Reforço escolar · Matemática ·

Distâncias Inacessíveis de se Medir

Dinâmica 7

1ª Série | 2º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 1ª	Geométrico	Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente, dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

DINÂMICA	Distâncias Inacessíveis de se Medir
HABILIDADE BÁSICA	H05: Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
HABILIDADE PRINCIPAL	H12: Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).
CURRÍCULO MÍNIMO	Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Polígonos semelhantes	25 min	Duplas ou Trios	Individual
2	Um novo olhar...	Triângulos semelhantes e razões constantes!	25 min	Duplas ou Trios	Individual
3	Fique por dentro!	Alturas e comprimentos distantes!	25 min	Duplas ou Trios	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

Como você faz para medir a altura de uma pessoa ou o comprimento de uma sala? O mais comum é utilizarmos uma fita métrica, ou uma trena, certo? Esticamos a fita métrica na vertical, ao lado da pessoa, ou a trena na horizontal, na direção da parede. Mas como fazer para medir a altura de uma árvore? Ou um poste muito alto ou, ainda, a largura de um rio?

Para realizar estas tarefas, é preciso empregar os conceitos de uma área muito importante da matemática: a trigonometria. Primeiro vamos relembrar um conceito importante diretamente relacionado a ela: a semelhança de figuras planas. Feito isso, vamos estudar como calcular as razões trigonométricas, e como aplicá-las para resolver problemas como os citados acima.

Preparado?

Então vamos em frente!

Mãos à obra!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Polígonos semelhantes

Objetivo

Relembrar com os alunos o conceito matemático de semelhança.

Descrição da atividade

Professor, esta atividade foi elaborada para que os estudantes relembrem o conceito matemático de semelhança. Durante a realização, o aluno deverá comparar a igualdade (congruência) entre ângulos correspondentes, e a proporcionalidade entre lados correspondentes de duas figuras planas.

Atividade

1. Observem os quadriláteros representados na Figura 1:

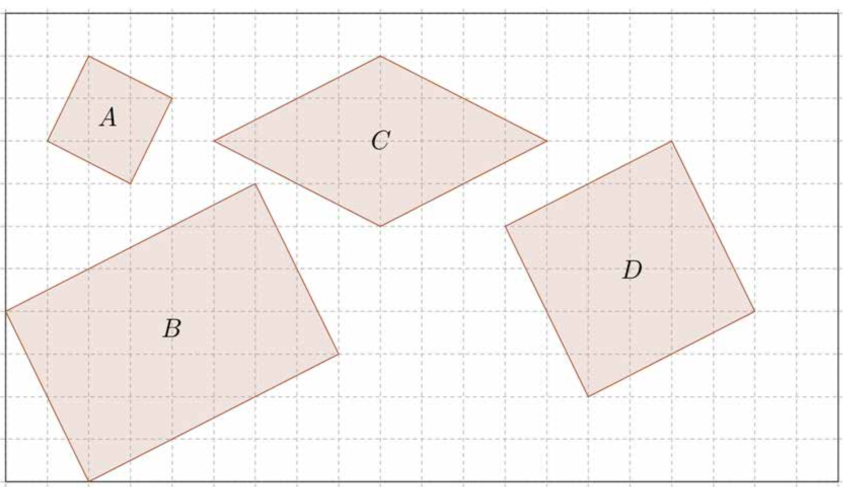


Figura 1

O quadrilátero A não é semelhante ao B, pois apesar de terem ângulos correspondentes com a mesma medida (verifique com papel vegetal ou transferidor), os lados correspondentes não são proporcionais (considere o lado de cada quadradinho como 1 unidade de medida ou utilize a régua).

O quadrilátero A também não é semelhante ao C, pois apesar dos lados correspondentes terem medidas proporcionais na razão 1:2 (Verifique!), os ângulos correspondentes não possuem a mesma medida.

Apenas o quadrilátero D é semelhante ao A. Lembre-se que: ***para que dois polígonos sejam semelhantes, duas condições devem ser verificadas: os lados correspondentes devem ser proporcionais e os ângulos correspondentes devem ter a mesma medida.***

Agora é com você!

