



Invadindo o espaço

Dinâmica 5

2ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Campo Algébrico Simbólico	Introdução à geometria espacial

DINÂMICA	Invadindo o espaço.
HABILIDADE BÁSICA	H06 - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e/ou pelos tipos de ângulos.
HABILIDADE PRINCIPAL	H07 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
CURRÍCULO MÍNIMO	Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Dobrando e desdobrando.	De 25 a 30 min	Individual com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar...	Temos algum plano?	De 15 a 20 min	Em grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	De olho na caixa!	De 15 a 25 min	Em grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

APRESENTAÇÃO

Nesta dinâmica, exploramos conceitos da geometria espacial de posição, com o uso de material manipulável e, sempre que possível, buscando relações com a geometria plana. Na primeira etapa, apresentamos a atividade “Dobrando e desdobrando”, na qual revisamos as posições entre retas no plano por meio de dobraduras. Em seguida, propomos uma atividade que propicia a investigação da existência de planos determinados por duas retas dadas, a partir da manipulação de canudos e folhas de papel; essa atividade propicia o entendimento de um novo conceito: o de retas reversas. Na terceira etapa, com o auxílio de uma caixa de sapatos, os alunos devem identificar as posições relativas de retas e planos no espaço.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas, entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

PRIMEIRA ETAPA

COMPARTILHAR IDEIAS



ATIVIDADE • DOBRANDO E DESDOBRANDO

Objetivo

Identificar posições entre retas no plano por meio de dobraduras.

Descrição da atividade

Professor, nessa etapa os alunos devem explorar e identificar as posições relativas de retas no plano, para tal, devem realizar dobraduras em uma folha de papel. No primeiro item, abordamos retas concorrentes e, no segundo, retas perpendiculares e paralelas. Acompanhe a descrição da atividade a seguir.

Vamos redescobrir as formas mais simples da geometria plana, dobrando uma folha de papel.

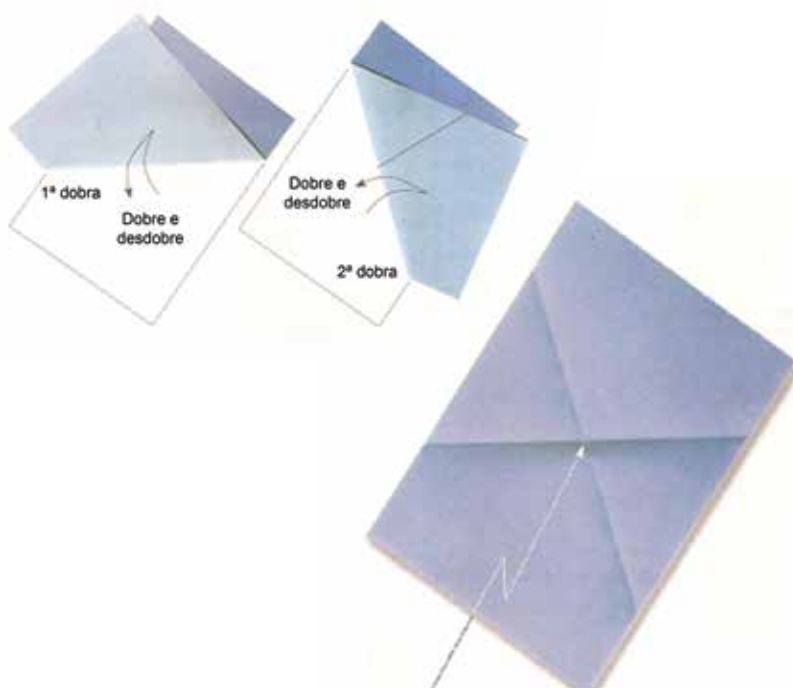
1. Direto ao ponto

Pegue uma folha de papel.

Faça uma dobra na folha no sentido que você quiser e desdobre-a.

Depois, dobre-a em outro sentido, de modo que essa dobra encontre a primeira e desdobre-a novamente.

Veja um exemplo do que pode ser feito na figura abaixo.



- a. Você deve ter obtido duas marcas no papel. Essas marcas (dobras) dão-nos ideia de figuras já conhecidas.

Que figura geométrica está associada a essas marcas?

Resposta

A Reta (ou segmento de reta).



- b. Como podemos chamar o encontro entre as marcas na folha?

