Reforço escolar · Matemática ·

A decisão é sua

Dinâmica 4

3ª Série | 1º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Numérico Aritmético	Análise Combinatória

DINÂMICA	A decisão é sua
HABILIDADE BÁSICA	H51 – Resolver problemas com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, **multiplicação**, divisão).
HABILIDADE PRINCIPAL	H60 – Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinações simples.
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Dividindo uma Pizza	de 10 a 15 min.	Em grupos de 4 alunos.	Individual
2	Um novo olhar...	A sobremesa é de chocolate.	de 20 a 25 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
3	Fique por dentro!	Tudo acaba em Pizza?	de 25 a 35 min.	Nos mesmos grupos.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

Nos problemas de contagem de agrupamentos, existem situações em que a ordem dos elementos precisa ser levada em conta e outras em que, modificada esta ordem, o tipo de agrupamento permanece o mesmo. Esta dinâmica apresenta situações em que a ordem dos elementos precisa ser levada em conta e situações em que a mudança de ordem dos elementos não cria outro agrupamento. Sendo introdutória no assunto, o que é apresentado aqui foge do uso de nomenclatura técnica e de fórmulas, restringindo-se a abrir caminho para introdução dessa nomenclatura e apresentação e demonstração das fórmulas de arranjos e combinações. A revisão de tópicos de séries anteriores que ainda apresentam dificuldades para os nossos estudantes prossegue com atividades que motivam e reapresentam a multiplicação de frações.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

15 MINUTOS

Atividade • Dividindo uma pizza.

Objetivo

Relacionar a divisão por um número inteiro com a multiplicação por uma fração.

Descrição da atividade

Esta atividade é proposta para mostrar aos alunos que uma divisão por um número inteiro pode ser substituída pela multiplicação por uma fração. Os alunos irão resolver o problema da divisão de uma pizza deixada pela mãe para seus quatro filhos.

Questão

Certa mãe saiu de casa e deixou uma pizza assada no forno para seus quatro filhos fazerem o lanche da tarde. Deixou um recado que dizia: “Filhos, deixei uma pizza cortada em partes iguais, um pedaço para cada um de vocês. Beijos, Mamãe”.

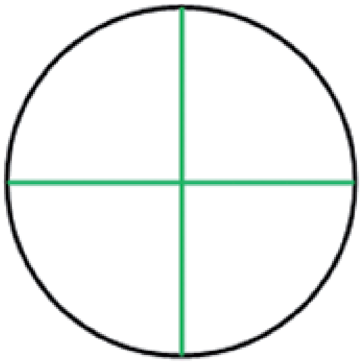
Porém, cada um de seus filhos chegou a casa trazendo um amigo. Quando viram o recado que ela deixara, imediatamente pensaram: “*Agora temos que comer apenas a metade do que foi deixado para cada um, pois nossos amigos também irão lanchar conosco e só temos esta pizza*”.

Vamos acompanhar o que fizeram os 4 garotos?

Para responder às questões a seguir, vocês podem usar os círculos que representam a pizza deixada pela mãe, ao sair.

1. Qual a fração da pizza que representa o pedaço que os filhos iriam comer, sem a presença dos amigos?

Resposta

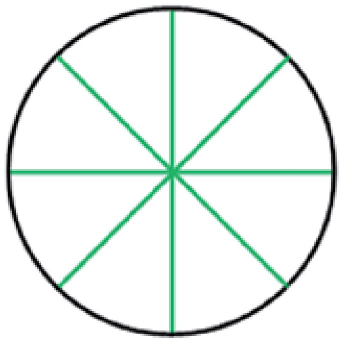


Cada um iria comer $\frac{1}{4}$ da pizza.

2. Todos os amigos aceitaram um pedaço dessa pizza e cada um dos filhos dividiu igualmente seu pedaço com o amigo. Qual a fração da pizza que representa o que cada um deles comeu?

Matemática

Resposta



Cada um deles comeu $\frac{1}{8}$ da pizza.

• • • • •

3. O filho mais novo comentou com seus irmãos que, como ele dera metade do pedaço dele ao amigo, tinha chegado a este resultado multiplicando a fração que lhe cabia por $\frac{1}{2}$. Já o filho mais velho disse que chegou a esse resultado dividindo por 2 o pedaço que a mãe deixou para ele, pois foi isso que ele fez com o amigo, dividiu por 2. Quais as operações que cada um deles realizou? Qual dos filhos está certo?