1. Utilizando papel vegetal para os ângulos (ou o transferidor) e o lado dos quadradinhos como unidade de medida para os lados (ou a régua), relacione os pares de figuras semelhantes representadas na figura 2:

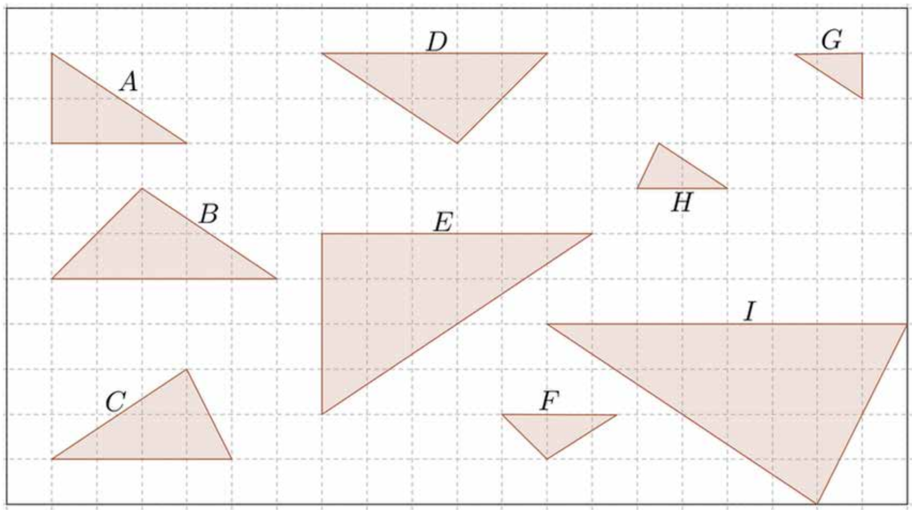


Figura 2

Resposta

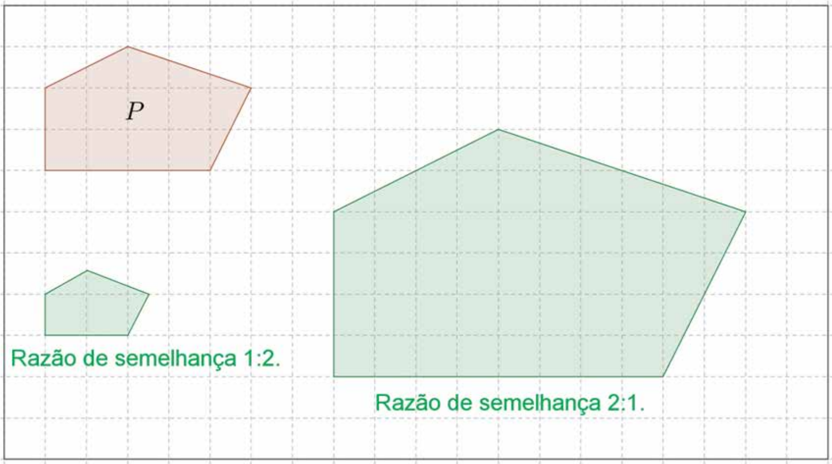
São semelhantes os triângulos A, E e G, os triângulos B, D e F, e os triângulos C, H e I.

2. A partir do polígono P representado na figura 3, desenhe na malha quadriculada dois polígonos semelhantes a ele: um maior, com razão de semelhança 2:1, e um menor, com razão de semelhança 1:2.

Figura 3

Professor

Resposta



Recursos necessários

- Encarte do aluno;
- Papel vegetal ou transferidor;
- Régua.