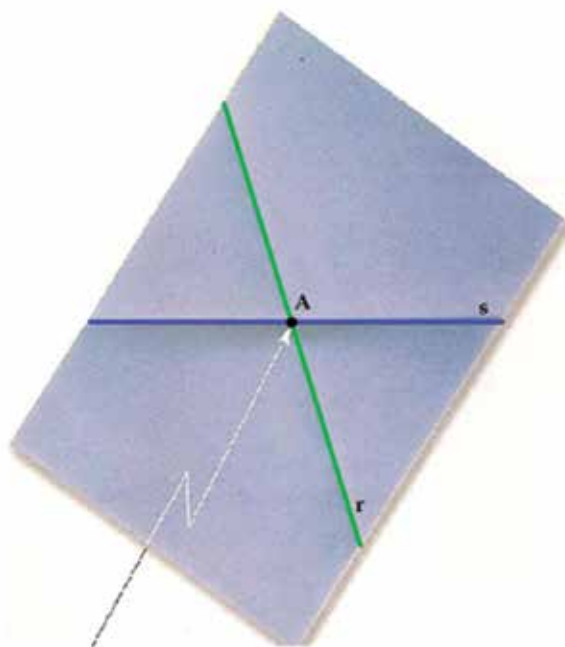
Resposta

Ponto.



- c. Com uma régua, “acenda” essas marcas, utilizando cores distintas.

Vamos imaginar que essas marcas representam retas. Identifique cada uma das retas por r e s , e o ponto de interseção entre r e s por A . Caso tenha dúvida, observe o esquema abaixo.



Essas retas possuem outro ponto em comum além do ponto A?
Como podemos classificá-las de acordo com suas posições relativas?

Resposta

*Essas retas não possuem outro ponto comum, além do ponto A.
Por esse motivo, essas retas são denominadas retas concorrentes.*



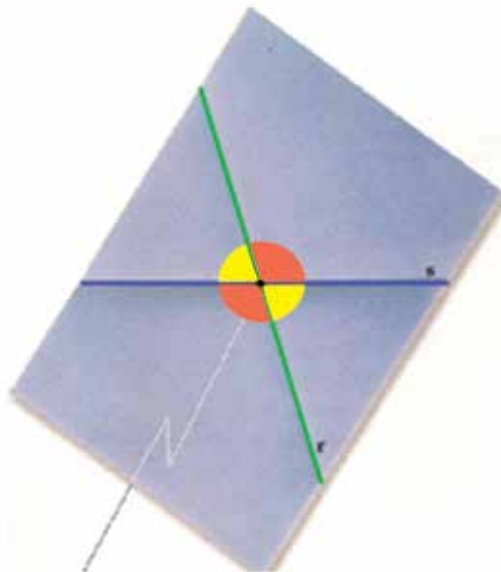
- d. Destaque os ângulos formados pelas retas, usando cores iguais para ângulos congruentes.

Quantos pares de ângulos congruentes você obteve? Como você pode justificar que os ângulos são congruentes?

Resposta

Observando a figura, podemos verificar que temos dois pares de ângulos congruentes.

Os ângulos são congruentes porque cada um dos dois ângulos que você coloriu com a mesma cor somado com um mesmo ângulo da outra cor dá um ângulo raso (de 180°). Ângulos da mesma cor chamam-se ângulos opostos pelo vértice. Espera-se que os alunos se lembrem desses resultados.



- e. Considere um determinado ângulo e um de seus adjacentes. Qual a figura formada por esses dois ângulos em conjunto? Como podemos classificar esses dois ângulos?

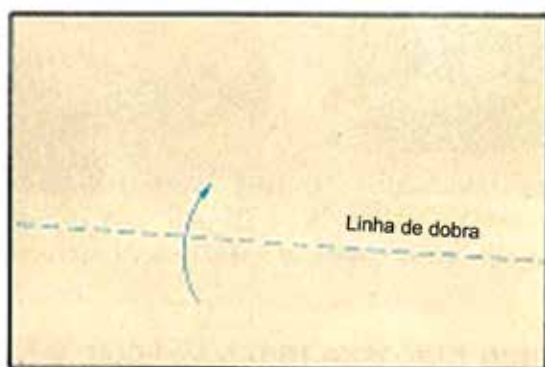
Resposta

A figura formada é um semiplano limitado, portanto por uma reta. Por esse motivo os ângulos são suplementares.



2. Perpendiculares e paralelas.

Pegue outra folha de papel. Dobre-a num sentido diferente do sentido das bordas do papel.



Dobre novamente a folha de forma que o ponto A indicado na figura (final da primeira dobra) fique sobre a primeira dobra. Evite dobrar o papel ao meio, isto é, dobre de forma que divida o papel em pedaços de tamanhos bem diferentes.



Abra o papel, “acenda” essas marcas com 2 canetas de cores distintas, e responda.

- a. O que você pode afirmar sobre ângulos formados pelas marcas?

Resposta

São todos congruentes.



- b. Quantos graus mede cada um desses quatro ângulos?

Resposta

Como são quatro ângulos congruentes cada um deve medir $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.



