Reforço escolar · Matemática ·

+ Do que xxx e escadas

Dinâmica 6

1º Série | 2º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 1ª	Campo Geométrico	Razões trigonométricas no triângulo retângulo

DINÂMICA	+ Do que xxx e escadas
HABILIDADE BÁSICA	H11 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos
HABILIDADE PRINCIPAL	H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º)
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente, dos ângulos de 30º, 45º e 60º

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Calculando com Pitágoras	15 a 20 min	Duplas e/ou trios de alunos	Individual
2	Um novo olhar...	Subindo e Descendo Escadas	15 a 20 min	Duplas e/ou trios de alunos	Individual
3	Fique por dentro!	Além de Pitágoras e Escadas	25 a 35 min	Individual	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

A trigonometria é uma ferramenta matemática bastante utilizada no cálculo de distâncias envolvendo triângulos retângulos. Na antiguidade, matemáticos utilizavam o conhecimento adquirido em trigonometria para realizar cálculos ligados à astronomia, determinando a distância, quase que precisa, entre a Terra e os demais astros do sistema solar. Atualmente a trigonometria é bastante utilizada e para compreender o seu uso é necessário assimilar alguns conceitos. Assim, nesta dinâmica, serão abordadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo que são necessárias para resolver problemas envolvendo seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

20 MINUTOS

Atividade • Calculando com Pitágoras

Objetivo

Resolver problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras.

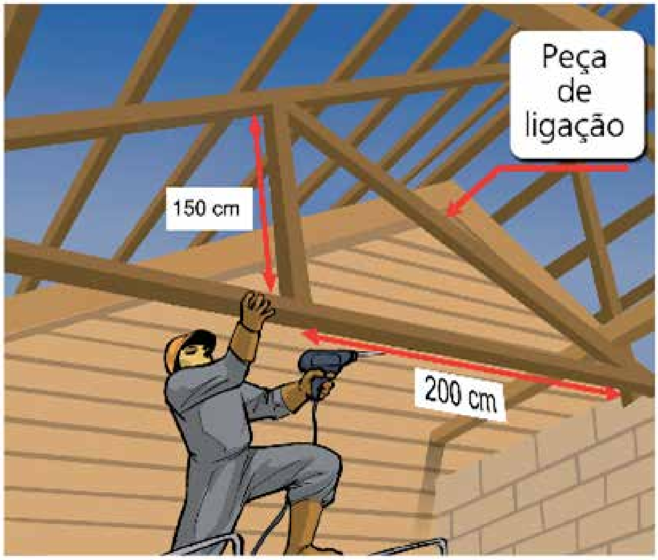
Descrição da Atividade

Esta atividade é composta por três problemas envolvendo triângulos retângulos. Pretende-se resolver as questões utilizando o Teorema de Pitágoras. Procuramos escolher situações cotidianas que revelem todo o potencial prático do mais famoso teorema da matemática.

Vamos começar?

Certamente, você já deve ter ouvido falar no Teorema de Pitágoras. Ele será o centro de nossa discussão nesta etapa da dinâmica. Ele é um teorema de razões práticas e esperamos fazer isto de forma muito natural. A ideia é apresentar, discutir e utilizar o teorema de Pitágoras para resolver problemas em situações cotidianas, como a descrita a seguir.

Observe um carpinteiro montando um telhado:



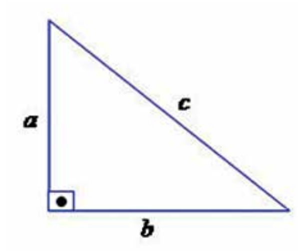
Fonte: http://cejarj.cecierj.edu.br/pdf_mod0/Matematica_Unidade_10_Seja-1.pdf

Para que não haja problemas na construção, é necessário calcular as medidas das peças com precisão. Qual a sua sugestão para determinarmos, antecipadamente, a medida correta da peça de ligação, mostrada na figura acima?

O Teorema de Pitágoras é considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. Vale lembrar que o triângulo retângulo pode ser identificado pela existência de um ângulo reto, isto é, medindo 90º. O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e é localizada oposta ao ângulo reto. Observe que temos:

Catetos: a e b

Hipotenusa: c



O Teorema diz que: "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Atividade 1

Agora, considere a situação onde há uma torre com 8 metros de altura e em volta da torre um canal com 6metros de largura. É necessário fazer uma escada que passe por cima da água até ao topo da torre. Daí segue que: qual o comprimento que a escada deve possuir?