Procedimentos Operacionais

Professor,

- *Os alunos devem ser divididos em duplas (preferencialmente), podendo haver um eventual trio;*
- *O uso de transferidor e a régua ficam ao seu encargo providenciar.*
- *Os alunos devem se divididos em duplas (preferencialmente), podendo haver um eventual trio;*

Intervenção Pedagógica

Professor,

- *Oriente os alunos a copiarem os ângulos no papel vegetal, para compararem com os seus correspondentes no outro polígono via sobreposição. A seu critério, seus alunos poderão usar transferidor. A vantagem do papel vegetal é que os alunos não precisarão achar um* *número que representa a medida dos ângulos, bastando, apenas, verificar se o ângulo copiado "encaixa" ou não em seu correspondente. Lembre-se que com o transferidor, os alunos teriam que lidar com a imprecisão do instrumento.*

- *Pela mesma razão descrita acima, a régua pode ser utilizada para obter as medidas dos lados, mas talvez seja mais proveitoso observar a proporcionalidade ou não proporcionalidade utilizando o lado dos quadrados da malha como unidade de medida (e, porventura, as diagonais desses quadrados quando necessário).*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

25 MINUTOS

Atividade • Triângulos semelhantes e razões constantes!

Objetivo

Verificar que o seno, cosseno e tangente de um ângulo possuem valores constantes para quaisquer triângulos.

Descrição da atividade

Professor, esta atividade busca relacionar a habilidade básica e a habilidade principal, evidenciando que ao analisar triângulos semelhantes, seus lados proporcionais e seus ângulos congruentes garantem a constância das razões seno, cosseno e tangente para esses ângulos.

Atividade: Abaixo apresentamos os triângulos ABC, DEF e GHI que são semelhantes. Observando a imagem da Figura 4 e responda as perguntas a seguir.

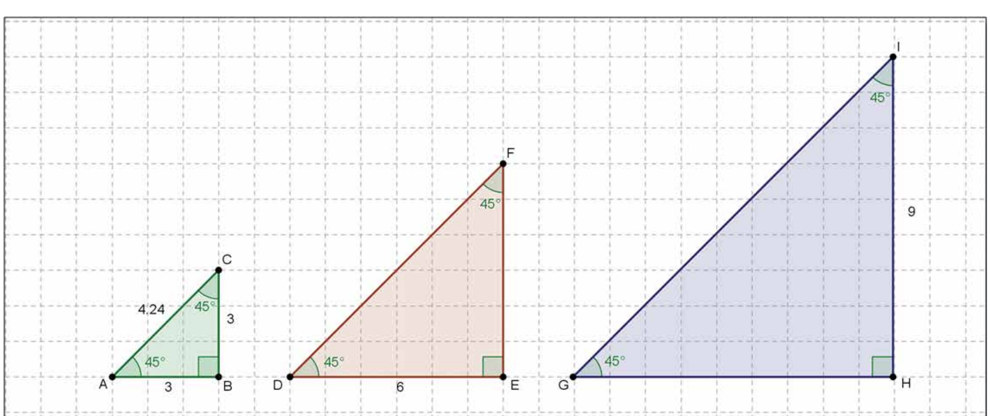


Figura 4

a. Qual a medida dos lados DF e EF do triângulo DEF? Qual a medida dos lados GH e GI do triângulo GHI?

Resposta

No triângulo DEF, o lado DF mede 8,48 e o lado EF mede 6. No triângulo GHI, o lado GH mede 9 e o lado GI mede 12,72.

b. Sabendo que o seno de um ângulo é a divisão do cateto oposto ao ângulo considerado pela hipotenusa, calcule o seno de 45° nos triângulos ABC, DEF e GHI. Quanto ele mede em cada triângulo? O que você pode observar?

Resposta

No triângulo ABC, sen 45° é aproximadamente 0,71. Nos triângulos DEF e GHI, sen 45° também é aproximadamente 0,71. Pode-se observar que, independente do triângulo, o valor para o seno de 45° não sofre nenhuma variação.

c. Calcule o cosseno e a tangente de 45° para cada triângulo. O que você observa?

Resposta

No triângulo ABC, o cosseno de 45° é aproximadamente 0,71 e a tangente, 1. No triângulo DEF, o cosseno de 45° é aproximadamente 0,71 e a tangente, 1. No triângulo GHI, o cosseno de 45° é aproximadamente 0,71 e a tangente também é 1. A constância observada para o seno de 45° também é ocorre para cosseno e tangente.

