Reforço escolar · Matemática ·

Discutindo a Relação

Dinâmica 7

2ª Série | 1º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	2ª do Ensino Médio	Geométrico	Introdução à Geometria Espacial.

DINÂMICA	Discutindo a Relação
HABILIDADE BÁSICA	H06 - Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e/ou pelos tipos de ângulos.
HABILIDADE PRINCIPAL	H08 - Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler).

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Ligando os Pontos	20 a 25 min	Em grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar...	Contando Arestas	15 a 25 min	Em grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Chegando na Relação	20 a 25 min	Em grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	15 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	10 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro professor,

No ensino da Geometria é importante que os alunos realizem atividades que promovam a visualização e a manipulação dos objetos matemáticos estudados. Na etapa 1, propomos uma revisão de quadriláteros a partir de sua construção e visualização em uma malha quadrangular e posterior categorização. Já nas etapas 2 e 3, os alunos devem manipular alguns poliedros, montados por eles mesmos, para relacionar arestas e vértices, e para estudar a Relação de Euler. Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

25 MINUTOS

Atividade • Ligando os pontos.

Objetivo

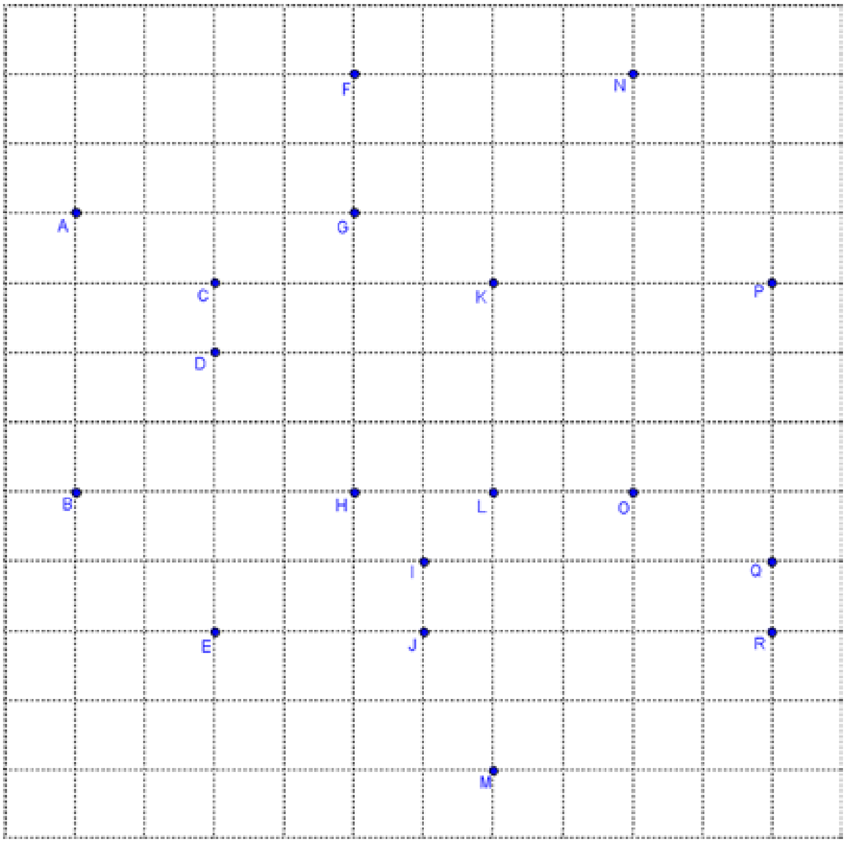
Identificar os principais quadriláteros.

Descrição da atividade

Professor, esta etapa foi elaborada para que os alunos recordem-se dos principais quadriláteros e das propriedades que os caracterizam. Para tal, no primeiro item os alunos devem procurar alguns quadriláteros em uma malha quadrangular e no item 2, precisam identificar os quadriláteros de acordo com as propriedades apresentadas. Veja a proposta a seguir.

