Reforço escolar · Matemática ·

Vou de lei dos cossenos ou lei dos senos?

Dinâmica 8

1ª Série | 2º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	1ª do Ensino Médio	Campo Geométrico.	Razões trigonométricas no triângulo retângulo

DINÂMICA	Lei dos cossenos ou a lei dos senos?
HABILIDADE BÁSICA	H23 – Resolver problemas envolvendo a noção de perímetro de figuras planas, com ou sem malhas quadriculadas.
HABILIDADE PRINCIPAL	C1 – Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos senos. C2 – Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos cossenos.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar os teoremas do seno e do cosseno para resolver problemas significativos.

Professor, nesta dinâmica você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ – Consórcio cederj

<table>
<tr><th colspan="2">ETAPAS</th><th>ATIVIDADE</th><th>TEMPO</th><th>ORGANIZAÇÃO</th><th>REGISTRO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Compartilhar ideias</td><td>Quanto devo correr?</td><td>15 a 20 min.</td><td>Em dupla ou trios.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Um novo olhar...</td><td>Andando de bicicleta</td><td>15 a 20 min.</td><td>Em dupla ou trios.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Fique por dentro!</td><td>Pequenas viagens, grandes negócios.</td><td>25 a 35 min.</td><td>Em dupla ou trios.</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Quiz</td><td>Quiz</td><td>10 min.</td><td>Individual</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Análise das respostas ao Quiz</td><td>Análise das respostas ao Quiz</td><td>15 min.</td><td>Coletiva</td><td>Individual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FLEX</td><td>Para Saber +</td><td colspan="4">Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica.
O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.</td></tr>
<tr><td>Agora, é com você!</td><td colspan="4">Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.</td></tr>
</table>

Apresentação

Olá professor,

Muitos problemas em que se modela por meio de triângulos, são resolvidos utilizando o Teorema de Pitágoras ou as razões trigonométricas, mas essas ferramentas matemáticas são aplicadas apenas em triângulo retângulo, certo? Mas o que fazer para resolver um problema se o triângulo não for um triângulo retângulo?

Nesta dinâmica estaremos apresentando as Leis dos Senos e a Lei dos Cossenos. Duas leis matemáticas que vão nos auxiliar a fazer mais descobertas sobre um triângulo qualquer.

Lembre-se que o Seno e o Cosseno de um ângulo foi assunto abordado em atividades anteriores, e nessa dinâmica estaremos trazendo o assunto, porém com outra aplicação, ou seja, utilizando as leis que apresentaremos.

Professor, sabemos que durante o processo de aprendizagem os alunos apresentam muitas dificuldades em perceber a diferença entre a aplicação destas duas leis e de como utiliza-las. Diante disto, as ações propostas abordam situações problemas, sobre as leis do seno e do cosseno, de maneira simples e esperamos que os alunos percebam as diferenças facilmente.

Vamos encontrar um bom caminho para usar essas Leis?

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Quanto devo correr?

Objetivo

Relembrar o conceito de perímetro por meio de resolução de problemas.

Descrição da atividade

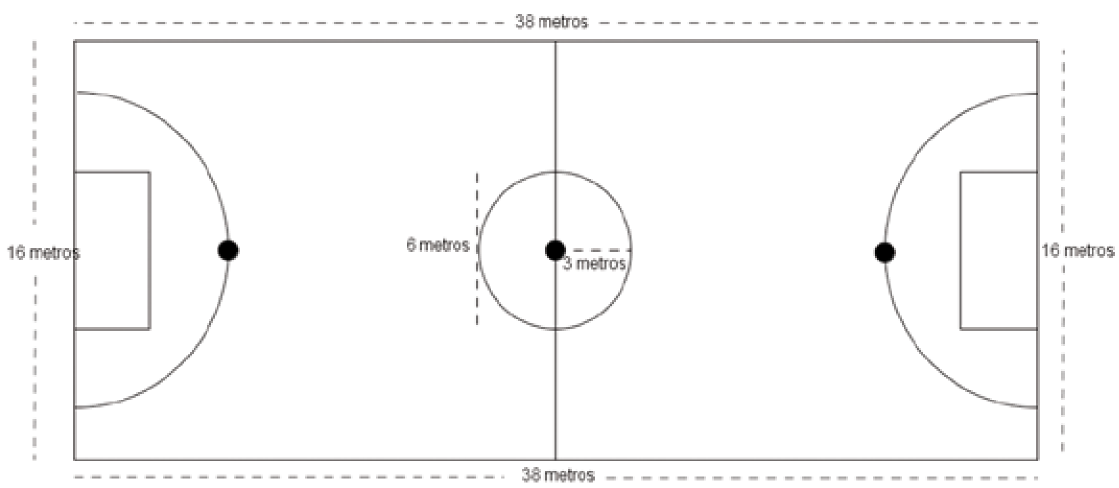
A situação problema a seguir utilizará uma quadra de futebol de salão tal como as que estão em algumas escolas. Com as marcações (dimensões) de uma quadra de futebol de salão, faremos com que nosso personagem possa achar a melhor forma de fazer seus exercícios antes de uma partida de futebol com seus amigos.