Resposta

Professor, espera-se que os estudantes percebam que o filho mais novo fez uma multiplicação de frações (calculando o numerador como produto dos numeradores e o denominador como produto dos denominadores):

$$\frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

O irmão mais velho, porém, usou a propriedade que diz que dividir por um número (diferente de zero), é o mesmo que multiplicar por seu inverso. Como o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$, chegou à mesma operação e ao mesmo resultado:

$$\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Ambos os irmãos estão certos.

• • • • •

Professor

Recursos necessários

- Encarte do aluno.
- Régua e transferidor ou esquadro de 45^0 (não tão necessários, pois os traços podem ser aproximados).

Procedimentos Operacionais

- *Professor, antes de lançar a questão à turma, será interessante formar os grupos, se possível, com 4 alunos cada.*
- *É importante que a discussão das questões seja feita no grupo, mas que cada aluno faça as anotações e a divisão da "pizza" no seu encarte para melhor acompanhar o que está sendo discutido e possa utilizá-las para posterior consulta.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, esta atividade foi escolhida por ser uma questão simples, que tem um ar de realidade, mas que já levanta o problema da relação entre divisão por um número inteiro e multiplicação por fração.*
- *A essa altura, quando os alunos já deveriam ter automatizado a forma de efetuar cálculos com números racionais em qualquer uma de suas representações, não há muito tempo para desenvolver os detalhes de todas essas construções. Exemplos simples e significativos como este podem ser um atalho no longo caminho da compreensão desses cálculos.*

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar ...

25 minutos

Atividade • A sobremesa é de chocolate

Objetivo

Rever o caso geral da multiplicação de frações.

Descrição da atividade

Para resolver uma situação-problema que envolve a divisão de uma barra de chocolate, os alunos serão encaminhados a uma aplicação da multiplicação de frações.

Questão

A história agora se passa entre 2 irmãs que vão levar uma barra de chocolate para um passeio. Antes de saírem de casa, o irmão delas pediu que deixassem a quinta parte da barra para ele. Elas vão levar o resto, mas a mais velha vai com uma amiga, enquanto a mais nova vai sozinha. Veja qual foi o diálogo entre elas. Disse a mais velha:

- Nosso irmão quer $\frac{1}{5}$ desta barra. Vão sobrar então $\frac{4}{5}$ para dividirmos igualmente entre nós 3: você, minha amiga e eu. Como vou levar a parte da minha amiga, devo levar $\frac{2}{3}$ dos $\frac{4}{5}$, certo?
- Ao que a mais nova respondeu:
- Certo, mas, como vamos cortar os pedaços? Qual é a parte da barra toda que você vai levar?
- E a mais velha aconselhou cautelosa:
- Antes de cortarmos a barra, o que pode despedaçar todo o chocolate, vamos ver o que acontece numa figura?

Ajude as irmãs a fazerem esse cálculo e veja no que vai dar.

1. Vamos representar a barra de chocolate pelo retângulo desenhado a seguir. Indique a parte do irmão e a parte das irmãs. (Como a barra tem maior comprimento do que largura, vale a pena fazer as divisões no comprimento, com traços verticais.)

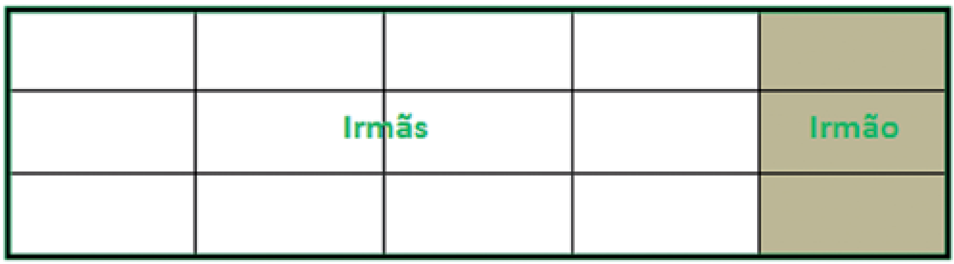
Cabem 4 partes às irmãs. Elas querem dividir essas 4 partes em 3 partes iguais. Um modo de fazer isso é dividir cada uma dessas partes em 3 iguais e tomar 2 de cada uma delas, concorda?

Agora, a altura é maior do que a base de cada parte e você vai "enxergar" melhor o que está acontecendo se fizer essa divisão no outro sentido (com linhas horizontais).

2. Então, vamos ver: se você dividir em 3 partes cada uma das partes obtidas na divisão inicial por 5 , quantas dessas partes vão cobrir a barra toda?

Resposta

Ao fazer as subdivisões como aconselhado, o aluno vai chegar a uma figura mais ou menos assim:



e vai verificar que a barra toda de chocolate ficou dividida em 15 partes iguais.