Professor

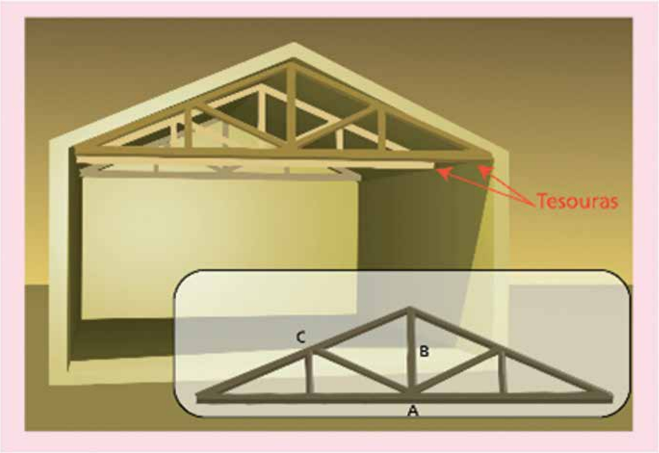
Resposta

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 8^2 + 6^2$$
$$c^2 = 64 + 36 = 100$$
$$c = \sqrt{100} = 10m$$

● ● ● ● ●

Atividade 2

Na construção de telhados encontramos algumas estruturas chamadas tesouras. Observe o esquema de uma tesoura e responda as perguntas a seguir.



Fonte: http://cejarj.cecierj.edu.br/pdf_mod0/Matematica_Unidade_10_Seja-1.pdf

a. Quantos triângulos retângulos podem ser observados?

Resposta

11.

● ● ● ● ●

b. Se a peça A (inteira) mede 8m e a peça B mede 1,8m, é possível que a peça C meça 5m, sabendo que o ângulo formado pelas peças A e B é reto? Justifique.

Resposta

Não, pois a soma de dois lados de um triângulo não pode ser menor que um de seus lados.

• • • • •

c. Calcule a medida da peça C:

Resposta

$C^2 = a^2 + b^2$

$C^2 = 4^2 + 1{,}8^2$

temos: $C^2 = 16 + 3{,}24$

$C^2 = 18{,}24$

$C = 4{,}38$m

Professor

Atividade 3

Agora você deve resolver a questão inicial desta etapa, vamos lá?

Resposta

Poderíamos calcular a medida, fazendo: $a^2 = b^2 + c^2$

Onde a é a medida da peça de ligação (hipotenusa do triângulo retângulo) e b e c são as medidas dos catetos, 150 cm e 200 cm, respectivamente. Logo temos:

$$a^2 = 150^2 + 200^2$$
$$a^2 = 22500 + 40000 = 62500$$
$$a = \sqrt{62500} = 250cm$$

• • • • •

Recursos Necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

Professor a atividade foi desenvolvida para ser realizada em duplas e/ou trios de alunos, mas o registro deve ser individual.

Professor, aproveite e utilize a primeira questão como uma atividade disparadora da discussão.

Intervenção pedagógica

- *Professor, esteja atendo as discussões que podem surgir acerca da medida de catetos e hipotenusa, normalmente, os alunos tendem a optar por medições diretas do objeto. Esta solução, apesar de possível, em alguns casos não é a desejada se queremos saber, antecipadamente certo valor;*
- *Não deixe de comentar sobre a condição de existência de um triângulo;*
- *Nestas atividades você pode optar por utilizar calculadoras para agilizar os cálculos.*

Segunda etapa
Um novo olhar

20 MINUTOS

Atividade • Subindo e Descendo Escadas

Objetivo

Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo formado pela escada e outro referencial.

Descrição da Atividade

Esta atividade é composta por dois problemas envolvendo escadas.

Situação 1

Queremos encostar uma escada de 8 m de comprimento na parede de uma residência, de modo que ela forme um ângulo de 60º com o solo. A que distância da parede devemos apoiar a escada no solo?