Vamos começar?

João Carlos era um esportista de fim de semana. Todo sábado, pela manhã, ele se reunia com os amigos do bairro onde morava para jogar bola, em uma quadra oficial que ficava perto de sua casa. Para se aquecer João Carlos corria em volta do campo pelo menos 3 vezes e para saber quantos metros ele correu, ele utilizava a matemática. Mas como?

Ele utilizava o perímetro, que é a soma de todos os lados da figura. Mas, alguns dias após uma semana cansativa, ao invés de se aquecer correndo em volta do campo, ele apenas corria 4 vezes a metade da quadra.

A seguir apresentamos uma planta da quadra e suas dimensões.



Com os dados que conhecemos vamos começar a atividade?

Mãos à obra!!

Atividade 1

Vamos ajudar ao João Carlos descobrir quanto ele correu?

a. Se você perceber, a quadra que João Carlos joga com seus amigo é retangular. Qual seria o perímetro, ou seja, a soma de todos os lados desse retângulo?

Resposta

38 m+38 m+16m+16 m = 108 m

• • • • •

b. Como foi dito, João Carlos corria 3 vezes todo a quadra para se alongar. Quantos metros ele corre no total?

Resposta

3 × 108 = 324 m

• • • • •

c. A quadra é dividida em duas partes retangulares iguais, com 19 m de comprimento e 16 m de largura, então, qual o perímetro de cada um desses retângulos?

Resposta

19+19+16+16 = 70 m

• • • • •

d. Se João Carlos corria 4 vezes a metade da quadra, quantos metros ele correu?

Resposta

4 × 70 = 280 m

• • • • •

e. Qual é a diferença, em metros, da corrida que João Carlos faz normalmente da que ele realiza quando está cansado?

Resposta

324 m – 280 m = 44 m

• • • • •

Atividade 2

Um amigo de João Carlos, uma vez o perguntou sobre suas corridas. João Carlos explicou que nos dias em que se sentia mais cansado corria de forma diferente. Seu amigo o contou que corria, apenas, 10 vezes em volta do circulo central da quadra. João Carlos falou que não era vantagem, pois seu amigo corria uma distância menor. Ele provará isto por meio de um cálculo simples.

Vamos ajudá-lo?

Para começar, primeiro precisamos saber o comprimento da circunferência. Para isso vamos utilizar a fórmula do comprimento da circunferência:

$$C = 2\pi r$$

Onde "C" é o valor do comprimento da Circunferência, π vale aproximadamente 3 e r é o valor do raio da circunferência, ou seja, o segmento de reta que parte do centro e vai até o lado da circunferência.

a. Qual seria o comprimento da circunferência central da quadra?

	$C = 2\pi r$
	$C = ?$
$C = 2\pi r$	$\pi = 3$
$C = ?$	$r = 3$
$\pi =$	$C = 2 \cdot 3 \cdot 3$
$r =$	$C = 18m$

b. Se o Amigo der 10 voltas em torno do campo, quantos metros a mais João Carlos correu?

Resposta

*10 * 18 = 180m*

280 -180 = 100 m

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

A atividade deve ser realizada em dupla, podendo ocorrer um trio. Já as anotações devem ser individuais, de modo que os alunos possam discutir o problema.

Se sua escola possui quadra esportiva você pode realizar esta atividade in loco.