Recursos necessários

- Encarte do aluno;
- Calculadora.

Procedimentos operacionais

Professor,

- *Os alunos devem ser divididos em duplas e/ou trios, antes do início da atividade;*
- *Você pode liberar a utilização da calculadora no início da atividade;*

Intervenção pedagógica

Professor,

- *É importante estar atento se os alunos já compreendem as razões trigonométricas que estão sendo utilizadas. É comum que alguns se confundam na localização dos catetos opostos e dos catetos adjacentes. Caso seja necessário, forneça as razões:*

$$sen\alpha = \frac{cat.oposto}{hipotenusa},\ \cos\alpha = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa}\ e\ tg\alpha = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente};$$

- *Sobre o uso da calculadora, esteja atento as dificuldades que aparecem, bem como as concepções de que seu uso dificulta a aprendizagem de operações básicas;*
- *Nos itens (b) e (c) da atividade, você pode combinar com a turma o número de casas decimais a serem adotadas nas respostas ou até deixar livre, mas abordar juntamente com a turma as possíveis representações que surgirem para o valor.*

Terceira Etapa

Fique por dentro!

25 MINUTOS

Atividade • Alturas e comprimentos distantes!

Objetivo

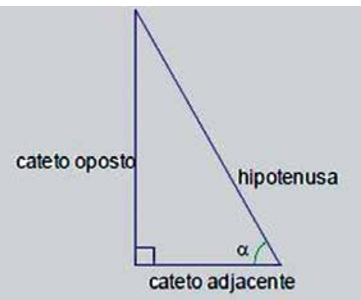
Perceber a utilidade das razões trigonométricas para calcular distâncias que não podem ser medidas diretamente com fitas e trenas métricas.

Descrição da atividade

Professor, nesta atividade os alunos deverão por em prática as razões trigonométricas para calcular distâncias inacessíveis. No problema proposto, tanto a altura do poste quanto o comprimento da corda não podem ser medidos diretamente, com uma trena por exemplo.

Vejamos uma atividade para determinar a altura de um objeto inacessível, através da Trigonometria, nela utilizamos a tangente de um ângulo. A relação matemática que nos permite determinar a altura de um edifício nos é dada pela seguinte igualdade:

$$Tangente\ de\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$



Assim, determinarmos a altura de certo edifício, procedemos da seguinte forma: (consideramos a tg(59º) $\cong$ 1,665).

$$tg(59^\circ) = \frac{\overline{AB}}{6,2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 6,2 \times tg(59^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \simeq 10,32\,m$$

$$Altura \simeq 10,32 + 1,64 = 11,96\,m$$

Atividade: A escola onde Ricardo estuda tem uma praça interna, com um poste com luminária, e cordas que se ligam do topo do poste a alguns pontos do chão da praça, como na figura 5 (fora de escala):

Matemática

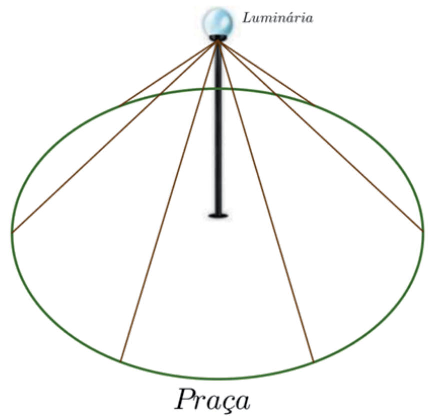


Figura 5

Seguindo as orientações de seu professor, Ricardo mediu a distância entre a base do poste e um ponto onde uma corda toca o chão, obtendo 12 m. Com o uso de um canudo e de um transferidor, Ricardo obteve a medida do ângulo entre a corda e o chão, obtendo 30°. O esquema simplificado destas medições se encontra na figura 6:

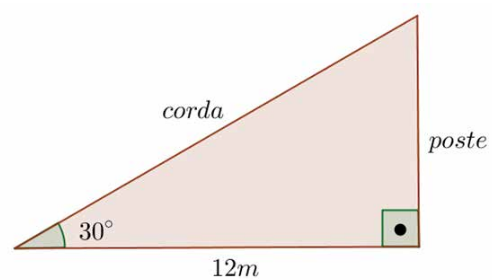


Figura 6

Como parte de um trabalho da escola, Ricardo deverá obter a altura do poste e o comprimento da corda.