• • • • •

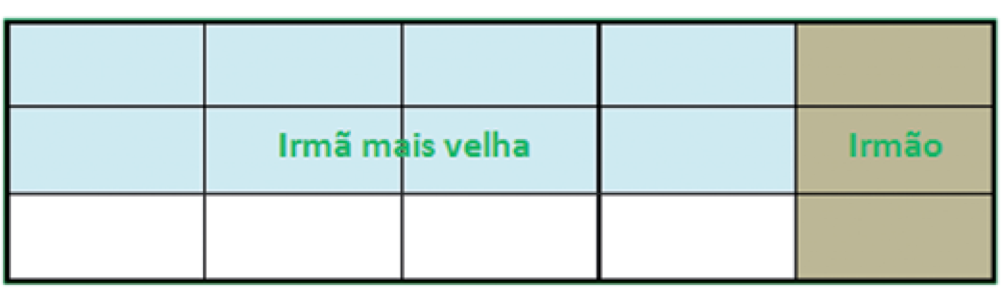
3. Esse número foi obtido porque você dividiu cada uma das 5 partes em 3 partes, logo o total dessas partes menores é o resultado de uma operação entre esses números. Você pode dizer qual é essa operação e por que ela se aplica ao que você fez?

Resposta

Espera-se que o aluno perceba que dividindo cada uma das 5 partes da barra em 3 partes iguais, ele obtém 5 parcelas iguais a 3, ou seja, o resultado é o produto 3 x 5 = 15.

• • • • •

4. E, agora, você vai identificar a parte que coube às irmãs e pode contar quantas dessas partes menores a irmã mais velha vai levar.



Resposta

Ora, de cada uma das 4 partes (que foram divididas em 3), 2 devem ser dadas à irmã mais velha. Logo, ela vai levar 2 x 4 = 8 dessas partes.

• • • • •

5. Que parte da barra toda vai levar a irmã mais velha?

Resposta

Como cada uma dessas partes era $\frac{1}{15}$ *da barra toda, a irmã mais velha vai levar* $\frac{8}{15}$ *da barra toda.*

• • • • •

Você só precisa lembrar, agora, que esta é a definição de multiplicação de frações:

O PRODUTO DE DUAS FRAÇÕES É UMA NOVA FRAÇÃO CUJO NUMERADOR É O PRODUTO DOS NUMERADORES DAS FRAÇÕES DADAS E O DENOMINADOR É O PRODUTO DOS DENOMINADORES DAS FRAÇÕES DADAS.

Ou seja: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Pronto: você já sabe multiplicar frações e já viu uma razão para que seja dada esta definição!

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Régua (não tão necessária, pois as divisões podem ser feitas aproximadamente.)

Procedimentos Operacionais

Professor: os grupos podem ser os mesmos e da mesma forma como foi feito na etapa anterior, os alunos vão discutir as respostas em grupo, mas vão desenhar e redigir suas respostas no respectivo encarte.

• • • • •

- *Professor, provavelmente alguns grupos terão dificuldade em dividir a barra ou em estabelecer relações entre as figuras obtidas e a notação de fração. Talvez seja necessário relembrar o papel de cada um dos termos de uma fração. O denominador recebe esse nome porque é ele que <u>dá o nome</u> a cada uma das partes em que a unidade é dividida: terço, décimo, etc. O numerador tem esse nome porque se trata do <u>número</u> de partes consideradas. Eles ainda podem ter dúvida sobre qual deles vai acima do traço de fração e qual deles vai abaixo. O modo de lembrar isso talvez seja buscando exemplos de frações mais conhecidas, como as de numerador 1:* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, *etc.*
- *É importante também frisar para o aluno que, ao calcular uma fração de outra fração, ele chegou a uma nova fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações de partida e o denominador é o produto dos denominadores destas mesmas frações, mas que isto não foi uma demonstração por se tratar de um caso particular, um exemplo. Por outro lado, vale também observar que, se ele pensar no que foi feito com a barra de chocolate, vai perceber que esse mesmo tipo de raciocínio se aplicaria ao cálculo de uma fração de outra fração, quaisquer que fossem essas frações. Raciocínios análogos mostrariam que o resultado seria uma nova fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e o denominador é o produto dos denominadores destas mesmas frações. A Matemática define essa nova fração como o produto das frações dadas. Assim é que, para calcular uma fração de um número, basta multiplicar a fração por esse número. E isso vale para números racionais, mas vale também para os irracionais. Vale, portanto, para o cálculo de frações de qualquer número real.*
- *Há ainda uma outra questão a ser discutida. O problema é que, depois que o aluno aprende a multiplicar frações, pode se atrapalhar na soma ou subtração de frações. Como a multiplicação é mais simples, ele passa a esquecer que para somar ou subtrair frações é preciso que elas tenham o mesmo denominador. Caso contrário, devem ser substituídas por frações equivalentes (que representem o meso número), mas que tenham o mesmo denominador. Assim, a simplicidade da regra da multiplicação entre frações o leva a se enganar e repetir a operação indicada entre as frações como operações entre os termos das frações.*
- *Vale a pena observar que essa necessidade de manter a unidade na comparação, na adição e na subtração é uma questão que aparece desde os números naturais. Por exemplo, 2 + 3 = 5 quando se trata da mesma unidade. Com efeito 2 alunos mais 3 livros não dá nem 5 alunos nem 5 livros. Mas eu posso multiplicar 2 alunos por 3 livros (se cada aluno estiver trazendo 3 livros) e obtenho 6 livros. Da mesma forma, posso multiplicar 2 terços por 4 quintos e obtenho 8 quinze avos. Mas se eu somar 2 terços com 4 quintos, não obtenho nem 6*

