Reforço escolar · Matemática ·

Professor

Pulos que formam sequências!

Dinâmica 1

2º Série | 2º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 2ª	Numérico Aritmético	Regularidades numéricas: sequências

DINÂMICA	Pulos que formam sequências!
HABILIDADE BÁSICA	H44 – Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão).
HABILIDADE PRINCIPAL	H41 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).
CURRÍCULO MÍNIMO	Identificar sequências numéricas, obter a expressão algébrica do seu termo geral.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Saltos na reta	15 a 25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar ...	Representando formas e padrões	20 a 25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Contar e tabular para organizar	20 a 25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos, com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro professor,

Nesta dinâmica, iniciamos o estudo de padrões para o estudo de sequências. Na etapa 1, fazemos uma revisão na qual abordamos as operações de multiplicação e divisão, onde o enfoque dado à divisão é o processo de subtrações sucessivas. Na etapa 2, os alunos devem observar diferentes padrões figurados, relatar o que ocorre e iniciar a escrita numérica das sequências para então, na etapa 3, observarem a relação dos termos em função da posição. Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

25 MINUTOS

Atividade • Saltos na reta

Objetivo

Revisar as operações de multiplicação e divisão.

Descrição da atividade

Professor, nesta atividade pretendemos revisar o processo de multiplicação e de divisão, identificando-as como operações inversas. Além disso, exploramos a ideia de posicionamento de números naturais na reta numérica, acreditando que assim possamos também contribuir para que o aluno, por meio do jogo, possa vivenciar a construção de uma sequência numérica. Veja a proposta a seguir.

Parte I – Saltando na reta

Vamos jogar!

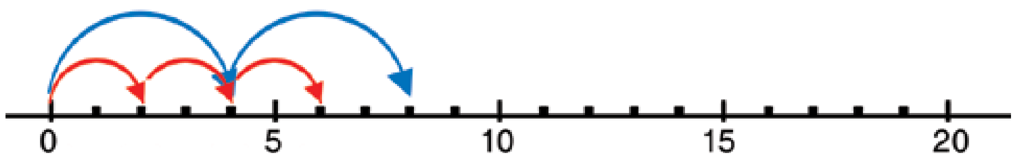
Você e seus colegas têm o objetivo de chegar o mais longe possível! Para ajudá-los nessa missão, vocês devem imaginar botas que possam dar pulos de comprimentos variados. Imaginem também que cada um dos integrantes de seu grupo calce uma dessas botas.

Veja as regras do jogo

- Seu grupo receberá do seu professor uma folha contendo três retas numéricas, uma para cada partida, e uma sacola com cartões numerados de 1 a 6.
- Para cada partida, cada aluno deve sortear um cartão numerado e recolocá-lo na sacola. Este primeiro número sorteado indica o número de pulos que sua "bota" dará.
- Um novo sorteio deve ser realizado, no qual cada participante sorteia um número referente ao comprimento do seu pulo. O cartão deve ser recolocado para que os outros participantes realizem o sorteio.
- Cada jogador deve ter uma cor de caneta diferente dos demais para traçar na reta numérica seus respectivos pulos.
- O jogo deve ter 3 partidas. O aluno vencedor será o que "calçar a bota" que leva mais longe o maior número de partidas.

Por exemplo, num jogo entre dois alunos:

	Aluno A	Aluno B
1º sorteio - número de pulos	2	3
2º sorteio - comprimento do pulo	4	2



O aluno A dá 2 pulinhos de tamanho 4, chegando ao 8. Já o aluno B dá 3 pulinhos de tamanho 2, atingindo o 6. Logo, o aluno A ganhou essa partida.

a. Registre na tabela a seguir as jogadas do seu grupo e indique o vencedor.

	Aluno A ____________	Aluno B ____________	Aluno C ____________	Aluno D ____________
1º sorteio Número de pulos				
2º sorteio Comprimento do pulo				

Vencedor da partida 1: ___________________________________

Vencedor da partida 2: ___________________________________

Vencedor da partida 3: ___________________________________

Vencedor do jogo: _______________________________________

Resposta

A resposta varia de acordo com as jogadas feitas pelos alunos.

Professor

b. Vocês saberiam dizer quem ganha uma partida, sem marcar na reta?