• • • • •

Intervenção Pedagógica

Caro Professor, é importante que os alunos percebam que, nesta atividade, utilizamos além do perímetro de um retângulo o comprimento da circunferência. Acreditamos que é importante evidenciar e relembrar aos alunos esses dois conceitos. Muitas vezes o aluno não está atento as substituições e não consegue relacionar comprimento da circunferência com perímetro de uma figura plana. Se necessário recorra para história da matemática para explicar o número π *e o comprimento da circunferência.*

Se for realizar a atividade na quadra de sua escola, lembre-se que necessitará de uma trena ou fita métrica para realizar as medidas.

• • • • •

Segunda Etapa
Um novo olhar

Atividade • Andando de bicicleta

Objetivo

Aplicar a Lei dos Cossenos através da resolução de problemas.

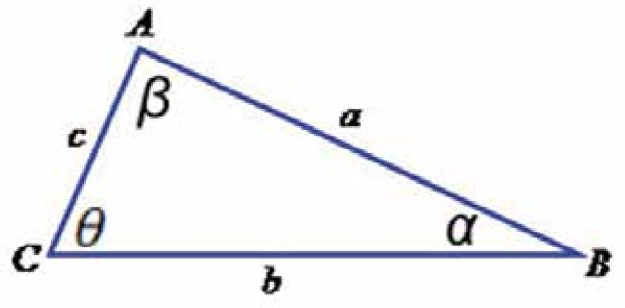
Descrição da atividade

A atividade proposta busca explorar uma situação hipotética, onde duas amigas andam de bicicleta em uma pista circular. Exploraremos as questões métricas, em especial as distâncias e deslocamentos na circunferência. A atividade procura trabalhar a Lei dos Cossenos, porém é importante relembrar outros conceitos, como o comprimento da circunferência, a área do círculo e as transformações de dm^2 para m^2.

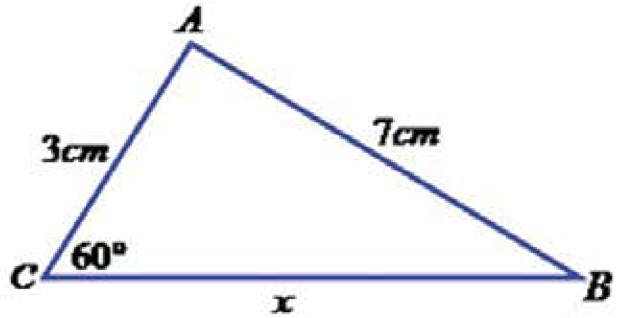
Para facilitar a compreensão inicial, apresentamos algumas informações sobre a Lei dos Cossenos, veja a seguir.

Utilizamos a lei dos cossenos em situações envolvendo triângulos não retângulos, isto é, triângulos quaisquer. Lembre-se que nesses triângulos não há ângulo reto e portanto, não valem as relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente. Nestes casos, para conseguirmos calcularmos os valores de ângulos e as medidas de lados utilizamos a chamada lei dos cossenos. Ela é expressa pela seguinte lei de formação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\theta$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$$



Para compreender melhor a situação apresentamos o exemplo abaixo. Utilizando a lei dos cossenos, determine o valor do segmento x no triângulo a seguir:



$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^o$$

$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2 * 3 * x * \cos 60^0$$

$$49 = x^2 + 9 - 6 * x * 0{,}5$$

$$49 = x^2 + 9 - 3x$$

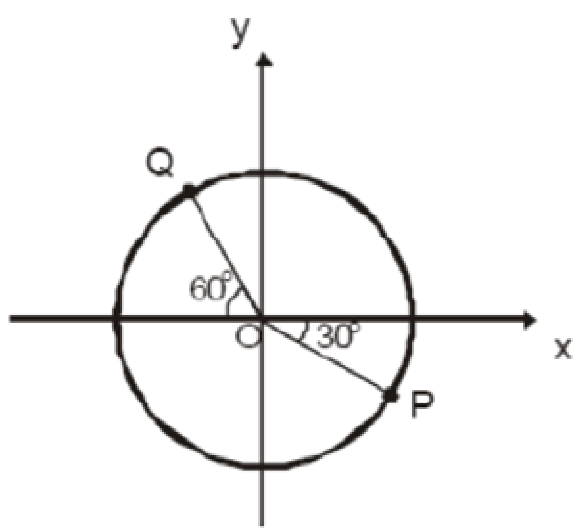
$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Resolvendo a quação do 2º grau, temos que: x' = 8 e x" = – 5. Mas como tratamos de medidas, iremos descartar x" = – 5. Então o valor de x no triângulo é 8 cm.