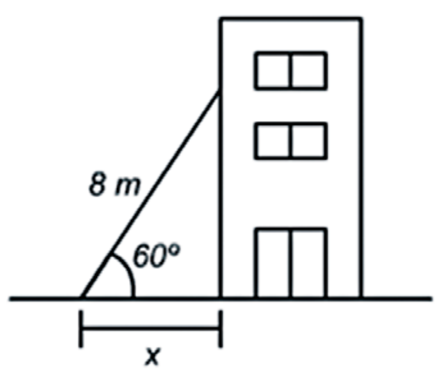
Figura 1: Escada encostada na parede de uma residência

Fonte http://www.sxc.hu/photo/980891

Professor

Resposta

Observe o desenho do esquema:



Dados: hipotenusa = 8 m

ângulo de 60º

lado x = cateto adjacente ao ângulo de 60º

Usaremos a relação do cosseno (Professor, explique que será usada a relação do cosseno em razão da distância da escada à residência corresponder ao cateto adjacente em relação ao ângulo de 60⁰ e a hipotenusa corresponder ao comprimento da escada).

$$\cos 60° = \frac{x}{8}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Logo, o ponto de apoio da escada no solo deve ficar a 4 metros da parede.

● ● ● ● ●

Situação 2

A superstição de que "andar debaixo de escada dá azar" tem origem há 5000 anos no Egito antigo. Uma escada encostada a uma parede forma um triângulo, e os egípcios consideravam esta forma sagrada. Para eles, triângulos representavam a trindade dos deuses, e passar por um triângulo era profaná-los. Na Inglaterra, em 1600, os criminosos eram obrigados a caminhar debaixo de uma escada em seu caminho para a forca.

Para divulgar uma exposição de bruxaria no shopping Freeport de Portugal, a Leo Burnet Iberia criou um outdoor interativo, para saber o quão supersticiosa é a população de lá. Pra isso, uma escada foi encostada no outdoor e, embaixo dela, um sensor que marca quantas pessoas passaram por baixo da escada e quantas resolveram dar a volta (na Figura 4 dá pra ver que o número de pessoas que não deram chance ao azar é bem maior).

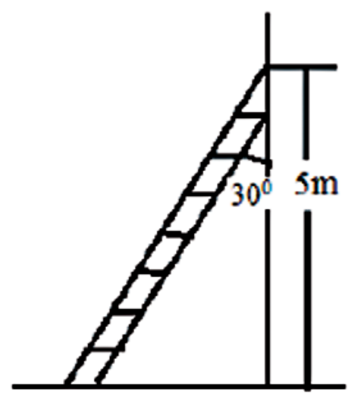
Figura 2: Outdoor interativo no Shopping Freeport de Portugal.

Fonte: http://elapublicitaria.wordpress.com/page/15/

Suponha que a escada se apoia no outdoor a 5 metros de distância do solo e forma com esta parede, neste local, um ângulo de 30º. Qual o comprimento da escada em metros, aproximadamente? Use $\sqrt{3}$ = 1,7.

Resposta

Observe o desenho do esquema:



Usaremos a relação do cosseno (Professor, explique que será usada a relação do cosseno em razão da distância do outdoor ao solo corresponder ao cateto adjacente em relação ao ângulo de 30º e a hipotenusa corresponder ao comprimento da escada).

$$\cos 30^\circ = \frac{5}{\chi}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{\chi}$$

$$10 = \sqrt{3}\chi$$

$$x = 10\sqrt{3}/3$$

$$x = 10.1{,}7/3$$

$$x = 17/3$$

$$x \cong 5{,}6m$$

*Logo, o comprimento da escada é, **aproximadamente, 5,6 metros**.*

Professor

Recursos Necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

A atividade poderá ser em feita dupla e/ou trios de alunos e o registro individual.

• • • • •

Intervenção pedagógica

- *Professor, é importante falar ao aluno que cateto adjacente é o que fica ao lado do ângulo, bem como os catetos podem tanto ser denominado oposto ou adjacente, onde o nome correto vai depender do referencial, ou seja, de qual ângulo se está tratando.*

• • • • •

Terceira Etapa

Fique por dentro!

35 MINUTOS

Atividade • Além de Pitágoras e Escadas

Objetivo

Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo na medição de um rio.

Descrição da Atividade

Agrimensura é o ramo da topografia que estuda as divisões de propriedades rurais e urbanas. Associada a astrometria, que tem por objetivo projetar na superfície terrestre as medidas de uma determinada região e assim demarcar uma extensa região terrena como se fosse num plano. O **agrimensor** moderno é um profissional da engenharia geográfica treinado nas indústrias ópticas para manusear os modernos teodolitos (Figura 3) ou estações totais, muito mais simples que os antigos.