Vamos ajudá-lo?

Dados: $sen 30^0 = 0{,}50$; $\cos 30^0 = 0{,}85$; $tg 30^0 = 0{,}58$.

a. Calcule a medida da altura do poste.

Resposta

No cálculo da altura do poste devemos utilizar o conceito de tangente.

$$tg\,\alpha = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adjacente} \Rightarrow tg\,30^0 = \frac{altura\ do\ poste}{12}$$

$$0{,}58 = \frac{altura\ do\ poste}{hipotenusa} \Rightarrow altura\ do\ poste = 12 \cdot 0{,}58 = 6{,}96m$$

b. Calcule a medida do comprimento da corda, do chão até o poste.

Resposta

$$\cos\alpha = \frac{cat.\ adjacente}{hipotenusa} \Rightarrow \cos 30^0 = \frac{12}{comprimento\ da\ corda}$$

$$0{,}85 = \frac{12}{comprimento\ da\ corda} \Rightarrow comprimento\, da\, corda = \frac{12}{0{,}85}$$

$$= 14{,}12m\ \ aproximadamente$$

Recursos necessários

- Encarte do aluno;
- Calculadora.

Procedimentos Operacionais

- *Os alunos devem ser divididos em duplas (preferencialmente), podendo haver um eventual trio;*
- *Os alunos devem ser orientados a trazer calculadora.*

Intervenção Pedagógica

Professor,

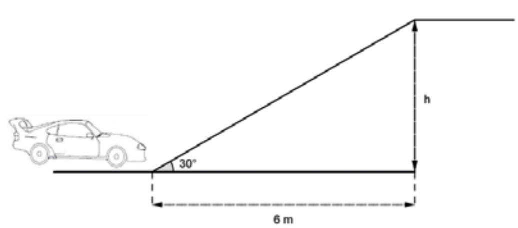
- *Na letra (a) a resposta mais direta envolve o uso da tangente do ângulo de 30°, mas pode ser que alguns alunos calculem o ângulo que falta (60°) e utilizem a tangente de 60° (que não é dada, mas algum aluno pode se lembrar da mesma como sendo). Optamos por trabalhar com números decimais, mas respostas que considerem as razões trigonométricas na forma de raízes quadradas podem e devem ser consideradas. Aproveitem e explorem o critério de suficiência da* *aproximação, ou seja, da necessidade de cada situação;*

- *O aluno pode resolver a letra (a) aplicando o cosseno de 30° (determinando, assim, a hipotenusa), e posteriormente calcular a altura do poste utilizando o Teorema de Pitágoras. Caso isso ocorra, pode haver diferenças nas respostas finais devido às aproximações feitas, por isso é importante solicitar que as duplas expliquem seu raciocínio;*
- *Na letra (b) seguem as mesmas considerações.*

10 MINUTOS

Quarta Etapa
Quiz

Questão: Para acessar um estacionamento é necessário passar por uma rampa que forma um ângulo de 30° com o solo. Ao subi-la, o carro desloca-se horizontalmente 8 m de distância, conforme o desenho.