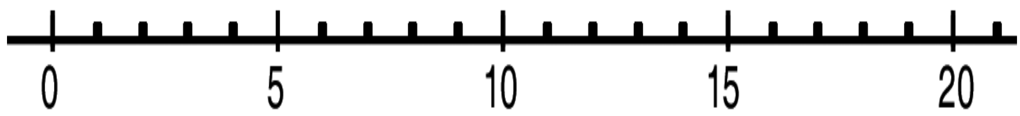
Resposta

A resposta é pessoal. A ideia é que o aluno perceba a ação multiplicativa.

• • • • •

Parte II – Voltando ao início

1. Imagine que você se encontre no número 8.



a. Você consegue voltar ao zero dando pulos de qualquer tamanho? Troque ideias com seus colegas, pensando nas diversas possibilidades.

Resposta

Os alunos devem discutir para concluir que nem sempre é possível. Eles podem ver que, por exemplo, não é possível voltar ao zero com pulos de tamanho 3.

• • • • •

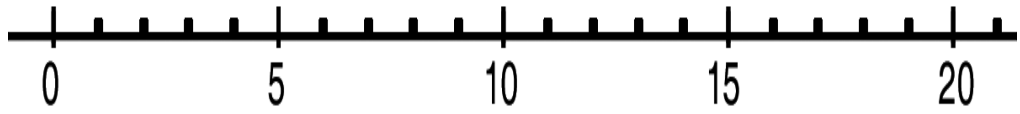
b. Quais são os tamanhos de pulos que permitem que você chegue exatamente no zero?

Resposta

São os divisores de 8, ou seja, 1, 2, 4 e o próprio 8.

• • • • •

2. Agora, imagine que você esteja no número 17.



a. É possível chegar no zero, dando pulos de tamanho 4? Por quê?

Resposta

Não é possível, pois quatro não é divisor de 17.

• • • • •

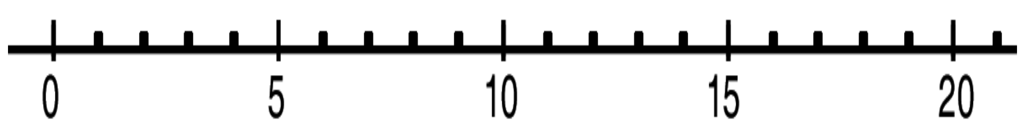
b. Qual é o número mais próximo do zero a que você chega? Tente apresentar uma justificativa para o número em que você parou.

Resposta

O número mais próximo que é possível atingir é o 1. Quando dividimos 17 por 4 encontramos o quociente igual a 4 e o resto 1, ou seja, é possível dar 4 pulos de tamanho 4 e atingir o 1.

• • • • •

3. Preencha a tabela a seguir, observando as diversas situações, se necessário, use a reta.



POSIÇÃO INICIAL	COMPRIMENTO DO PULO	NÚMERO DE PULOS	POSIÇÃO FINAL
8	4	2	0
12	4	3	0
13	2	6	1

16	2	8	0
18	5	3	3
19	5	3	4

Recursos necessários:

- Encarte do aluno
- Folha com três retas numéricas para cada grupo, disponível no anexo
- Sacola com os cartões numerados de 1 a 6, recortados para cada grupo
- Canetas com cores diferentes para cada jogador em cada grupo

Procedimentos operacionais

- *Organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.*
- *Recorte os cartões previamente e distribua uma sacola com os 6 cartões para cada grupo, juntamente com a folha com as três retas numéricas.*
- *Oriente os alunos a utilizarem canetas de cores diferentes para a realização da parte I.*

Intervenção pedagógica

- *Antes de começar o jogo, desenhe no quadro alguns movimentos da "bota" para orientar seus alunos e chame atenção para o preenchimento da tabela, bem como, o que cada sorteio representa.*
- *A pergunta do item b da parte I é o momento para que os alunos percebam que ganha quem obtém o produto maior, nesse sentido, é interessante retomar com a turma o significado da multiplicação.*
- *Para a parte II, oriente os alunos a fazerem as flechas em sentido contrário, uma vez que se está voltando.*
- *No item 1, os alunos podem ter dificuldade em perceber que os pulos possíveis são os divisores de 8, nesse caso, explore esse fato com a turma sempre tentando aproveitar o raciocínio dos alunos.*

- *Já no item 2, os alunos devem perceber que 4 não é divisor de 15: esteja atento a este fato e levante essa discussão com a turma.*
- *Você pode mostrar aos alunos que ao dividir 17 por 4, obtemos 4 como quociente e 1 como resto e que o quociente representa a quantidade de pulos e o resto, o número no qual paramos.*
- *Para o preenchimento da tabela o entendimento do quociente e do resto como a quantidade de pulos e a posição final, respectivamente, é fundamental, por isso, se necessário faça alguns exemplos com a turma na lousa, marcando na reta e relacionando com a divisão.*
- *O aluno muitas vezes percebe que a multiplicação é uma soma de parcelas iguais, contudo, a ideia de divisão como subtrações sucessivas não é muito comum entre eles e esse é um bom momento para explorar esse fato.*

Professor

Segunda etapa
Um novo olhar

Atividade • Representando formas e padrões

Objetivo

Reconhecer padrões em uma sequência.