terços, nem 6 quintos, nem 6 quinze avos. Se eu fizer as subdivisões necessárias para calcular ambas as frações com o denominador 15, vou obter 10 quinze avos mais 12 quinze avos, o que dá uma soma igual a 22 quinze avos. Nossos alunos enfrentam essas mesmas dificuldades, por exemplo, na multiplicação e adição de radicais, na multiplicação e adição de monômios. Podemos multiplicar $2x$ por $3x^2$ e obtemos $6x^3$, mas a soma $2x + 3x^2$ não dá $5x$, nem $5x^2$, nem $5x^3$, enfim, não pode ser reduzida a um único termo.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade: Tudo acaba em Pizza?

Objetivo

Distinguir agrupamentos em que a ordem faz diferença de outros em que ela não faz.

Descrição da atividade

Os alunos serão apresentados a três situações que envolvem a contagem de possibilidades que podem ocorrer em cada uma delas. Em seguida, vão analisar a diferença entre elas, quanto à interferência da ordem dos elementos nessa contagem.

Caro estudante

Na linguagem popular, a expressão “terminar em pizza” tem o sentido negativo de impunidade, na forma de confraternização final numa situação em que uns deveriam condenar outros, mas não o fazem.

Vamos viajar para um país distante e estudar três situações, uma delas com 5 juízes e duas outras com 5 bolas numeradas numa urna.

Você e seus companheiros de grupo são convidados a responder a uma pergunta sobre quantas possibilidades podem ocorrer em cada uma das situações descritas a seguir e analisar a diferença entre elas, sob o ponto de vista dessa contagem. Se acharem importante, podem usar os cartões em anexo que lhes ajudarão nessas contagens. Seu professor vai passar instruções a vocês sobre isso.

Mãos à obra!

Cartões em anexo no Encarte do aluno:

JUIZ 1		JUIZ 4	
JUIZ 2		JUIZ 5	
	JUIZ 3		

<u>Situação 1</u>

Cinco juízes acabam de julgar, numa seção secreta, um time de futebol que não chegou a tempo para uma partida. O resultado do julgamento do time de futebol foi de 2 votos a favor e 3 votos contra o time. Nesse caso, a votação não "terminou em pizza". O treinador do clube gostaria de saber quem foram os juízes que votaram a favor.

<u>Situação 2</u>

Numa urna há 5 bolas numeradas de 1 a 5. Será feito um sorteio de números de 2 algarismos, com a retirada de 1 bola da urna para formar a dezena e a retirada de outra bola da urna para o algarismo da unidade. Esse segundo sorteio será dentre as bolas que sobraram lá dentro, sem retorno da 1ª bola sorteada.

<u>Questão 1</u>

Na Situação 1, enumerando os juízes de 1 a 5, você deve informar a esse treinador quantas são as possibilidades das duplas de juízes que defenderam o time.

Resposta

Se o Juiz 1 votou a favor do time, o outro Juiz pode ter sido o 2, o 3, o 4 ou o 5: <u>são 4 duplas</u> que contêm o Juiz 1.

Se o Juiz 2 votou a favor, além da dupla com o Juiz 1 que já foi contada, há ainda a possibilidade do 2º voto ter sido do Juiz 3, ou do Juiz 4 ou do Juiz 5. São mais <u>3 duplas</u> que contêm o Juiz 2, além daquela com o Juiz 1.