1. Ligando os pontos.

Na malha quadriculada a seguir temos vários pontos indicados.



Com os vértices nos pontos indicados, encontre:

a. Um quadrado

b. Um trapézio

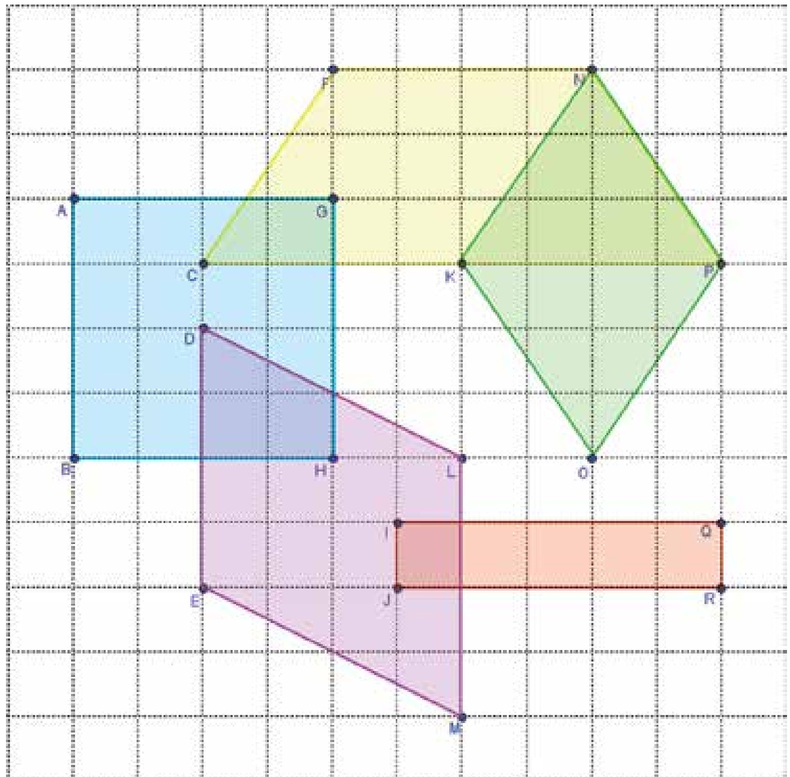
c. Um losango

d. Um retângulo (que não seja quadrado)

e. Um paralelogramo (que não seja retângulo nem losango)

Resposta

Apresentamos uma solução possível, mas existem outras.



Professor

2. Quem sou eu?

Em cada frase a seguir, complete com os nomes dos quadriláteros. Você deve usar cada nome uma única vez.

quadrado	losango
retângulo	trapézio
paralelogramo	quadrilátero qualquer

a. Meus dois pares de lados opostos são paralelos. Eu me chamo ____________ ______________________.

Resposta

paralelogramo.

b. Tenho um par de lados paralelos, mas meu outro par não é. Sou um _______ ________________________________.

Resposta

trapézio.

• • • • •

c. As pessoas chamam-me de diferente. Só porque meus 4 lados podem ter medidas diferentes. Também posso não apresentar paralelismo. Sou um, ____________________ ___________________________________ mas tenho muita personalidade!

Resposta

quadrilátero qualquer

• • • • •

d. Tudo em mim é congruente, tanto meus 4 lados, quanto meus ângulos. Certamente, sou um _______________________________________.

Resposta

quadrado.

• • • • •

e. Tenho os 4 lados congruentes e, além disso, minhas diagonais são perpendiculares. Meu nome é _______________________________________.

Resposta

losango.

• • • • •

f. Sou uma forma muito encontrada nos terrenos. Meus ângulos são todos congruentes e meus 2 pares de lados paralelos também são congruentes. Ah, eu sou um ________________________________.

Resposta

retângulo!

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Professor, organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.