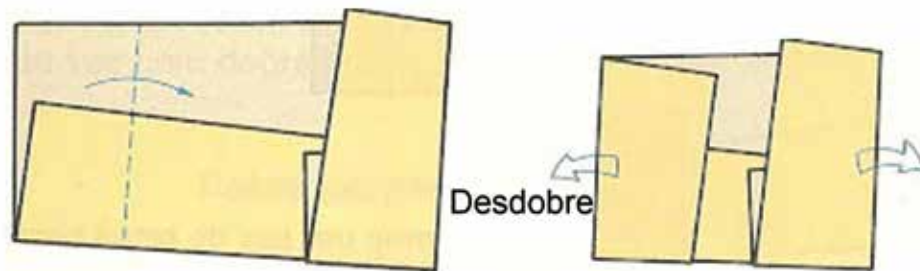
- c. Com base na resposta anterior e imaginando que as marcas representam retas, como podemos chamá-las?

Resposta

Perpendiculares.



- d. Pegue novamente o papel. Dobre-o novamente como você fez no início da atividade. Depois faça uma nova dobra, como a anterior, só que do outro lado do papel. Veja a figura.



Abra o papel, “acenda” essa terceira marca com uma caneta de cor diferente. Qual a posição relativa entre as retas obtidas na primeira e na terceira dobras?

Resposta

Como na dobra 2, as retas são perpendiculares.



- e. Como podemos chamar as retas obtidas na segunda e terceira dobras?

Resposta

As retas são paralelas.



Recursos necessários

- Duas folhas de papel por aluno.
- Régua e três canetas de cores diferentes para cada aluno (as canetas podem ser compartilhadas pela turma).
- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Professor, a atividade deve ser feita simultaneamente com toda a turma, mas cada aluno deve realizar sua própria dobradura e registrar as respostas em seu encarte.



Intervenção Pedagógica

- *Professor, sugerimos que você realize as dobras antecipadamente. Assim, além de ter sua própria experiência, você pode usar seu material como exemplo durante a dinâmica, caso seja necessário.*
- *Para realizar as dobras do primeiro item, pedimos nas orientações que os alunos façam dobras que se cruzem, para evitar que o ponto de interseção entre as retas, definidas pelas marcas, não esteja no papel. Fique atento a essa questão.*

- Ainda no primeiro item pode ocorrer de algum aluno dobrar a folha de tal forma que ele obtenha quatro ângulos retos. Tente orientá-los a fazerem dobras de forma a obterem marcas concorrentes e que não sejam perpendiculares. Se mesmo assim ocorrerem casos dos ângulos serem retos, mostre a esse(s) aluno(s) as dobras dos outros alunos, como exemplos de que nem sempre teremos ângulos retos e que, por isso, o caso de perpendicularismo é particular, mas o caso geral é o de que as retas sejam concorrentes e não necessariamente perpendiculares.
- Para finalizar a atividade você pode relembrar junto aos alunos que duas retas paralelas não coincidentes não têm ponto em comum. Por sua vez, quando duas retas possuem exatamente um ponto comum são chamadas concorrentes. O perpendicularismo é um caso particular em que as retas concorrentes formam ângulos congruentes.



SEGUNDA ETAPA

UM NOVO OLHAR...



ATIVIDADE • TEMOS ALGUM PLANO?

Objetivo

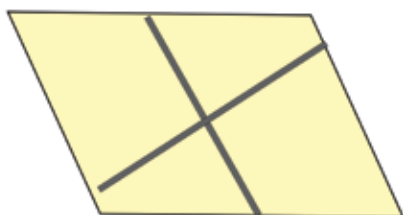
Identificar as posições relativas de retas no espaço.

Descrição da atividade

Professor, nessa etapa, os alunos trabalharão com as posições de retas no espaço com o auxílio de canudos e folhas de papel. Veja a descrição da atividade.

Nessa atividade, utilizaremos folhas de papel para representar planos e canudos para representar retas. Nesse caso, a folha deve ficar rígida como se fosse de madeira e quando o canudo estiver apoiado sobre a folha, consideraremos que a reta representada pelo canudo está contida no plano representado pela folha. Para realizá-la, serão necessárias mais do que duas mãos, por isso, o trabalho deve ser colaborativo!

Seu grupo deve colocar uma folha sobre a mesa e dois canudos sobre a folha de modo que se cruzem, como na figura a seguir.



Agora, discuta com seus colegas e registre as respostas no seu encarte.

1. As retas representadas pelos canudos estão contidas em um mesmo plano?

Resposta

Sim, as retas são coplanares.



2. Erga um dos canudos, mantendo o sentido anterior. Pegue outra folha de papel e veja se é possível fazer com que os dois canudos estejam “sobre” esta folha.

Resposta

Nem sempre é possível. Existem retas que não são coplanares.