Se o Juiz 3 votou a favor, além das duplas com os Juízes 1 e 2 que já foram contadas, há ainda a possibilidade do 2º voto ser do Juiz 4 ou do Juiz 5. São mais 2 duplas.

E, afinal, há ainda a dupla dos Juízes 4 e 5, o que acrescenta 1 dupla.

Ao todo, as possibilidades são de 4 + 3 + 2 + 1 = 10 duplas.

Um outro modo de contar estas duplas, que não é tão natural, mas que remete a uma expressão mais simples de ser calculada com números maiores e mais perto de uma generalização é o que segue: cada um dos 5 juízes pode fazer dupla com os outros 4. Seriam, então, 5 × 4 = 20 duplas. Acontece que nesta contagem cada dupla foi contada 2 vezes: por exemplo, a dupla dos Juízes 2 e 4 foi contada quando o Juiz 2 foi acompanhado no voto pelo Juiz 4 e quando o Juiz 4 foi acompanhado no voto pelo Juiz 2. Sendo assim, o número de duplas é a metade do número encontrado e, portanto, igual a $\frac{20}{2} = 10$*, como foi encontrado no processo anterior. Na Etapa Flex, há uma observação sobre esses 2 modos de calcular o número dessas possibilidades e suas generalizações.*

• • • • •

Professor

Questão 2

Um tanto desconfiado do resultado que lhe foi informado, o Treinador conversou com o Tesoureiro do time que lhe disse:

- Está certo esse resultado e ele coincide com o número de possibilidades da Situação 2, em que você considera números formados por 2 algarismos, dentre 1, 2, 3, 4 e 5, sem repeti-los.

Você concorda com o Tesoureiro? Justifique sua resposta, calculando o número de possibilidades desses números.

Resposta

Os alunos que formaram as duplas a partir do Juiz 1, certamente, vão começar a contagem pelos números em que o algarismo da dezena seja 1. Nesse caso, o algarismo das unidades pode ser 2, ou 3, ou 4, ou 5. Isto é, são formados <u>4 números distintos: 12, 13, 14 e 15</u>.

Ao considerar, agora, os números com algarismo 2 na posição das dezenas, o número em que o algarismo das unidades seja 1, 21, ainda não foi contado, diferentemente do que acontecia com as duplas dos Juízes, em que o voto da dupla Juiz 1 e Juiz 2 não era diferente do voto da dupla Juiz 2 e Juiz 1. Sendo assim, com o 2 na posição das dezenas, podem ser formados também <u>4 números distintos</u> entre si e distintos daqueles contados anteriormente: 21, 23, 24 e 25.

Esse raciocínio, mostra que há ainda 4 números distintos entre si e entre os demais com o algarismo 3 na posição das dezenas e 4 com o algarismo 4 nessa posição. O mesmo acontece para o algarismo 5. Ou seja, a quantidade total de números distintos que podem ser formados na Situação 2 é igual a 5 × 4 = 20. Logo o Tesoureiro estava enganado.

Os alunos que tenham usado o segundo processo de contagem ao responder à Questão 1, já chegaram diretamente a este resultado, não fazendo sentido a divisão por 2, tendo em vista que, na Situação 2, números como 24 e 42 são distintos.

• • • • •

Situação 3

Ainda desconfiando da informação do Tesoureiro, o Treinador foi conversar com um Gandula do clube que gostava muito de passar rifas beneficentes. Ao expor ao Gandula as 2 situações, ouviu a seguinte resposta:

- Ora Sr. Treinador, o Tesoureiro entende de altas quantias e de impostos, mas de sorteios, entendo eu. Os votos dos Juízes não podem ser comparados ao sorteio de números de 2 algarismos, mas ao sorteio de 2 números de 1 algarismo só. É um jogo de duplas. Seria um sorteio de mini-duplas numa cartela com os números de 1 a 5, onde você marca 2 números. No dia do sorteio, são retiradas 2 bolas (ao mesmo tempo) da urna. O número de possibilidades das duplas de Juízes é igual o número de jogos possíveis nessa cartela.

Questão 3

O Gandula está certo?