Intervenção Pedagógica

- *Professor, nessa etapa, enquanto realizam a ação de procurar os quadriláteros indicados no item 1, os alunos vão se remeter a algumas características desses polígonos, para então, identificá-las no item 2. Assim, uma maneira de auxiliar os alunos, caso sintam dificuldade no item 2, é utilizar os quadriláteros encontrados no item 1 para que relembrem essas propriedades.*

- *É muito importante que os alunos notem que os quadrados, losangos e retângulos possuem lados opostos paralelos e que, portanto, são paralelogramos. Retângulos são paralelogramos com todos os ângulos congruentes, losangos são paralelogramos com todos os lados congruentes e quadrados são paralelogramos que possuem essas duas características, ao mesmo tempo. Por isso, vale ressaltar que no item 2, o que garante que as frases sejam preenchidas de maneira única é o comando do enunciado (Você deve usar cada nome uma única vez), sem o qual, o item (a) poderia ter sido preenchido também com as palavras quadrado, retângulo ou losango e os itens (e) e (f) com a palavra quadrado.*

Segunda Etapa
Um novo olhar ...

25 MINUTOS

Atividade • Contando Arestas.

Objetivo

Relacionar arestas com vértices e faces.

Descrição da Atividade

Na dinâmica 6, os alunos montaram os poliedros A, B, C, F, G, H e J e pedimos para que você, professor, guardasse esses sólidos. Nesta etapa, os alunos devem utilizá-los e a partir da sua observação, eles terão a oportunidade de manipulá-los para perceberem a relação entre os vértices e as arestas. Veja a proposta a seguir.

Seu grupo recebeu os poliedros montados na dinâmica 6.

1. Separe-os em dois grupos, sendo um de prismas e o outro de pirâmides, como foi feito na dinâmica anterior.

Resposta

Grupo dos prismas: A e C.

Grupo das pirâmides: B, F, G, H, e J.

• • • • •

2. Observe os vértices dos prismas e conte quantas arestas incidem em cada um deles. Você repara algo em comum?

Resposta

Nos prismas, em cada vértice, incidem sempre 3 arestas.

• • • • •

3. Agora, observe o conjunto de pirâmides e classifique-as de acordo com a sua base. Em seguida, conte a quantidade de arestas que incidem no vértice de cada pirâmide. Chama-se de "vértice da pirâmide" o único dos seus vértices que não pertence à base.

Resposta

PIRÂMIDE	*POLÍGONO DA BASE*	*QUANTIDADE DE ARESTAS INCIDINDO NO VÉRTICE DA PIRÂMIDE*
B	*Quadrado*	*4*
F	*Quadrado*	*4*
G	*Triângulo*	*3*
H	*Pentágono*	*5*
J	*Quadrado*	*4*

4. Observando a tabela, você percebe alguma relação entre o polígono da base e a quantidade de arestas incidindo no vértice? Troque ideias com seus colegas e cheguem a uma conclusão.

Resposta

A quantidade de arestas, incidindo no vértice de uma pirâmide, é sempre igual à quantidade de lados/vértices do polígono da base.

Recursos Necessários

- Encarte do aluno
- Poliedros construídos na dinâmica anterior

Procedimentos Operacionais

- *Continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *Distribua para cada grupo, um conjunto com os poliedros montados na dinâmica 6. Caso, seja necessário, monte os sólidos previamente.*

- *Professor, é importante que antes de começarem a responder às questões, você se certifique de que os alunos compreendem o que é uma aresta e o que é um vértice. Para tal, você pode, por exemplo, pedir que os alunos indiquem no próprio sólido cada um desses elementos. Os alunos devem perceber a mudança de nomenclatura, por exemplo, quando nos referimos ao "lado de um triângulo" e à "aresta de uma pirâmide".*
- *No item 1, você deve retomar o estudo feito na dinâmica 6, relembrando as características dos prismas e das pirâmides, para que os grupos sejam formados.*
- *No item 2, caso os alunos tenham dificuldade em entender o que deve ser feito, você pode usar um dos prismas para contar as arestas que incidem em um vértice juntamente com a turma como exemplo. Uma pergunta que pode ser feita durante a discussão do item 2 é a seguinte: em um prisma qualquer a quantidade de arestas que incide em um mesmo vértice é sempre a mesma? Quando esperamos que os alunos percebam que a quantidade é sempre 3.*
- *No item 3, caso seja necessário, reveja o conceito de base da pirâmide com os alunos. Você pode aproveitar para mostrar aos alunos que as demais faces são triangulares.*
- *Ainda no item 3, esteja atento para o fato de estarmos indicando por vértice, o vértice da pirâmide; os alunos podem não saber essa nomenclatura, nesse caso, apresente-a.*
- *No item 4, caso os alunos tenham dificuldade em perceber essa relação, peça que eles indiquem a quantidade de vértices do polígono da base das pirâmides e, em seguida, peça que eles comparem com a quantidade de arestas incidindo no vértice da pirâmide com esse valor.*