Agora, partindo do que viu anteriormente resolva a atividade abaixo.

Atividade

Patrícia e Quely são duas amigas e resolveram andar de bicicleta numa pista cuja forma é uma circunferência. Para facilitar a representação de cada uma delas vamos adotar os pontos P e Q representando as respectivas Patrícia e Quely. Na imagem abaixo, P e Q pertencem a circunferência de centro na origem e raio 1 dm.



Com base nas informações, responda os itens abaixo.

a. Qual é a distância, em metros, entre Patrícia e a origem?

Resposta

A distância da Patrícia até a origem é o próprio raio.

Como o raio vale 1dm, então a distância em metros será de 10 metros.

b. Qual é o comprimento, em decimetros, da pista?

Resposta

O comprimento da pista é dado por $C = 2\pi r = 2.3,14.1 = 6,28\,dm$

c. Qual é a área, em metros quadrados, da pista?

Resposta

A área da pista é dada por $A = \pi . r^2 = 3{,}14 . 1^2 = 314 m^2$

d. Qual é a distância, em decimetros, entre Patrícia e Quely?

Resposta

Para acharmos a menor distância entre os pontos P e Q na figura, construiremos um triângulo POQ cujo ângulo obtuso é de 150^0 *e os lados do triângulo é o raio da circunferência. Considerando o valor do raio da circunferência do problema igual a 10 dm.*

Nesse caso, utilizaremos a Lei dos Cossenos, chamaremos de x a distância a ser procurada. Sabemos que $\cos 150^0 = -\cos 30^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$X^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (-\sqrt{3}/2)$$
$$X^2 = 100 + 100 - 200 \cdot (-\sqrt{3}/2)$$
$$X^2 = 200 + 100\sqrt{3}$$
$$X^2 = 200 + 170$$
$$X^2 = 370$$
$$X = \sqrt{370}$$

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

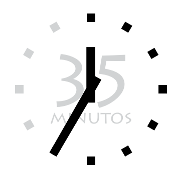
- *Professor, esta atividade foi programada para ser efetuada em duplas e/ou trios, porém os registros devem ser individuais.*

- *Caro Professor, este é um bom momento para trabalhar conceitos de área e o comprimento da circunferência assim como, transformações das unidades de área.*
- *Nessa etapa, os alunos podem não se lembrar da unidade de comprimento, assim como os seus múltiplos e submúltiplos. O mesmo pode ocorrer no caso de unidades de área e a de volume. Caso isso ocorra com a sua turma, acreditamos ser interessante relembrar esses conceitos com os seus alunos.*
- *Professor dê uma atenção especial ao exemplo que se utiliza da Lei do cosseno.*
- *Os alunos podem sentir dificuldades na redução ao primeiro quadrante, pois irão necessitar de calcular o cosseno do ângulo de 150 graus, nesse caso, também achamos importante rever esse conceito com a sua turma.*

• • • • •

Terceira Etapa

Fique por dentro!



Atividade • Pequenas viagens, grandes negócios

Objetivo

Resolver uma situação problema envolvendo o conceito de Lei do Seno.

Descrição da atividade

A atividade proposta procura calcular distâncias em triângulos não retângulos. Nela é utilizada a viajem de avião de certo empresário, e a partir de uma imagem do *Google Maps*, é traçado um triângulo, no qual iremos utilizar a Lei dos Senos para calcular o solicitado e, ainda, relembrar o conceito de perímetro de um polígono.

Para fazer uma viagem de negócios, um empresário precisa sair de sua cidade, Brasília, e visitar Lima, no Peru. Na viagem de ida, terá que efetuar uma parada (escala) na capital da Paraguai, Asuncion, para resolver alguns negócios pendentes.

