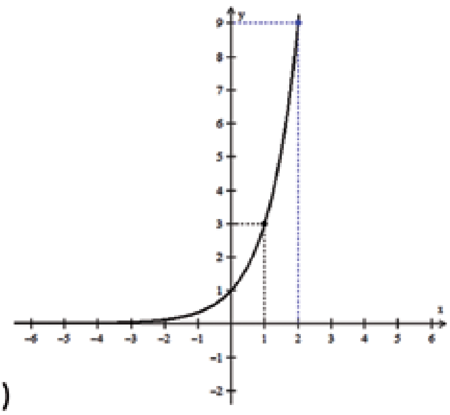
Resposta



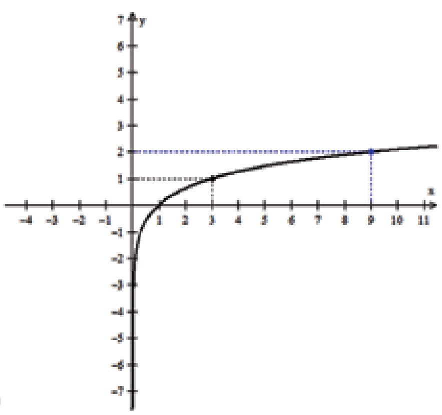
2. Relacione os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas que se encontram na coluna da esquerda com o gráfico correspondente de suas inversas na coluna da direita.



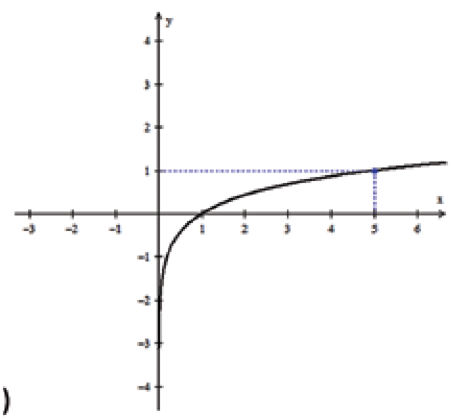
(1)



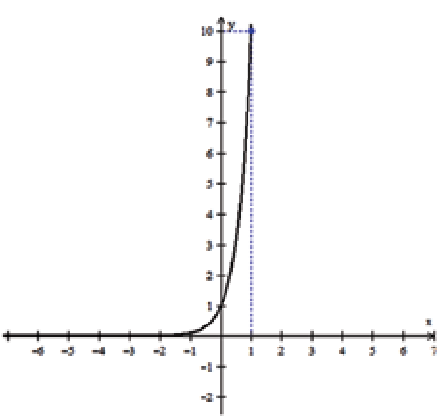
(2)



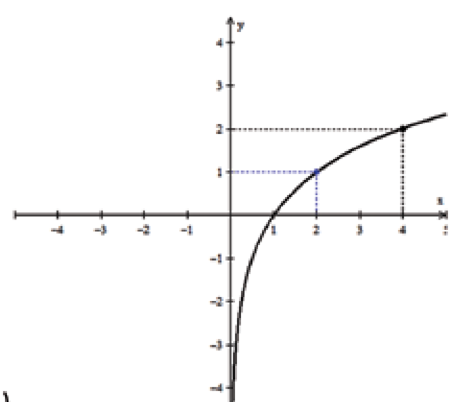
(2)



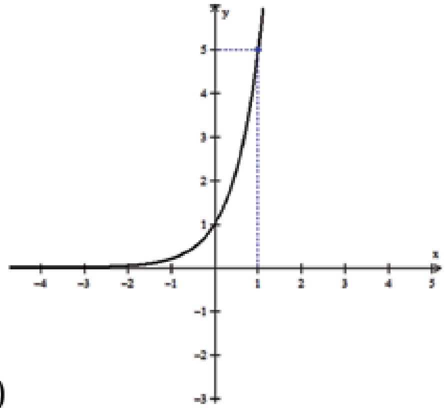
(4)



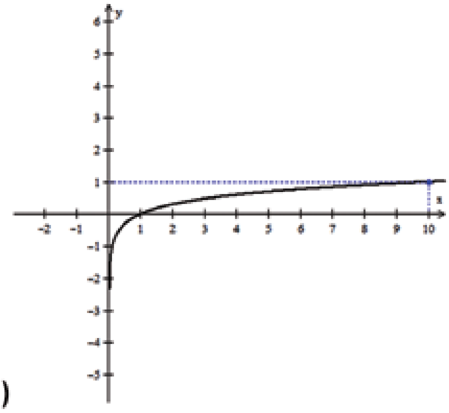
(3)



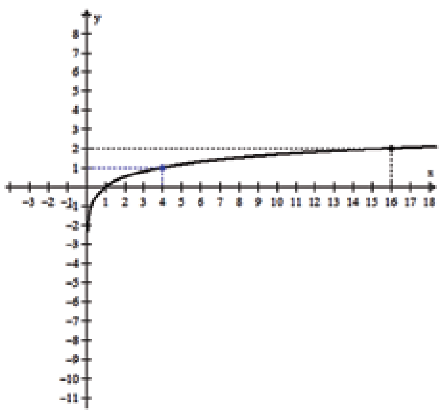
(1)



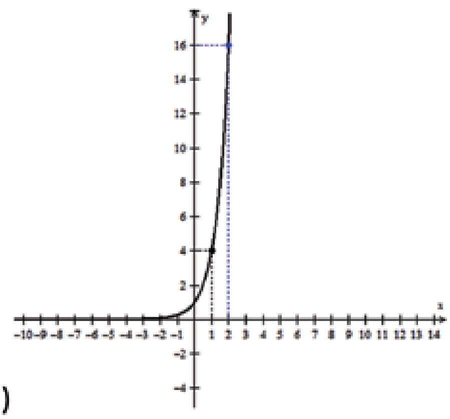
(4)



(3)



(5)



(5)

Professor

Caça Potências

2^0	$1^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{1}$	$3^5 \div 3^2$	3^3	27	5^{-1}	6	18	35
2^5	$\sqrt[3]{27}$	41	100	0,5	2^{-1}	$2^{11} \div 2^{12}$	$\frac{1}{5}$	70	1,2
$4^{\frac{5}{2}}$	13	3	23	10^2	13	0,001	63	0,2	11
32	3^7	17	$27^{\frac{1}{3}}$	11	$\sqrt{10000}$	10^{-3}	2	$16^{\frac{1}{4}}$	10
$\sqrt{25}$	25	343	7^3	$7 \cdot 7 \cdot 7$	49	$10^5 \div 10^8$	$8^{\frac{1}{3}}$	1	$\frac{1}{2}$
$8^{\frac{3}{2}}$	2^3	8	$\frac{16}{2}$	42	256	$\sqrt[4]{16}$	6	8	2^{-1}
5^{-2}	$\frac{1}{25}$	$5^3 \div 5^5$	35	5^3	3^5	4^4	5	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\sqrt{49}$	0	28	$25^{\frac{3}{2}}$	33	12	1	$4^2 \cdot 4^2$	2^3	3^{-2}
$49^{\frac{1}{2}}$	14	125	15	5,3	$\frac{10}{10}$	1000	$10^{\frac{6}{2}}$	10^3	$\frac{1}{9}$
7	32	2^5	$2^3 \cdot 2^2$	10^0	13	23	20	21	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$