• • • • •

Terceira Etapa
Fique por dentro!

25 MINUTOS

Atividade • Chegando na Relação.

Objetivo

Identificar a Relação de Euler por meio da observação dos elementos de alguns poliedros.

Descrição da atividade

Professor, o objetivo dessa etapa é que os alunos percebam a relação de Euler. Para tal, devem realizar uma investigação do número de vértices, faces e arestas a partir da manipulação dos sólidos montados na dinâmica 6. Veja a proposta a seguir.

Nesta etapa, seu grupo deve continuar com os poliedros utilizados na etapa anterior.

1. Observando os poliedros, preencha a tabela.

Resposta

Poliedro	Quantidade de Vértices V	Quantidade de Faces F	Quantidade de Arestas A
A	8	6	12
B	5	5	8
C	6	5	9
F	5	5	8
G	4	4	6
H	6	6	10
J	5	5	8

2. Agora, com os valores obtidos no item anterior, preencha a tabela a seguir.

Resposta

POLIEDRO	V+F	A+2
A	14	14
B	10	10
C	11	11
F	10	10
G	8	8
H	12	12
J	10	10

Professor

3. O que você observa? Troque ideias com seus colegas.

Resposta

Os valores das duas colunas são iguais para cada poliedro.

• • • • •

4. Escreva uma fórmula matemática que represente a relação percebida no item anterior.

Resposta

$V + F = A + 2$

• • • • •

A relação obtida no item anterior é chamada de ***Relação de Euler***. Os poliedros que satisfazem a essa relação são chamados eulerianos. Para saber um pouco mais sobre o assunto, leia o Para Saber +.

Recursos Necessários

- Encarte do aluno
- Poliedros montados na dinâmica 6 e utilizados na etapa 2 desta dinâmica

Procedimentos Operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada como na etapa anterior.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, os alunos não devem ter dificuldade em preencher as tabelas, contudo esteja atento para que eles contem corretamente. Incentive que eles manipulem os poliedros, pois isso é muito importante para que o preenchimento da tabela não seja apenas mecânico, mas esteja relacionado ao que ele, de fato, observou no sólido.*

- *Os alunos não devem ter dificuldade em perceber a relação de igualdade entre as colunas V + F e A + 2 na tabela do item 2. É interessante que você promova na turma uma discussão sobre a validade dessa fórmula em outros poliedros. Se possível, leve outros sólidos para que a turma possa manipular e perceber se a relação também é válida.*
- *No Para Saber +, apresentamos um pequeno texto sobre sólidos não eulerianos, no qual os alunos podem saber um pouco mais sobre a validade da Relação de Euler. Não deixe de incentivar os alunos a aprofundarem mais o seu conhecimento!*

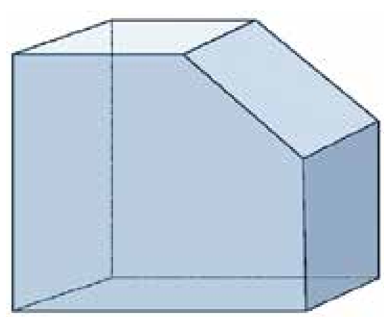
Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

Questão • Saerjinho 2011
Questão 24 do caderno C1201.