Resposta

Agora, sim, o Gandula deu um exemplo análogo ao da votação dos Juízes. Pois, se você pode marcar 2 números na cartela, não faz diferença se marcou o 2 antes ou depois do 4, por exemplo. E o número de possibilidades desse jogo é também igual a

$\frac{20}{2}$ *= 10, como no caso dos votos dos Juízes.*

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.
- Cartões com números e Juízes, disponíveis em anexo para recorte no encarte do aluno.
- Tesoura, se possível uma para cada aluno ou uma para cada grupo, para recortar os cartões, se essa for a sua recomendação.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, esta atividade pode ser desenvolvida com a distribuição dos alunos nos mesmos grupos.*
- *O uso dos cartões do anexo do Encarte do aluno pode ajudar na contagem dos vários casos estudados nesta etapa. Na falta de tesoura, você pode recomendar o uso das cartelas mesmo sem recortar. Cada aluno dispõe de um grupo completo de cartelas, o que permite que o grupo trabalhe com várias cópias, o que pode ajudar na análise das várias possibilidades.*

• • • • •

Intervenção Pedagógica

- *Professor, a exigência de organização na resposta a essas questões é um fato geral nos problemas de contagem. Esse é um precioso subproduto desse tipo de problemas: a exigência de planejamento e organização. É comum que os estudantes comecem a arrolar os vários casos, sem um planejamento que permita conferir se todos os casos foram considerados e, cada um, uma única vez. Ao se atrapalharem nessa verificação, percebem a necessidade da organização e esta exige o planejamento. Essa é, mais do que Matemática, uma lição de vida!*
- *A diferença entre as Situações 1 e 3 (com 10 possibilidades) e a Situação 2 (com 20 possibilidades) está na influência, ou não, da ordem em que são considerados os agrupamentos. Essa é a diferença entre combinações (em que a mudança da ordem não altera o caso) e os arranjos (em que os mesmos elementos em ordem diferente correspondem a casos diferentes). Esta é a primeira dinâmica em que esta diferença é apontada. Se os alunos ainda não viram essa nomenclatura no curso regular, não será preciso introduzi-la. Basta a observação dessa distinção causada pela influência, ou não, da ordem dos elementos.*

• • • • •

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Questão

(*Saerjinho, 1º bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 49, ligeiramente adaptada.*)

Treze competidores disputam um campeonato de xadrez em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?

a. 13

b. 26

c. 78

d. 156

e. 169

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Matemática

Resposta

Este problema pode ser resolvido de várias maneiras, mas, **é** *prov***á***vel que os alunos usem o princípio aditivo, escolhendo ordenadamente os competidores. Um jogador não joga consigo próprio, logo o primeiro deles terá 12 adversários, serão 12 jogos. O jogo do segundo com o primeiro já foi contado, mas o segundo deve jogar ainda com outros 11 adversários. Da mesma forma, o terceiro jogador tem ainda que jogar com 10 adversários e, assim por diante, até o 12º competidor que terá um jogo ainda não contado que é aquele contra o 13º adversário. A esta altura, todos os jogos com o 13º competidor já foram contados. O total de jogos será, portanto igual à soma: 12 + 11 + 10 +...+ 1. Essa soma pode ser calculada diretamente, pois o número de parcelas não é muito grande, mas, lembrando a história do menino Gauss que fez uma soma dessas de 1 a 100 em poucos minutos, podemos calcular 2 vezes essa soma, verificando que:*

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

O que significa que o dobro dessa soma é o produto de 13 por 12. Logo, a soma é calculada como: $\frac{13 \cdot 12}{2} = \frac{156}{2}$ *= 78 e a opção correta é (c).*

Ou ainda pode-se observar que elas formam uma progressão aritmética (PA) com 12 termos, cujo primeiro é 1, a razão é 1 e o último termo **é 1***2. Assim, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA (obtida exatamente pelo processo usado por Gauss), chega-se à resposta correta:*

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(1+12) \cdot 12}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

Observe que a fração $\frac{13 \cdot 12}{2}$ *é justamente o cálculo que faria um estudante que fizesse a contagem pelo outro processo usado no cálculo da dupla dos juízes. Cada*

1 dos 13 competidores deve jogar com os 12 adversários, o que daria 13 × 12 jogos. Mas, nessa contagem, cada jogo está contado 2 vezes, quando o jogador Fulano joga com o jogador Cicrano e quando o jogador Cicrano jogaria com o jogador Fulano. Mas os 2 competidores se enfrentam uma única vez. Logo, esse número deve ser dividido por 2 e o resultado seria dado por $\frac{13 \times 12}{2}$.