$sen\ 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

De acordo com esses dados e o desenho, qual o comprimento e a altura da rampa?

a. 12 m e 6 m

b. 4√3 m e 2√3m

c. 6m e 12m

d. 12m e 3m

e. m e m

15 MINUTOS

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Resposta

Professor

Ao observar a figura é possível verificar que o comprimento a ser encontrado é a hipotenusa do triângulo formado pelas partes da construção da rampa e a altura da rampa é o cateto oposto ao ângulo de 30°. Assim, também se observa que a base da rampa, ou seja, o cateto adjacente tem seu valor indicado como 6 m. A partir dessas observações **é possível** *seguir vários caminhos para solucionar o problema. Um deles é utilizando a razão cosseno encontrar o comprimento da rampa e a razão tangente para encontrar a altura.*

$$\cos\alpha = \frac{cat.\ adjacente}{hipotenusa} \Rightarrow \cos 30^o = \frac{6}{comp.} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{c} \Rightarrow c = 4\sqrt{3}m$$

$$tg\ \alpha = \frac{cat.\ oposto}{cat.\ adjacente} \Rightarrow tg\ 30^o = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}m$$

Também é possível solucionar o problema utilizando a razão cosseno para encontrar o comprimento da rampa e utilizando o resultando encontrado, adotar a razão seno para encontrar a altura da rampa.

Gabarito: B

Distratores

(a) Neste item o aluno utilizou o valor de sen 30° ao invés do valor de cos 30° para encontrar o comprimento, sendo que contava apenas com o cateto adjacente e, então, encontrou o valor do comprimento da rampa errado. Assim, ao escolher a razão seno para encontrar a altura, utilizou o valor para o comprimento (hipotenusa) encontrado anteriormente e acabou calculando o valor da altura da rampa errado.

(c) O aluno que marcou este item, calculou corretamente o comprimento ao utilizar a razão cosseno de 30°. No entanto ao utilizar a razão tangente para calcular a altura, inverteu a razão cateto oposto/cateto adjacente, errando a altura da rampa.

(d) Apesar de optar corretamente pela razão cosseno para encontrar o comprimento da rampa, inverteu a razão cateto adjacente/hipotenusa. Assim, errou o valor para o comprimento da rampa. Segue que, como utilizou esse valor para encontrar a altura ao aplicar a razão seno, também errou o valor da altura da rampa.

(e) O aluno que marcou esta opção, apesar de optar corretamente pela razão cosseno para encontrar o comprimento da rampa, inverteu a razão cateto adjacente/hipotenusa e, portanto, errou o valor para o comprimento da rampa. Mas utilizou a razão tangente corretamente, então encontrou o valor certo da altura da rampa.

10 MINUTOS

Etapa Flex

Para saber +

Prezado professor,

indicamos a seguir alguns links que contém atividades que podem ser realizadas por seus alunos com a sua mediação, seja no laboratório de informática de sua escola ou seja em casa. Essas atividades abordam a habilidade principal desta dinâmica, e também a aprofundam. As mesmas foram produzidas e estão disponíveis no formato on-line pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

1. Facilitando o ensino da trigonometria: nesta página estão disponíveis alguns materiais para impressão, necessários na realização de algumas das atividades propostas no link..

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/index.html (acesso em 23/01/2013)

2. Conhecendo uma razão trigonométrica: seno de um ângulo agudo

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno01.html (acesso em 23/01/2013)

3. Razões Trigonométricas: Cosseno de um ângulo agudo e relações entre seno e cosseno

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno02.html (acesso em 23/01/2013)

4. Mais uma razão trigonométrica entre seno e cosseno: tangente de um ângulo agudo

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno03.html (acesso em 24/01/2013)

5. Construção de uma tábua de valores trigonométricos

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno04.html (acesso em 24/01/2013)

6. Brincando com teodolitos: medidas indiretas de objetos e pontos inacessíveis

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno05.html (acesso em 24/01/2013)

7. Medindo a inclinação de objetos

- http://www.uff.br/cdme/trigonometria/aluno06.html (acesso em 24/01/2013)

Professor, o material a seguir é predominantemente indicado para sua leitura.