Observe o desenho de um sólido geométrico obtido após ser efetuado um corte em um paralelepípedo. A alternativa que indica o número de vértices “V”, de faces “F” e de arestas “A” desse sólido é:



a. V = 4, F = 9 e A = 12

b. V = 9, F = 4 e A = 12

c. V = 10, F = 7 e A = 15

d. V = 10, F = 15 e A = 7

e. V = 15, F = 7 e A = 10

Professor

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

Utilizando a imagem do poliedro, podemos contar o número de faces, vértices e arestas. Podemos, ainda, utilizar a relação de Euler e determinar as quantidades de vértices e faces, ou de vértices e arestas, ou ainda de faces e arestas para determinar a terceira quantidade. Por exemplo, se $V = 10$, $F = 7$ e $V + F = A + 2$, então $10 + 7 = A + 2$, o que nos permite concluir que $A = 15$.

Resposta: Letra (c).

Distratores

É possível que os alunos que tenham assinalado a letra (a) tenham identificado apenas os vértices da face da frente, não tenham reconhecido a base como face e, além disso, tenham considerado apenas as arestas aparentes.

A alternativa (b) pode ser encontrada quando o aluno considera apenas os vértices, faces e arestas que aparecem na vista frontal.

Os alunos que assinalaram as letras (d) e (e), provavelmente compreendem os elementos de forma trocada, na letra (d) pensam que as arestas são as faces e na letra (e), que são os vértices.

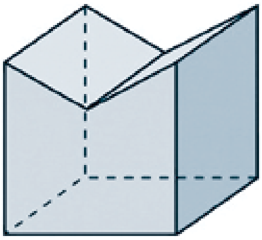
• • • • •

Etapa Flex
Para saber +

Poliedro convexo: o que é isso???

Pegue um dos poliedros utilizados nessa dinâmica e apoie qualquer uma de suas faces sobre uma régua, equilibrando a figura. Observe que o restante do poliedro ficará totalmente acima da régua. Faça o mesmo para todas as outras faces. Você deve ter notado que, uma vez apoiado sobre cada uma de suas faces, todas as outras ficaram acima da régua. Essa é a característica dos poliedros convexos.

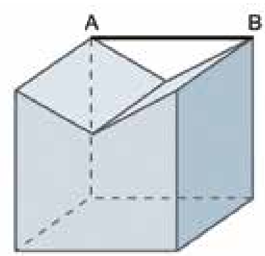
Agora, observe a figura a seguir:



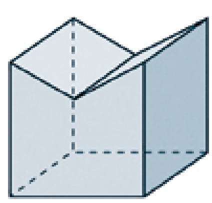
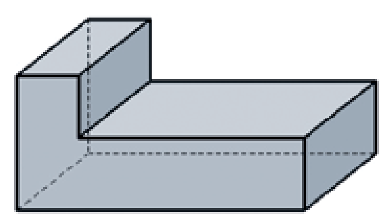
Você acha que é possível fazer o mesmo com essa figura? Não, certo? Afinal, se posicionarmos a régua numa das faces superiores, uma parte desse sólido ficará em lado diferente do restante em relação à régua.

Essa característica dos poliedros convexos também pode ser entendida da seguinte maneira. Quando o segmento de reta que ligar dois pontos quaisquer do poliedro estiver totalmente contido no poliedro, ele é convexo.

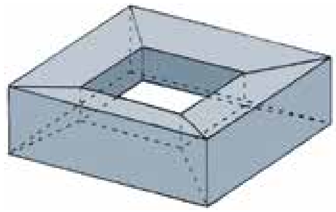
Repare que se unirmos os vértices A e B, indicados na imagem a seguir, o segmento que une esses dois pontos não estará contido no poliedro. Podemos, então, afirmar que este poliedro não é convexo.