3. Posicione uma folha sobre a mesa, una os dois canudos e posicione-os justapostos sobre a folha. Eleve um dos canudos de modo que ele esteja exatamente acima do que continua apoiado na folha, mantendo a sua direção.

Pegue outra folha de papel e veja se é possível posicioná-la de tal maneira que as retas representadas pelos dois canudos estejam contidas no plano representado pela folha.

Podemos afirmar que as retas representadas por esses canudos são paralelas? Justifique sua resposta.

Resposta

É possível posicionar a outra folha de forma que os dois canudos fiquem apoiados nela, logo as retas são coplanares.

As retas representadas pelos canudos são paralelas, pois existe um plano que as contém e elas não se cruzam.



4. Posicione uma folha sobre a mesa, una os dois canudos e posicione-os justapostos sobre a folha. Eleve um dos canudos de modo que ele esteja exatamente acima do que continua apoiado na folha, mantendo a sua direção.

Gire o canudo que está no ar paralelamente à folha que está apoiada sobre a mesa.

E agora? Podemos afirmar que as retas representadas pelos canudos são paralelas?

Se necessário, utilize outra folha para verificar se nessa posição os canudos são coplanares.

Verifique com seu professor se existe uma definição para retas posicionadas dessa maneira.

Resposta

As retas representadas pelos canudos não são paralelas. Apesar de elas não se cruzarem, não é possível posicionar uma folha de forma que os dois canudos fiquem apoiados nela. Repare que as retas não pertencem a um mesmo plano, ou seja, são não-coplanares.

Nesse caso, as retas são ditas reversas.



Recursos necessários

- Pelo menos duas folhas de papel para cada grupo.
- Pelo menos dois canudos para cada grupo.
- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Professor, organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos. Evite grupos muito grandes para que todos no grupo possam participar da atividade.

Distribua folhas e canudos para os grupos.



Intervenção Pedagógica

- *Professor, é sempre bom relembrar que retas e planos são infinitos e a utilização de folhas de papel e canudos é apenas uma maneira de manipulá-los. Os canudos têm volume, o que faz com que fiquem elevados quando sobrepostos, e essa é uma sutileza que deve ser mencionada para turma. Da mesma forma que convenciamos que um canudo sobre a folha representa uma reta contida no plano, devemos também convencionar que um canudo sobreposto a outro representa*

duas retas concorrentes – nesse caso, não estamos considerando retas coincidentes.

- *No item 1, aproveite para relembrar o termo coplanar. É nesse momento que os alunos devem compreender que duas retas concorrentes são coplanares.*
- *No item 2, explore com os alunos as diversas maneiras que eles ergueram o canudo. Nesse momento, você pode relembrar (ou até mesmo introduzir) a definição de retas reversas, ou seja, retas que não pertencem a um plano comum.*
- *Para o item 3, é importante que você esteja atento à maneira que os alunos elevarão o canudo, isso deve ser feito de forma a obter a representação de duas retas paralelas; a sua intervenção nesse momento é fundamental, mostrando para os alunos como deve ser o movimento de elevação. Repare ainda que ao verificarem se as retas são paralelas, os alunos são orientados a verificar a existência de um plano que as contém, ou seja, se são coplanares. É importante que fique claro que retas paralelas e coplanares não são sinônimos, na verdade, ser coplanar é uma condição necessária para que retas que não se cruzem sejam paralelas.*
- *No item 4, mais uma vez você deve orientar a turma sobre o movimento que deve ser feito: os alunos devem imaginar que as retas estejam contidas em dois planos paralelos, e o giro deve ser realizado na reta contida no plano que está no ar. Repare que esse é um detalhe relacionado a um conteúdo que não foi trabalhado nessa dinâmica: paralelismo entre planos e, por esse motivo, evitamos escrever isso para os alunos, mas você pode (e deve!) destacar esse aspecto com a turma.*
- *É muito comum a associação feita entre retas paralelas e retas que não se cruzam, o que é verdade no plano mas não é verdade no espaço. Tal fato deve ser destacado e esse é um momento propício para isso.*
- *Professor, nessa etapa trabalhamos com retas coplanares e não coplanares, vale destacar que no espaço existem três posições relativas de retas: reversas, quando não são coplanares; concorrentes ou paralelas, quando são coplanares e se cruzam ou não, respectivamente. Vale enfatizar também que no estudo da geometria plana, dadas duas retas, elas são concorrentes ou paralelas. Isso é preservado no espaço, uma vez que retas coplanares, ou são concorrentes ou são paralelas.*



TERCEIRA ETAPA

FIQUE POR DENTRO!



ATIVIDADE • DE OLHO NA CAIXA!