É possível ainda que algum aluno, que já conheça a nomenclatura e as fórmulas da Análise Combinatória, identifique os agrupamentos envolvidos como combinações de 13 elementos tomados 2 a 2. Neste caso, faria o cálculo diretamente, utilizando a fórmula correspondente para combinações de n elementos tomados p a p:

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_2^{13} = \binom{13}{2} = \frac{13!}{2!(13-2)!} = \frac{13!}{2!\,11!} = \frac{13 \times 12}{2} = 78.$$

Distratores

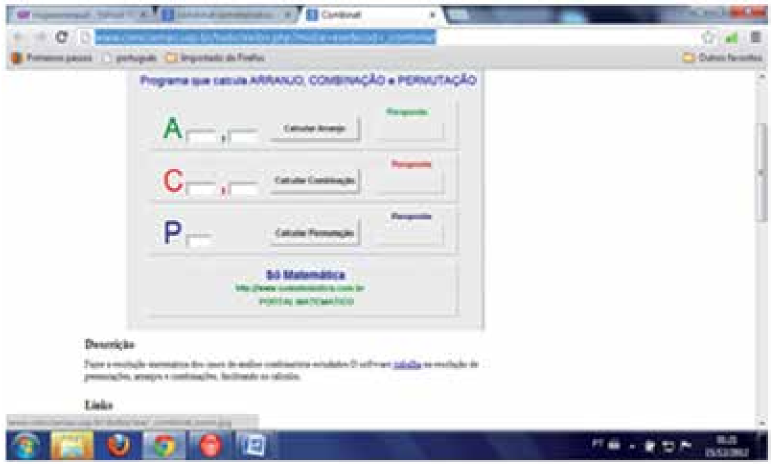
- *Um aluno que pensasse ingenuamente que 13 competidores jogando uma vez daria somente 13 jogos, escolheria a opção (a).*
- *Um aluno que pensasse que 13 competidores em jogos de duplas dobraria o número de jogos, escolheria a opção (b).*
- *Um aluno que contasse os jogos de cada um dos 13 competidores com cada um dos 12 adversários e obtivesse 13 x 12 = 156, sem perceber que contou cada jogo duas vezes, escolheria a opção (d).*
- *Por fim, um aluno que, pensando em 13 competidores que devem jogar com todos os demais, fizesse o cálculo pelo produto 13 × 13, chegaria à opção (e).*

Etapa Flex

Para saber +

Uma dica para pesquisa dos alunos é baixar o programa *combinat.* Ele calcula combinações e outros tipos de agrupamentos e pode ser baixado gratuitamente do link:

- http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=exe&cod=_combinat



- Uma observação a respeito do cálculo das possibilidades estudadas nas Situações 1 e 2, é que, os raciocínios lá utilizados se aplicam de modo análogo aos casos de arranjos (agrupamentos em que a troca de ordem faz diferença) ou de combinações (agrupamentos em que a troca de ordem não faz diferença) de <u>n elementos tomados 2</u> <u>a 2</u>. Ou seja, o mesmo tipo de raciocínio pode ser feito ao considerar pares ordenados (em que a ordem faz diferença) ou duplas (em que a ordem não faz diferença) de um número n qualquer de elementos.

Se for o caso dos pares ordenados (arranjos) de n elementos, fica claro que o número total será igual a n (n – 1). E, no caso das duplas (combinações) de n elementos, o número pode ser calculado como (n – 1) + (n – 2) + ... + 2 + 1 ou como $\frac{n \times (n-1)}{2}$, que é o valor da soma obtida anteriormente ou o valor que se obtém como metade do número de pares ordenados. Os alunos mais interessados já podem considerar essa generalização que não é tão difícil de construir e que é um passo na direção de contar arranjos e combinações de n elementos tomados p a p.

Agora, é com você!

1. Caro aluno, você já conhece a simplificação de frações, sabe que é possível dividir numerador e denominador de uma fração pelo mesmo número e que isso não altera o número racional que a fração representa. Então, como diz Chico Buarque, “se é para desfazer, por que é que fez?”. Assim, “se é para dividir, por que multiplicar?” já que a multiplicação e a divisão são operações inversas (uma desfaz o que a outra faz!). Raciocinando dessa forma, você pode simplificar fatores comuns a qualquer numerador e

denominador, antes de efetuar os produtos dos numeradores e denominadores. Por exemplo, na multiplicação de $\frac{4}{9}$ por $\frac{15}{14}$, é possível dividir o numerador da 1ª fração (o 4) e o denominador da 2ª fração (o 14) ambos por 2 e o numerador da 2ª fração (o 15) e o denominador da 1ª fração (o 3) ambos por 3, antes de efetuar o produto, obtendo-se o resultado já na forma reduzida:

$$\frac{4}{9} \times \frac{15}{14} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

Observe que o cálculo direto passaria por números maiores:

$$\frac{4}{9} \times \frac{15}{14} = \frac{60}{126} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$$