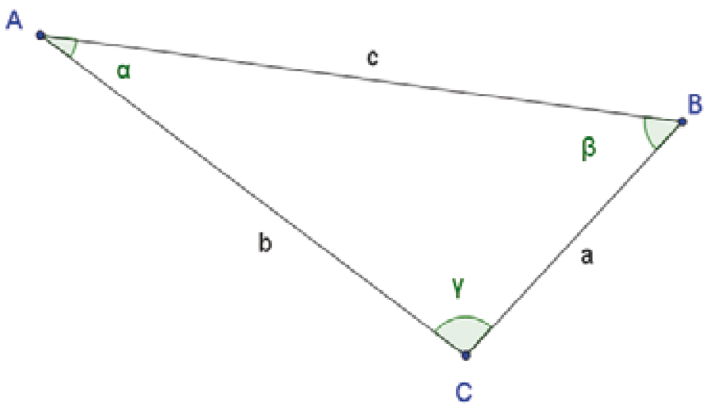
Na viagem de volta, ele conseguiu um voo sem conexões, ou seja, voltaria de Lima direto para Brasília. Para saber qual seria o trajeto, pegou um mapa na internet e desenhou, com a ajuda do *software* Geogebra, um triângulo. Na ação teve que considerar os triângulos como planos. Veja que as capitais foram representadas pelos vértices da figura abaixo. Utilizando esse recurso o empresário pode calcular aproximadamente distâncias entre as cidades.

Mapa Google

Fonte: https://maps.google.com.br/maps?hl=pt&safe=off&q=mapa+am%C3%A9rica+do+sul&ie=UTF-8&hq=&hnear=0x9409341c355d34b5:0x69d40ccfc9c6e32b,Am%C3%A9rica+do+Sul&gl=br&ei=oWQSUcrFMKaE0QGv_IHYDg&ved=0CCkQ8gEwAA

a. Sabendo os ângulos, seria possível descobrir a distância entre cada cidade. Bem, quando temos o valor de pelo menos dois ângulos e de seus senos, e o valor de pelo menos um dos lados, poderemos utilizar a Lei de Seno para descobrir o outro lado.

A Lei dos senos funciona assim:



Seja ABC um triângulo qualquer cujos ângulos α, β e γ desse triângulo e a, b e c são lados que são opostos dos respectivos ângulos conforme figura acima.

Todo o triângulo as razões entre as medidas dos lados e os senos dos respectivos ângulos opostos a esses lados são proporcionais.

Lei dos Senos

$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$$

Neste caso, ele sabe a distância entre Brasília e Asuncion, ela é de aproximadamente 1460 km, e sabe, também, o valor do ângulo oposto a este lado que é de 30^0. Para sabermos a distância entre Asuncion e Lima, podemos simplesmente utilizar a Lei do Seno.

Agora, com as informações fornecidas, complete as lacunas e vamos descobrir, juntos, a distância entre Asuncion e Lima: (obs.: utilize sen 53º = 0,8 e sen 30º = 0,5). Você pode precisar também deste valor: sen97º = 0,99

Resposta

$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}$$
$$a=1460$$
$$\alpha=30^{o}$$
$$b=?$$
$$\beta=53^{o}$$
$$\frac{1460}{sen30^{o}}=\frac{b}{sen53^{o}}$$
$$\frac{1460}{0,5}=\frac{b}{0,8}$$
$$0,5b=1460\bullet 0,8$$
$$0,5b=1168$$
$$b=\frac{1168}{0,5}$$
$$b=2336km$$

b. Com as informações fornecidas, você conseguiria descobrir a distância entre Lima e Brasília?

c. Utilizando os resultados anteriores, quantos quilômetros aproximadamente ele gastaria nesta viagem?

Professor

Resposta

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma}$$
$$a = 1460$$
$$\alpha = 30^{\circ}$$
$$c = ?$$
$$\gamma = 97^{\circ}$$
$$\frac{1460}{sen30^{\circ}} = \frac{c}{sen97^{\circ}}$$
$$\frac{1460}{0,5} = \frac{c}{0,99}$$
$$0,5c = 1460 \bullet 0,99$$
$$0,5c = 1445,4$$
$$c = \frac{1445,4}{0,5}$$
$$c = 2890,8km$$

$$1460km + 2336km + 2890,8km =$$
$$= 6686,8km$$

Recursos Necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, esta atividade foi programada para ser efetuada em duplas e/ou trios, porém o registro deve ser individual.*

- *Professor, os alunos podem nessa atividade apresentar dificuldades em realizar as multiplicações e divisões de números decimais. Achamos interessante uma orientação a cada grupo sobre essas operações;*
- *Professor dê atenção ao conceito de Lei do seno e oriente os alunos no exemplo apresentado;*
- *A utilização de um ângulo diferente nos notáveis, 30º, 45º e 60º foi proposital. Acreditamos que é necessária a aproximação com situações reais e nesta circunstâncias a ocorrência de ângulo variados é constante.*

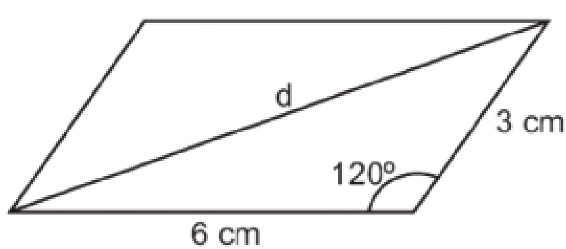
Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

Questão • (SAERJINHO/2011)

Observe o paralelogramo abaixo.