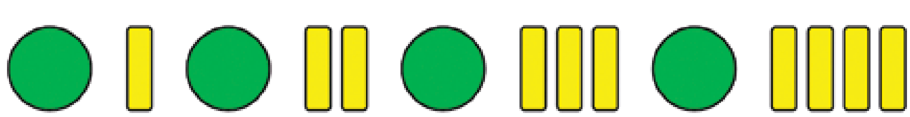
Descrição da atividade

Nesta atividade são apresentadas algumas figuras dispostas em forma de sequência, e em cada uma delas há um padrão específico. O objetivo é que os alunos reconheçam padrões através da lógica das sequências. Veja a proposta.

Observe as sequências de formas geométricas e responda às questões.

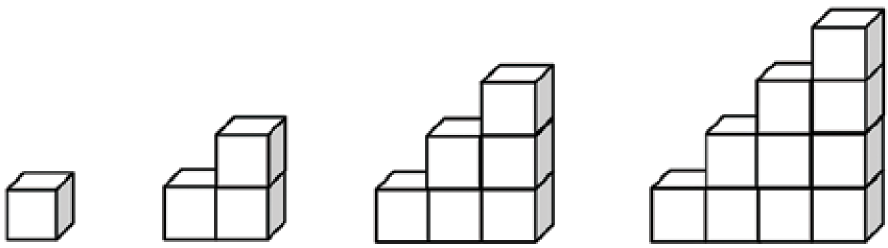
Sequência 1:

Sequência 2:

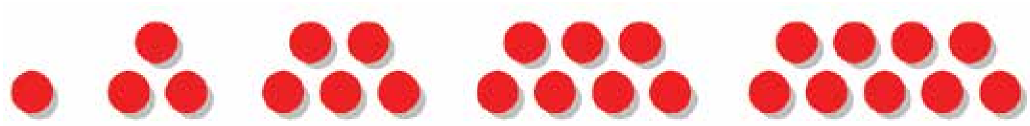


Sequência 3:

Sequência 4:



Sequência 5:



1. Observe a sequência 1. Você consegue perceber algum padrão entre os triângulos? Qual?

Resposta

Os alunos devem perceber que a sequência é formada por dois triângulos com base voltada para baixo seguidos de dois com base voltada para cima.

2. Agora analise a sequência 2. Qual padrão podemos perceber na disposição dos círculos e dos retângulos? Discuta com seus colegas sobre isso.

Resposta

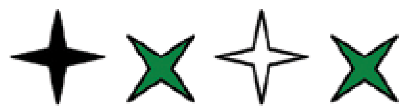
Os alunos devem perceber que o número de retângulos aumenta de uma unidade, enquanto o número de círculos permanece constante.

3. Na sequência 3, você seria capaz de continuar a sequência de figuras geométricas?

Tente continuar desenhando mais quatro elementos.

Você e seus colegas desenharam as mesmas figuras? Troquem ideias.

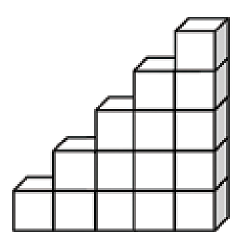
Resposta



4. Sobre as sequências 4 e 5, tente completá-las, desenhando o próximo elemento. Veja se seus desenhos coincidem com os de seus colegas.

Resposta

Sequência 4:



Sequência 5:

5. Observando a sequência 2, podemos escrever a seguinte sequência numérica (1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4,...), que indica a quantidade de círculos e retângulos em cada posição.

Escreva uma sequência numérica associada a cada uma das sequências 4 e 5.

Resposta

A sequência 4 pode ser representada pela sequência numérica (1, 3, 6, 10, ...) e a sequência 5, por (1, 3, 5, 7, 9, ...).

• • • • •

6. Nos itens anteriores, você observou as sequências figuradas e desenhou o próximo elemento. Agora, você deve observar como os números se dispõem nas sequências 4 e 5 e descrever como é possível obter o próximo número.