Objetivo

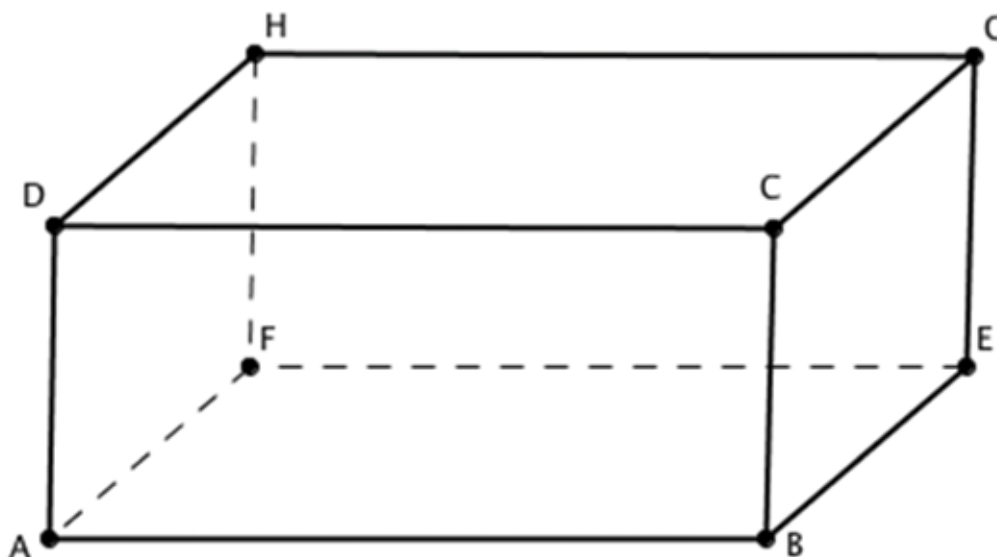
Identificar as posições relativas de retas e planos no espaço.

Descrição da atividade

Professor, nessa etapa, vamos identificar as posições de retas e planos por meio da manipulação de um bloco retangular. Observe a descrição da atividade.

Vamos utilizar a caixa para classificar a posição relativa de duas retas ou dois planos no espaço.

Para isso, nomeie os vértices da caixa distribuída pelo seu professor como na figura abaixo.



Observando sua caixa, note que o segmento AB está contido numa reta, o mesmo acontece para todos os outros segmentos. Nessa atividade, todas as conclusões que chegarmos para os segmentos também serão válidas para as retas correspondentes.

Além disso, a face ABCD está contida em um plano, bem como todas as outras faces desse paralelepípedo têm um plano correspondente. Assim, as conclusões com respeito às faces podem ser estendidas para os planos.

1. Observe que o segmento AB é paralelo ao segmento EF. Indique outros dois segmentos que também são paralelos ao segmento AB.

Resposta

Os segmentos CD e HG .



2. Veja que a face $ABEF$ é paralela à face $CDHG$. Indique uma face paralela à face $BCGE$.

Resposta

A face $ADHF$.



3. O segmento HF é perpendicular ao segmento AF . Indique outros dois segmentos, ou mais, perpendiculares ao segmento HF .

Resposta

Os segmentos HD , HG também são perpendiculares ao segmento HF .

FB também é perpendicular ao segmento HF . Em geral, qualquer segmento (ou reta) do plano $ABEF$ passando por F ou qualquer segmento (ou reta) do plano $CDHG$ passando por H é perpendicular ao segmento (ou reta) FH .



4. Os segmentos AD e EF são reversos. Indique outros três segmentos reversos a AD .

Resposta

HG , CG e BE .



Recursos necessários:

- Bloco retangular
- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *É importante que você distribua um bloco retangular para cada grupo. Para montá-los, utilize o modelo em anexo ou se preferir traga caixas em forma de paralelepípedo para a sala.*



Intervenção Pedagógica

- *Professor, repare que optamos por utilizar a caixa, pois é importante que os alunos possam manipular um objeto físico para obter o significado matemático dos conceitos trabalhados. Esteja atento para que os alunos manipulem a caixa e não fiquem apenas observando o desenho em perspectiva do encarte.*
- *No item 1, exploramos novamente o paralelismo entre retas em posições diferentes das trabalhadas na etapa 2. É interessante que você articule o que foi feito anteriormente, com os canudos, com esse estudo das arestas do paralelepípedo.*
- *No caso das retas reversas, os alunos podem ter dificuldade para entender, nesse caso, sugerimos a utilização dos canudos para destacar as arestas em questão. Uma ideia para concluir esse estudo é pedir que os alunos posicionem os canudos de tal forma que representem retas reversas.*
- *Ao final da atividade pode ser interessante que você faça um fechamento, observando que retas coplanares podem ser paralelas (distintas ou não) ou concorrentes e que retas não coplanares só podem ser reversas. O termo perpendicular é utilizado apenas quando as retas estão em um mesmo plano, caso contrário, o termo é ortogonal. Assim, duas retas perpendiculares são ortogonais, mas duas retas ortogonais podem não ser perpendiculares. O conceito de ortogonalidade envolve as noções de ângulo no espaço e de projeção. Se o seu grupo permitir, não deixe de promover essa discussão.*

- Retas reversas dizem-se ortogonais quando uma delas é perpendicular a uma paralela à outra. Por exemplo, as arestas AD e EF são ortogonais porque AD é perpendicular a AB (paralela a EF).