Dados:

$\text{sen}120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Qual é a medida da diagonal d desse paralelogramo?

a. $3\sqrt{7}$ cm

b. $3\sqrt{5}$ cm

c. $3\sqrt{3}$ cm

d. $\left(45+18\sqrt{3}\right)$cm

e. $\left(45-18\sqrt{3}\right)$cm

QUINTA ETAPA
ANÁLISE DAS RESPOSTAS DO QUIZ

15 MINUTOS

Resposta

A resposta correta é a alternativa (a)

Usando a lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$
$$d^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 120^o$$
$$d^2 = 9 + 36 - 36 \cdot (-1/2)$$
$$d^2 = 45 + 18$$
$$d^2 = 63$$
$$d = \sqrt{63}$$
$$d = 3\sqrt{\ }$$

Distratores:

– O Aluno que marcou a alternativa (b) utilizou o Teorema de Pitágoras.

– O aluno que marcou o a alternativa (c), cometeu um engano na regra de sinais no momento da multiplicação.

– o aluno que optou pela opção (d) inverteu o valor do cosseno pelo seno.

– o aluno que optou pela opção (e) além de inverter o valor do cosseno polo seno, também cometeu engano na regras de sinais.

• • • • •

ETAPA FLEX
PARA SABER +

A seguir apresentamos alguns links para auxiliá-lo na consolidação deste conhecimento matemático. Não deixe de ver cada um deles, certo?

1. PERSPECTIVAS: MATEMÁTICA – EPISÓDIO 02 – GEOMETRIA: A MATEMÁTICA DO ESPAÇO

   http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=3317

   Geometria: A Matemática do Espaço – No segundo vídeo da série Perspectivas Matemática são apresentados vários objetos e edificações em diversas cidades do país e do mundo, destacando suas formas e ângulos.

   - Duração: 20 minutos

- Série: Perspectivas matemáticas
- Palavras chave deste vídeo: perspectivas, matemática, sistemas, dietas matemáticas, equação, fórmula, tabelas, gráficos, balança, linear, geometria, ângulos, objetos, edificações, linhas, retas, formas, aprendizagem e gestão.

2. http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31102

Objetivo

Proporcionar o estudo e a compreensão do teorema dos senos, a fim de que sua aplicação na resolução de problemas tenha significado para o aluno.

Descrição

A animação apresenta, por meio da decomposição de um triângulo escaleno em dois triângulos retângulos, que em um triangulo planar seus lados são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos apresentando, assim, a lei dos senos ou teorema dos senos

Observação

Para visualizar esse recurso é necessário instalar o Flash Player. Disponível em: http://get.adobe.com/br/flashplayer/?promoid=BUIGP

3. Laboratório de informática (2 aulas)

   http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=5027

   Professor, o vídeo apresentado contém todas as informações sobre o assunto, mas caso você queira que os alunos façam uma leitura sobre o assunto, a página apresenta o assunto de uma forma bem didática.

   http://www.fisicaecidadania.ufjf.br/conteudos/outros/lei_dos_cossenos/lei_dos_cossenos.html

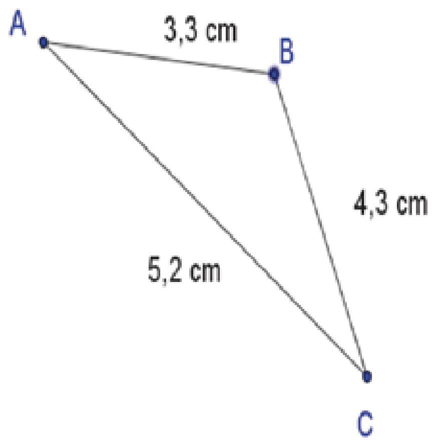
   Outra boa sugestão para a dedução da fórmula da "Lei dos cossenos" pode ser encontrada em atividades on-line no link:

   http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/lei_cossenos.html

Agora, é com você!