A primeira sugestão contém atividades que podem ser aplicadas diretamente ou adaptadas a seus alunos, e estão ligadas à habilidade básica. As duas últimas se referem à teoria matemática que embasa a trigonometria, tanto no triângulo retângulo quanto em um triângulo qualquer e no círculo trigonométrico:

8. Pra que serve a matemática? - Semelhança. Autores: Imenes, Jakubo e Lellis. Editora: Atual

9. Trigonometria / Números Complexos. Autores: Manfredo Carmo, Augusto

Morgado e Eduardo Wagner. SBM

10. Vídeo-aula sobre Funções Trigonométricas, ministrada pelo prof. Paulo Cezar, no IMPA

- http://strato.impa.br/videos/2012-papmem/papmem2012_26012012_pcezar_02.flv

(acesso em 24/01/2013)

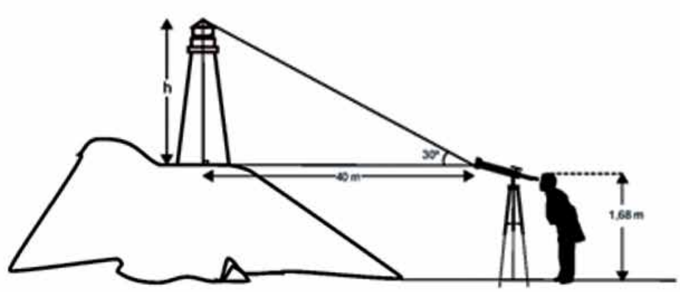
Agora, é com você!

Alunos,

A partir de agora vocês poderão utilizar os exercícios a seguir para se familiarizarem mais com as habilidades abordadas. Essas questões foram retiradas do Banco de Itens do Saerj!

Questão 1

(M120182ES) Uma pesquisadora observa o brilho de um farol no topo de um morro, conforme mostra o esquema abaixo.



Dados:

$sen\ 30º = \frac{1}{2}$

$cos\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3} = 1,73$

Esse farol está localizado a quantos metros de altura, aproximadamente, do solo?

A) 21,68 m
B) 24,75 m
C) 36,32 m
D) 41,68 m
E) 70,96 m

Resposta

Letra B

$$tg30º = \frac{h}{40}$$

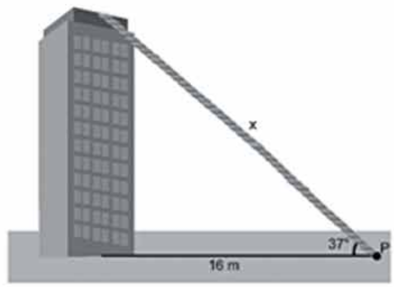
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{40}$$

$$h = \frac{40\sqrt{3}}{3} = \frac{40 \times 1,73}{3} \cong 23,067$$

$$H_{total} \cong 23,067 + 1,68 = 24,747$$

Questão 2

(M110056ES) Um fio foi colocado no alto de um prédio e em um ponto P distante da base 16 metros. O ângulo formado pelo fio e pelo segmento de reta que liga P à base do prédio é 37°, como mostra o desenho abaixo.



Dados:
sen 37° ≅ 0,6
cos 37° ≅ 0,8
tg 37° ≅ 0,75

Qual é a medida X, em metros, desse fio?

A) 12,8
B) 20,0
C) 21,3
D) 22,1
E) 26,6

Professor

Resposta

Letra B

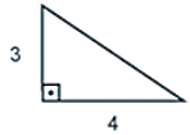
$$\cos 37^\circ = \frac{16}{x}$$

$$0,8 = \frac{16}{x}$$

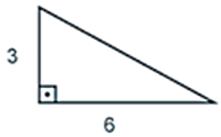
$$x = \frac{16}{0,8} = 20$$

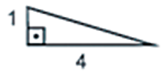
Questão 3

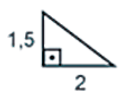
(M08044SI) Observe o triângulo retângulo abaixo, e as medidas de seus catetos:

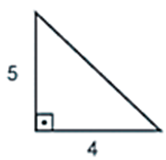


O triângulo acima é semelhante ao triângulo:

A)


B)


C)


D)


Resposta

Letra C

Por semelhança de triângulo temos:

$$\frac{3}{4} = \frac{1,5}{2} = 0,75$$