Você pode, então, conferir esse processo nos cálculos a seguir, fazendo a simplificação antes ou depois da multiplicação dos numeradores e denominadores:

Professor

Resposta

a. $\frac{6}{35} \times \frac{14}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

b. $\frac{10}{21} \times \frac{33}{35} = \frac{2}{7} \times \frac{11}{7} = \frac{22}{49}$

c. $\frac{28}{15} \times \frac{15}{16} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

• • • • •

2. Seu amigo tem um terreno quadrado e ofereceu a você uma área retangular para você plantar ervas aromáticas. Você pode escolher entre um retângulo que tenha $\frac{2}{5}$ por $\frac{15}{16}$ do lado do terreno ou um retângulo que tenha $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{3}$ desse lado. Que fração cada um deles representa do terreno todo? Você escolheu o menor deles para não explorar o amigo. Qual deles você escolheu?

Resposta

Seu aluno pode fazer o cálculo e simplificar depois:

$$\frac{2}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} \quad e \quad \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}\ .$$

Comparando esses resultados, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ *e* $\frac{2}{8}$ *é menor do que* $\frac{3}{8}$ *, então você escolheu a 2ª oferta, o retângulo de* $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{1}{3}$*.*

Para multiplicar as frações, podemos optar por simplificar antes e trabalhar com números menores:

$$\frac{2}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad e \quad \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}.$$

• • • • •

3. Você viu num caso particular que, pela definição de multiplicação de frações, quando se quer calcular uma fração de um número racional, basta multiplicar a fração por esse número (na verdade, isso vale para qualquer número). Então, veja qual a parte que cabe a cada neto no testamento de um avô: "*Ao meu neto mais velho, deixo* $\frac{2}{5}$ *do saldo da minha conta de poupança que é de R$ 25.000,00. Ao segundo neto deixo* $\frac{3}{10}$ *dessa quantia e o resto fica para meu terceiro neto.*"

Resposta

o neto mais velho deve receber $\frac{2}{5}$ *de 25.000:*

$$\frac{2}{5} \times \frac{25.000}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{5.000}{1} = 10.000$$

O segundo neto deve receber $\frac{3}{10}$ *de 25.000:*

$$\frac{3}{10} \times \frac{25.000}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{2.500}{1} = 7.500$$

Juntos, os 2 primeiros netos vão receber: 10.000 + 7.500 = 17.500. Sobram para o terceiro neto: 25.000 – 17.500 = 7.500, a mesma quantia que ficou para o 2º neto.

Com efeito,

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4+3}{10} = \frac{7}{10}$$

e, como o saldo todo corresponde a $\frac{10}{10}$ *do próprio saldo, o que sobra para o 3º neto é*

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{10-7}{10} = \frac{3}{10},$$

que é a mesma fração que o avô deixou para o 2º neto.

• • • • •

4. Esse mesmo avô deixou um apartamento para dividir igualmente entre seus 5 filhos, mas o filho mais velho resolveu dividir a parte dele igualmente entre seus 3 filhos. Que fração do apartamento ficou para um dos filhos do filho mais velho desse avô?

Professor

Resposta

São 5 filhos que vão dividir o apartamento igualmente entre si, então, o filho mais velho iria receber $\frac{1}{5}$ *do apartamento. Essa parte, ele resolveu dividir igualmente entre seus 3 filhos, então, cada um deles vai receber* $\frac{1}{3}$ *da parte do pai. Ora, para calcular* $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{5}$ *será preciso multiplicar essas frações, logo, cada um deles vai receber:* $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ *do apartamento.*

• • • • •

5. Um motociclista negligente caiu e gastou R$ 580,00 de despesas médicas no seu tratamento. Ele soube que o seguro vai reembolsar 38% dessas despesas. Quanto é que ele vai receber desse seguro? Você se lembra que 38%

de uma quantia qualquer é $\frac{38}{100}$ dessa quantia? Então, vamos lá, você já sabe fazer esse cálculo.

Resposta

O seguro vai reembolsar 38% de 580 reais e, para calcular quanto é essa quantia, devo fazer a multiplicação:

$$\frac{38}{100} \times 580 = \frac{38}{100} \times \frac{580}{1} = \frac{38}{10} \times \frac{58}{1} = \frac{2204}{10} = 220{,}40,$$

isto é, o motociclista vai receber a quantia de R$ 220,40 do seguro. Observe que, neste caso, não valeu a pena simplificar o 58 e o 10 por 2, pois é mais fácil dividir por 10 do que por 5.

• • • • •