1. Encontre o perímetro dos polígonos abaixo:

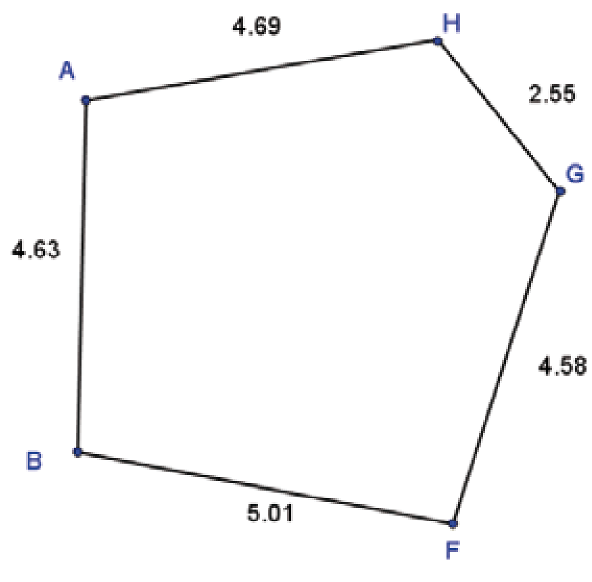
a.



Resposta

5,2 + 3,3 + 4,3 = 12,8

b.

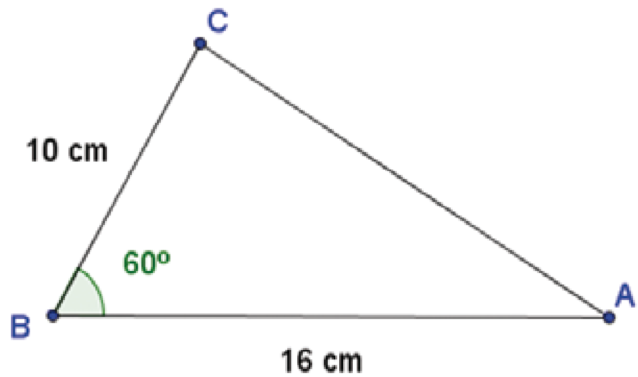


Resposta

4,69 + 4,63 + 5,01 + 4,58 + 2,55 =

= 21,46 u.p.

2. Utilizando a Lei dos Cossenos, encontre o valor de x:



Obs: Utilize cos 60⁰ = 0,5.

Resposta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot sen\alpha$$

$$a^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot sen60^\circ$$

$$a^2 = 100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 0,5$$

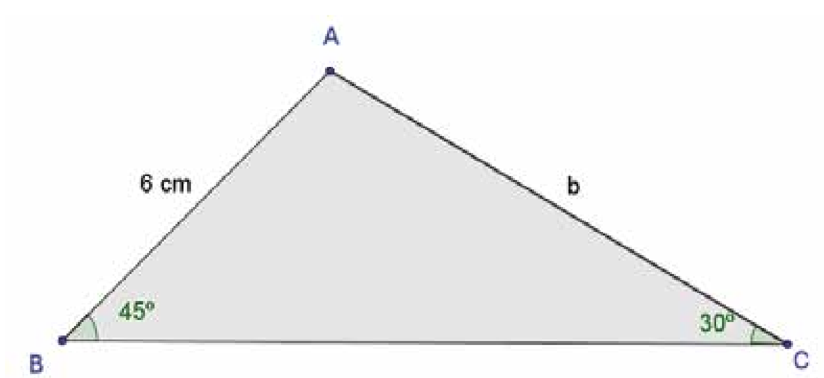
$$a^2 = 356 - 160$$

$$a^2 = 196$$

$$a = \sqrt{196}$$

$$a = 14$$

3. Utilizando a Lei dos Senos, encontre o valor de "b":



Obs.: Utilize $cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos30^\circ = \frac{1}{2}$

Professor

$$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{b}{sen\beta}$$

$$c = 6$$

$$\gamma = 30^{o}$$

$$b = ?$$

$$\beta = 45^{o}$$

$$\frac{6}{sen30^{o}} = \frac{b}{sen45^{o}}$$

$$\frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$2b = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 2 \bullet \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 6\sqrt{2}$$