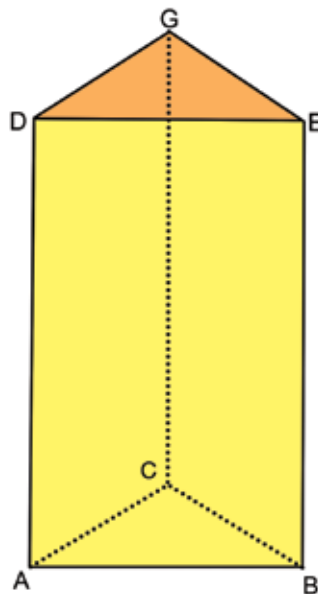


QUARTA ETAPA

Quiz



Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial.



Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio, percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice

- A
- B
- C
- D
- E



ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

Resposta

A formiga partiu do vértice G e percorreu a aresta CG , chegando ao ponto C . Em seguida, percorreu a diagonal CD e por fim a aresta DE . Assim, sua posição final foi o ponto E .

Resposta: Letra (e).

Distratores:

O aluno que encontrou a alternativa (a) provavelmente confundiu o conceito de retas reversas com o de retas paralelas, assim, após atingir o ponto D , desceu a aresta AD , chegando ao vértice A .

O aluno que optou pela alternativa (b), possivelmente, traçou equivocadamente a diagonal do polígono $CBEG$ e ainda confundiu o conceito de retas reversas com o de retas paralelas, assim, após atingir o ponto E , desceu a aresta BE , chegando ao vértice B .

Uma possibilidade para encontrar a alternativa (c) é que o aluno tenha cometido três erros. Primeiro, confundiu o conceito de perpendicular com paralelismo percorrendo o segmento GD . Depois traçou a diagonal do polígono $ABDE$ atingindo o ponto B . Por fim, confundiu o conceito de reversa com concorrente percorrendo o segmento BC e atingindo o vértice C .

O aluno que assinalou a alternativa (d) pode ter identificado equivocadamente a diagonal do polígono como CE . Depois caminhou corretamente o segmento reverso DE e atingiu o vértice D .



ETAPA FLEX

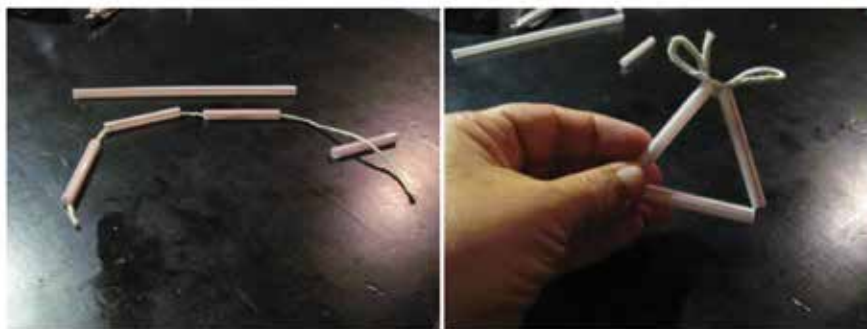
PARA SABER +

A RIGIDEZ DO TRIÂNGULO E A CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS COM CANUDOS

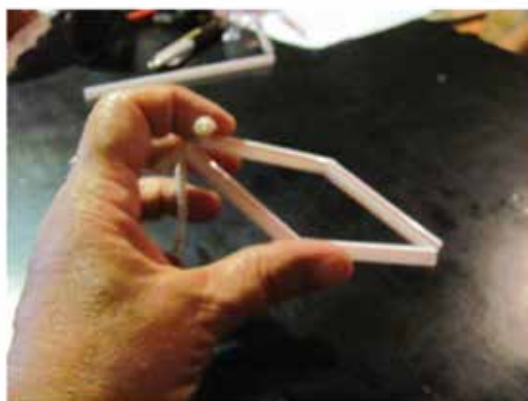
Visualizar sólidos geométricos através de desenhos é muito difícil para qualquer um. Caso você queira exercitar sua habilidade com a visualização, você pode construir alguns sólidos geométricos com canudos. A construção de poliedros com canudos faz com que possamos ver um poliedro com outros olhos.

Mas antes disso, você já parou pra pensar que o triângulo é uma figura rígida e o quadrado não? Por quê?