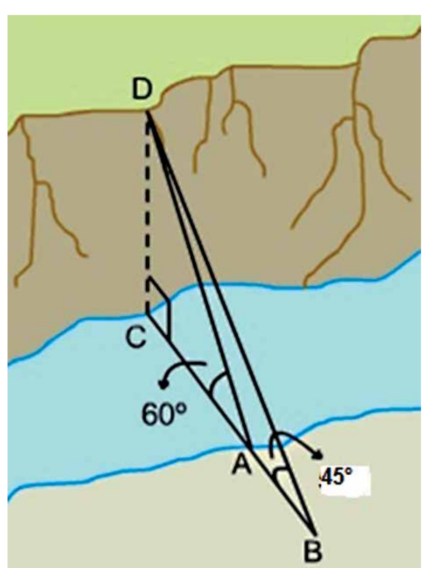
Figura 3: Teodolito utilizado pelo agrimensor.

Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teodolito_na_Auto-Estrada_Porto-Valen%C3%A7a.jpg

Um agrimensor quer determinar a largura de um rio. Como não pode efetuar diretamente essa medida, ele procede da seguinte forma:

- Do ponto A, situado numa das margens do rio, ele avista o topo D, de um morro na margem oposta, sob um ângulo de 60º com a horizontal;
- Afastando-se 12 m, em linha reta, até o ponto B, ele observa novamente o topo do morro segundo um ângulo de 45º com a horizontal.

Com esses dados assinalados na figura abaixo, calcular a medida, em metros, que o agrimensor achou para a largura do rio? (Usar $\sqrt{3}$ = 1,73).

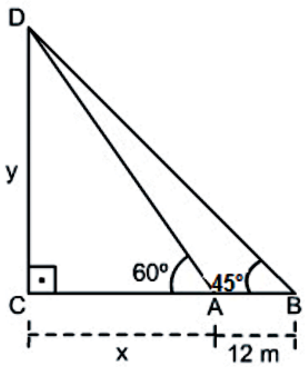


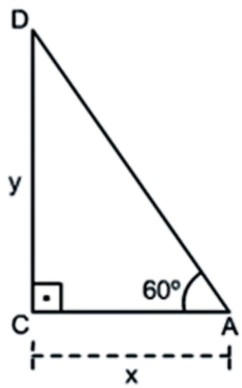
Professor

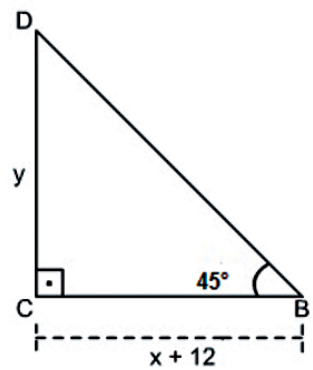
Análise da situação: x = largura do rio;

y = altura do morro.

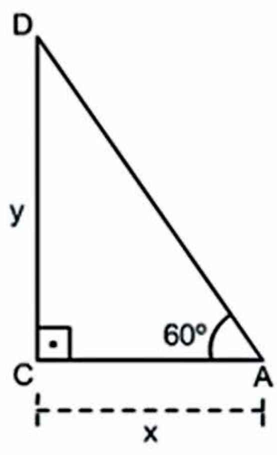
ΔACD   ΔBCD







ΔACD



$$tg\,60^\circ = \frac{y}{x}$$

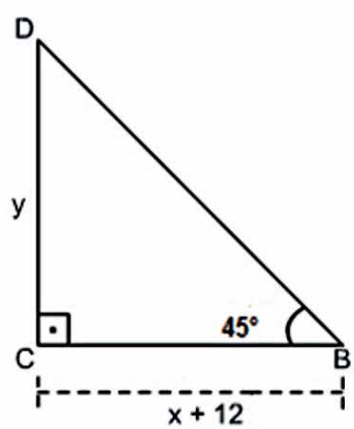
$$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$1{,}73 = \frac{y}{x}$$

$$1{,}73x = y$$

$$y = 1{,}73x \qquad (1)$$

ΔBCD



$$tg\,45^\circ = \frac{y}{x+12}$$

$$1 = \frac{y}{x+12}$$

$$1 \cdot (x+12) = y$$

$$x+12 = y$$

$$y = x+12 \qquad (2)$$

Substituindo o resultado de (1) em (2), temos:

$$1{,}73x = x + 12$$
$$0{,}73x = 12$$
$$x = \frac{12}{0{,}73}$$
$$x = 16{,}43\,metros$$

*Portanto, a largura do rio é de **16,43 m**.*

Recursos Necessários

Encarte do aluno.