A relação de Euler, vista na terceira etapa desta dinâmica, é válida para qualquer poliedro convexo. É importante destacar, no entanto, que existem poliedros não-convexos que também satisfazem tal relação. Observe:

Poliedro A	Poliedro B
	
$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}V=10\\F=7\end{matrix}\right\}\to V+F=17\\ A=15\}\to A+2=17\end{matrix}\right\}\to \mathrm{V+F=A+2}$	$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}12\\ \ \end{matrix}\right\}\to V+F=20\\ A=18\}\to \quad +2=20\end{matrix}\right\}\to \mathrm{V+F=A+2}$

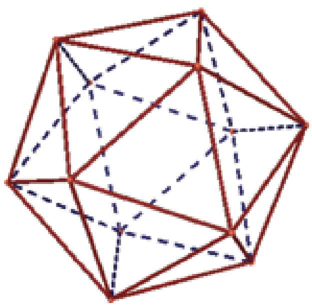
Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos. Veja a seguir um exemplo de poliedro que não é euleriano.

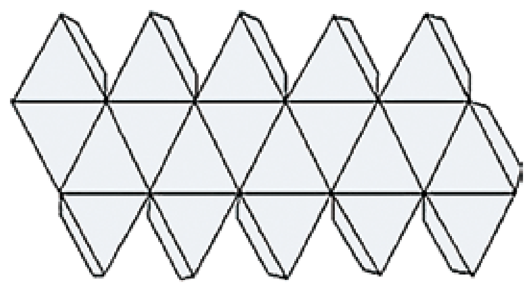
Poliedro C 	$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}V=16\\F=16\end{array}\right\}\rightarrow V+F=32\\ \mathrm{A}=32\}\rightarrow A+2=34\end{array}\right\}\rightarrow \mathrm{V}+\mathrm{F}\neq \mathrm{A}+2$

Etapa Flex

Agora, é com você!

Observando o icosaedro e a sua planificação, indique o número de vértices.





a. 12

b. 14

c. 16

d. 20

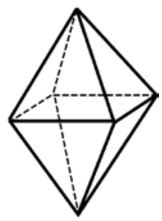
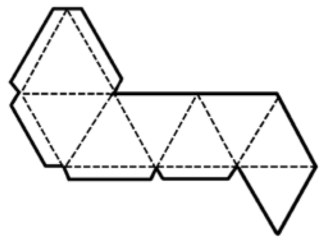
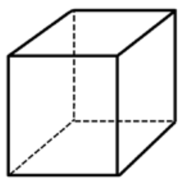
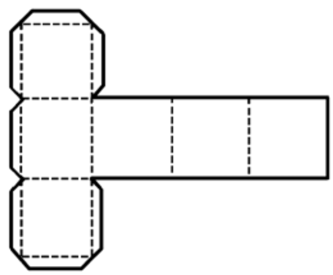
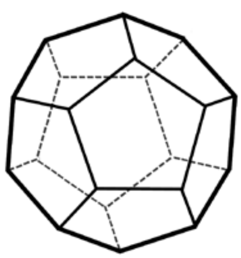
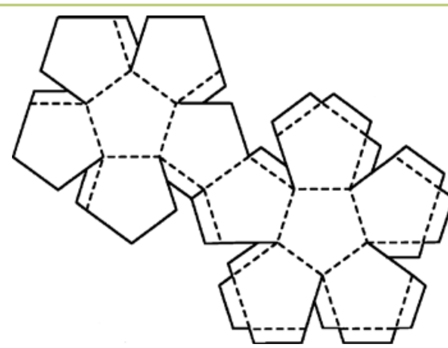
e. 30

Resposta

Resposta: letra (a).

• • • • •

2. Na tabela a seguir temos 3 colunas, a primeira refere-se ao poliedro, a segunda, à sua planificação e a terceira, ao número de vértices, faces e arestas. Complete as lacunas vazias.

Poliedro	Planificação	Número de vértices, faces e arestas.
 *Octaedro*		*V = 6* *F = 8* *A = 12*
 Cubo ou hexaedro		*V = 8* *F = 6* *A = 12*
 Dodecaedro		*V = 20* *F = 12* *A = 30*