Se com três canudos e linha construirmos um triângulo, observamos que se fizermos uma pressão nos seus lados, a figura não se deforma, portanto ela é rígida. Faça essa experiência: passe um pedaço de linha por 3 pedaços de canudo e feche a estrutura formando um triângulo.



Por outro lado, se tentarmos construir com quatro canudos um polígono e fizermos pressão em qualquer dos seus lados, ele se deformará, o que significa que o quadrilátero não é rígido. Faça essa experiência também, construindo um quadrilátero e comprovando o que foi dito movimentando seus lados.



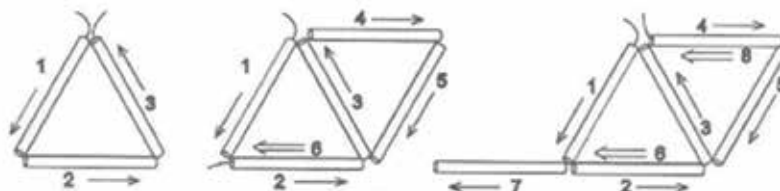
Isso explica, por exemplo, porque em uma porteira há uma barra diagonal.



Aproveitando a rigidez da estrutura triangular é possível construir sólidos com canudos e linhas para visualizar e estudar essas figuras. A seguir você encontra como construir o tetraedro e o cubo.

O TETRAEDRO

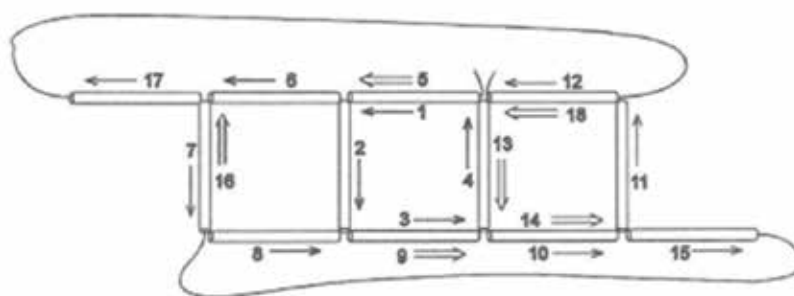
Corte 6 pedaços de canudos de mesmo tamanho. Passe a linha por três pedaços, formando um triângulo, e feche com um nó, mas não corte a linha. Depois passe a linha por mais dois pedaços de canudos, formando outro triângulo com um dos lados do primeiro triângulo. Passe a linha por este lado do triângulo e pelo canudo restante. Feche a estrutura com outro nó.



O CUBO

Serão necessários 12 pedaços de canudo de mesmo tamanho.

Comece passando o fio de linha por quatro canudos. Passe-o novamente pelo primeiro canudo para formar a primeira face do cubo. Depois construa mais um quadrado considerando um dos lados do quadrado e passe a linha por mais três canudos. Passe a linha novamente num dos lados do primeiro quadrado e por mais três canudos, formando outro quadrado. Por fim, passe a linha na face do primeiro quadrado e na face do quadrado formado e agora passe a linha pelos dois canudos restantes de modo a fechar o cubo.



Como a estrutura não possui triângulos, ela fica flexível.

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011919.pdf>

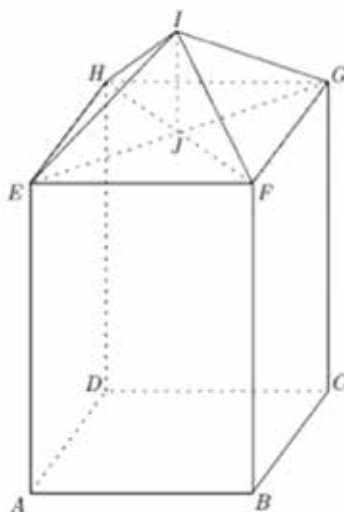
ETAPA FLEX

AGORA, É COM VOCÊ!

Bruna produziu uma caixa de presentes como indicado na figura.



Veja o modelo geométrico dessa caixa.



Nele a figura ABCDEFGH é um paralelepípedo e EFGHI é uma pirâmide reta de base quadrangular.

Nos itens a seguir, referimo-nos às retas determinadas pelos segmentos e aos planos determinados pelas faces.

1. Analisando o modelo geométrico da caixa, diga se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Caso a afirmação seja falsa, reescreva-a de modo que ela se torne verdadeira.
 - a. Existe uma reta paralela à reta BC. (V)
 - b. A reta IJ é paralela ao plano ABCD. (F)

Resposta

A reta IJ é concorrente (ou perpendicular) ao plano $ABCD$.

• • • • •

c. As retas AB e FH são concorrentes. (F)

Resposta

As retas AB e FH são reversas.