Procedimentos operacionais

A atividade poderá feita em dupla de alunos e o registro individual.

Intervenção pedagógica

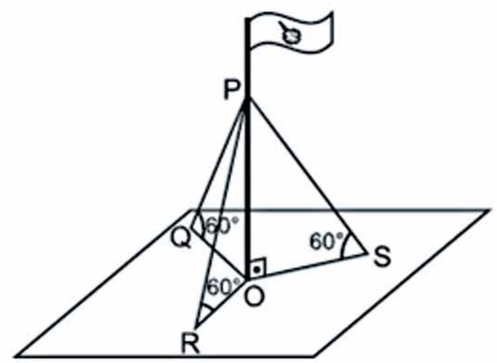
- *Professor, seria interessante mostrar aos alunos que as situações que envolvem razões trigonométricas surgem através de situações problemas e estão constantemente relacionadas a um triângulo retângulo. Os métodos resolutivos envolvendo modelos trigonométricos exigem os conhecimentos relacionados às razões trigonométricas, sendo utilizadas as relações seno, cosseno e tangente.*

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

SAERJINHO • 2011

O mastro de uma bandeira está representado na figura abaixo. Ele teve que ser sustentado por três cabos de aço que fazem um ângulo de 60º com a horizontal.



Dados

$\text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$

Sabendo-se que a distância entre os pontos O e P é de 30 m, a quantidade de cabo necessária para realizar a fixação desse mastro é

a. $20\sqrt{3}$ m

b. $30\sqrt{3}$ m

c. 60 m

d. $60\sqrt{3}$ m

e. 180 m

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

A resposta correta é a alternativa (D).

$$sen60° = \frac{x}{8}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{x}$$
$$\sqrt{3}x = 60$$
$$x = \frac{60\sqrt{3}}{3}$$
$$x = 20\sqrt{3}$$
$$3.20\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$$

Logo, a quantidade de cabo necessária para realizar a fixação do mastro da bandeira será de 3 . 20 $\sqrt{3}$ = 60 $\sqrt{3}$ metros.

Distratores

- *O aluno que optou pela alternativa (A), apesar de ter encontrado a medida de um cabo, não atentou para o fato de serem necessários 3 cabos para sustentação do mastro da bandeira encontrando 20 $\sqrt{3}$ metros.*

$$sen60° = \frac{x}{8}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{x}$$
$$\sqrt{3}x = 60$$
$$x = \frac{60\sqrt{3}}{3}$$
$$x = 20\sqrt{3}$$

- *O aluno que escolheu a opção (B), provavelmente utilizou a tangente de 60^{o} e efetuou a multiplicação da distância entre os pontos O e P que é de 30 m pela tangente de 60^{o} encontrando 30 $\sqrt{3}$ metros.*
- *O aluno que optou pela alternativa (C), provavelmente utilizou a cosseno de 60^{o} no lugar de seno de 60^{o} encontrando 60 metros.*

$$\cos 60° = \frac{x}{8}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{30}{x}$$
$$x = 60m$$

Professor

- *O aluno que escolheu a opção (E), provavelmente utilizou a cosseno de 60º no lugar de seno de 60º encontrando 60 metros e, multiplicando por 3, por ser 3 cabos de sustentação, chegando ao valor de 180 metros.*

• • • • •

Etapa Flex

Para saber +

1. A Trigonometria do Triângulo Retângulo (Parte 1)

Nesta Aula você vai conhecer e aplicar as **razões trigonométricas nos triângulos retângulos**. Além disso, verá como construir triângulos semelhantes e aprenderá a utilizar a tabela trigonométrica.

- Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=f0i13e4Fj0w

2. A Trigonometria do Triângulo Retângulo (Parte 2)

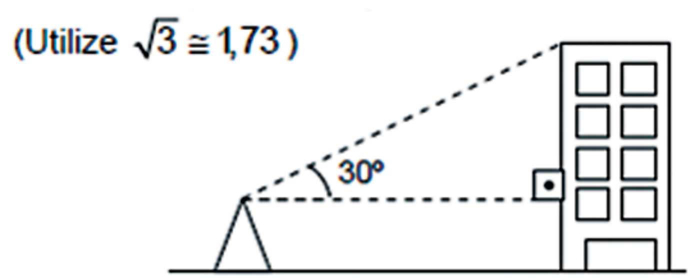
Nesta Aula você aprenderá como se efetua a **resolução problemas** utilizando razões trigonométricas nos triângulos retângulos.

- Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=nQgoVXysCGQ

Etapa Flex

Agora, é com você!

1. (UFJF) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30º, como indicado na figura a seguir:



Sabendo que o teodolito está a 1,5 m do solo, pode-se concluir que, dentre os valores a seguir, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:

a. 112

b. 115

c. 117

d. 120

e. 124

Professor

Respostas

A distância do teodolito para o edifício é 200 m.

O Ângulo de visão é de 30º.

O teodolito dista 1,5 m do chão.

**Um cuidado que se deve ter é o de verificar as unidades, como as unidades de altura e distância estão em metros não há com que se preocupar, porém, se estivesse em unidades diferentes, deveria converter...*

Deseja-se saber a altura (H) do edifício (NOTA: a altura total é determinada somando no final a altura "parcial" e a distância do teodolito ao chão...).

Usamos TANGENTE que é a razão entre Cateto oposto sobre Cateto adjacente.

$$tg\alpha = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente}$$

- *Cateto oposto (altura “parcial” - h - do edifício).*
- *Cateto adjacente (determinado pela distância entre o teodolito e o edifício) tg(30º) = h / 200 sabido que tg(30º) = √3 / 3 ≈ 0,577 (0,577) = h / 200 h = 200.(0,577) h ≈ 115,4 m.*

$$tg30^\circ = \frac{CO}{CA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4000}$$

$$3x = 4000\sqrt{3}$$

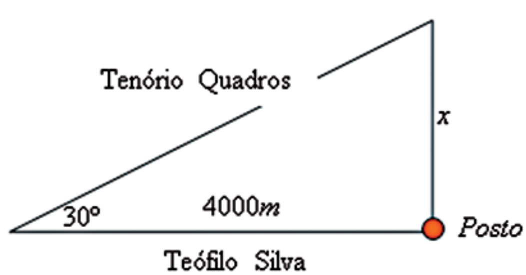
$$x = \frac{4000\sqrt{3}}{3}$$

$$x \cong 2.309{,}40m$$

$$x \cong 2{,}3km$$

Pronto, achamos a altura parcial (h), mas esta não é a altura total (H) do edifício. Se a luneta do teodolito está a 1,5 m do solo então temos que: H = 115,4 + 1,5 H ≈ 116,9 m ou ***aproximadamente 117 metros****.*

2. (CEFET) A Rua Tenório Quadros e a Avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, se cruzam segundo um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul se encontra na Avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Portanto, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a Rua Tenório Quadros, em quilômetros, é igual a:

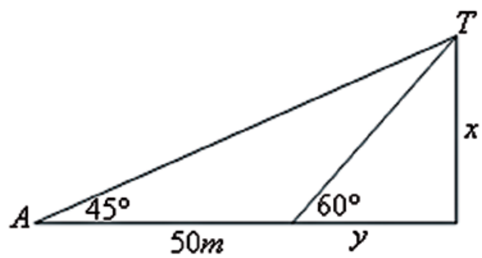


a. 4,3
b. 12,3
c. 2,3
d. 5,3
e. 8,3

Portanto, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a Rua Tenório Quadros, em quilômetros, é igual a 2,3 kilometros.

• • • • •

3. De um ponto A, um agrimensor enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de 45º. Ao se aproximar 50 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60º. Determine a altura do morro, em metros.



a. 45,43

b. 60,43

c. 71,43

d. 105,43

e. 121,43

Respostas

$$\begin{cases} tg45° = \dfrac{x}{50+y} \Rightarrow 1 = \dfrac{x}{50+y} \Rightarrow x = 50+y \\ tg60° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow 1{,}7y = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} x = 50+y & x = 1{,}7y \\ 1{,}7y = 50+y & x = 1{,}7 * 71{,}43 \\ 1{,}7y - y = 50 & x = 121{,}43 \\ 0{,}7y = 50 & \\ y \cong 71{,}43 & \end{array}$$

*Portanto, a altura do morro é **121,43 metros**.*

• • • • •