• • • • •

d. As retas BC e EG são reversas. (V)

e. As retas AD e FG são paralelas. (V)

f. Os planos EHI e $BCGF$ são paralelos. (F)

Resposta

Os planos EHI e $BCGF$ são secantes.

• • • • •

2. Considere o plano $ABFE$.

a. Qual é a posição da reta HG em relação a esse plano?

Resposta

A reta HG é paralela ao plano.

• • • • •

b. Qual é a posição da reta HF em relação a esse plano?

Resposta

A reta HF é secante ao plano.



c. Dê um exemplo de uma reta que pertença a este plano.

Resposta

Temos seis respostas possíveis na figura. As retas AB, AE, AF, BF, BE ou FE.

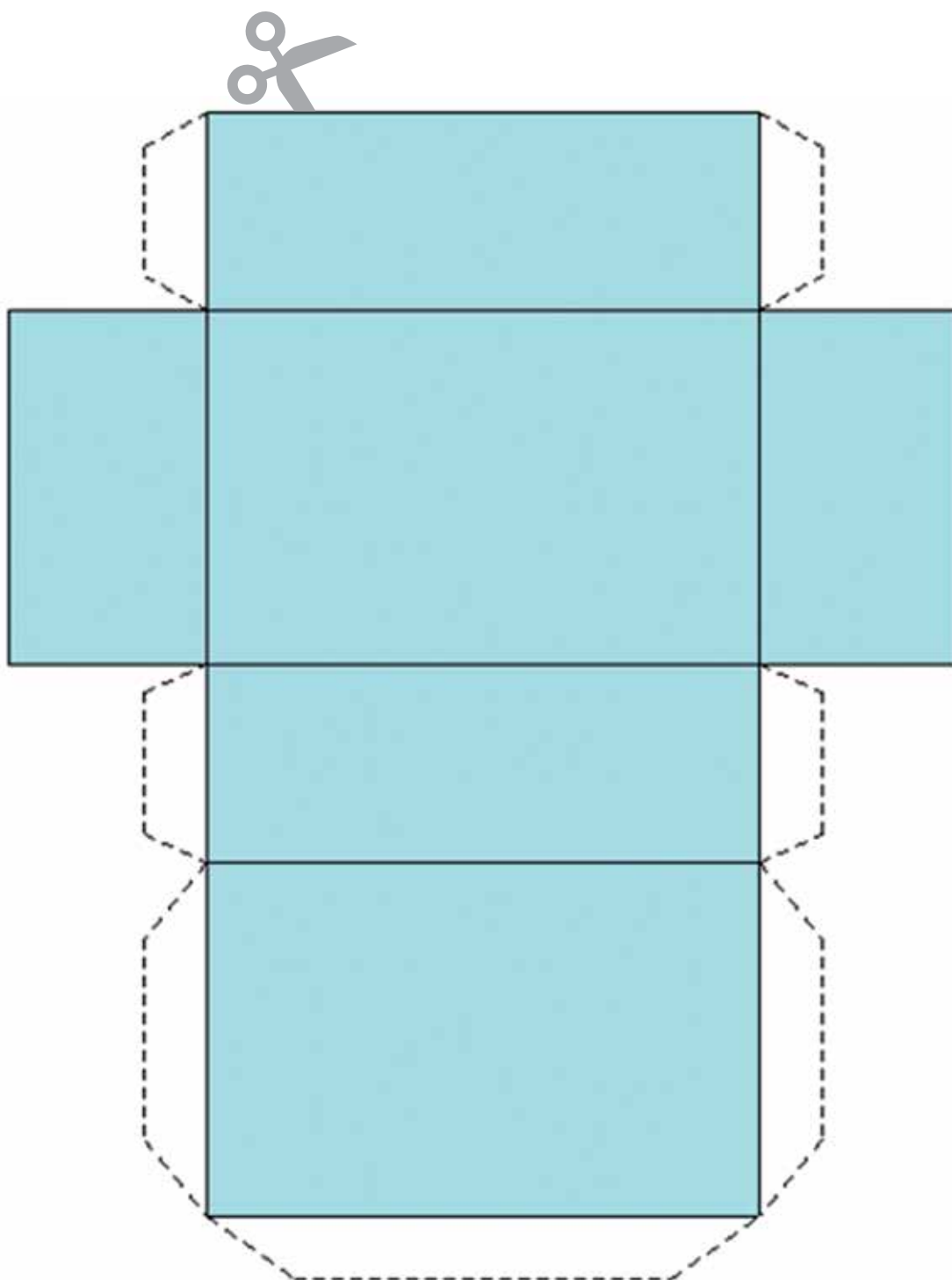


d. Dê um exemplo de um plano paralelo a este plano.

Resposta

O plano DCGH.





Anexo 1