Resposta

Para obter o próximo número da sequência 4 devemos somar ao elemento anterior uma quantidade igual à posição, por exemplo, para obter o a_5*, fazemos* $a_4 + 5$*.*

Já a sequência 5 está crescendo somando-se sempre 2 unidades ao elemento anterior.

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Procedimentos operacionais

- *Continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*

• • • • •

Intervenção pedagógica

- *Durante toda a atividade, é importante que o aluno perceba, mesmo que implicitamente, que é fundamental que ele entenda como seu raciocínio se estrutura para que ele possa enfrentar as diversas situações que lhe forem propostas. Portanto, procure sempre valorizar o pensamento do aluno para que ele seja cada vez mais independente na estruturação de seu raciocínio.*
- *No item 5, os alunos podem ter dificuldade em escrever as sequências numéricas. Isso pode se dar por dois motivos: por não entenderem como a sequência figurada se organiza, ou seja, qual é o primeiro ele-*

mento, qual é o segundo e também por não associarem a quantidade de figuras ao elemento numérico. Esteja atento a esses detalhes e explique-os aos alunos.

- *No item 6 é interessante explorar a maneira com a qual os alunos descreverão as sequências. Os alunos devem observar o que varia de um elemento para o outro para descrever o próximo. É importante que eles percebam que estão padronizando desde o início, contudo agora pedimos que ele registre isso através de uma representação numérica de sequências. É fundamental que eles entendam também que dois registros distintos podem estar associados ao mesmo objeto matemático. Você pode aproveitar a oportunidade para conduzir uma discussão que possibilite que os alunos percebam que o registro numérico pode favorecer a associação de cada elemento à sua posição.*
- *Vale observar que sob o ponto de vista rigoroso há uma infinidade de padrões que podem prolongar uma sequência dada por alguns de seus elementos, sem a definição do que seria o termo geral ou uma regra explícita de prolongamento. O prolongamento aqui considerado é sempre o mais "natural". Isso porque esse é um tema recorrente em testes psicotécnicos onde se espera um tal prolongamento. Se um aluno seu der uma outra solução, antes de considerá-la errada, vale a pena verificar se é, de fato, um outro prolongamento possível.*

Terceira Etapa
Fique por dentro!

Atividade • Contar e tabular para organizar

Objetivo

Identificar sequências numéricas e obter a expressão algébrica do seu termo geral.

Descrição da atividade

Nessa etapa, esperamos que os alunos observem as sequências figuradas e percebam o padrão numérico presente. Veja a descrição a seguir.

Observe a sequência de figuras formadas por quadrados e círculos.

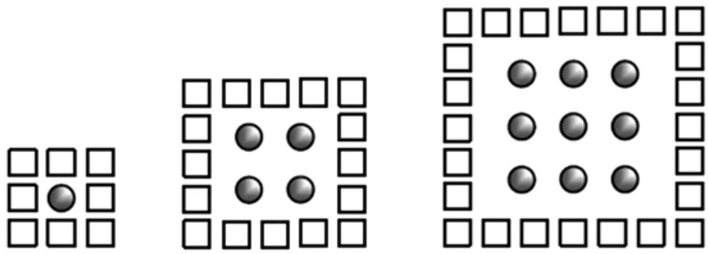
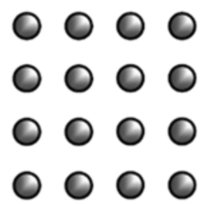


Figura 1 Figura 2 Figura 3 ... e assim por diante

1. Observe apenas os círculos e faça um desenho que represente os círculos da Figura 4.

Resposta



2. Preencha a tabela a seguir.

FIGURA	TOTAL DE CÍRCULOS
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
:	:
7	49
:	:
10	100

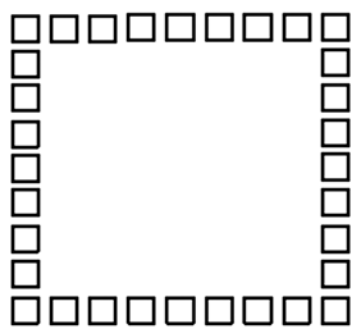
3. Você observou algum padrão nos números que representam o total de círculos? Qual? Troque ideias com seus colegas e escreva uma fórmula que indique a quantidade de círculos numa Figura n.

Resposta

O total de círculos é sempre representado pelo quadrado da ordem da figura, o que pode ser indicado por n^2.

4. Agora, observe os quadrados e faça um desenho que represente os quadrados da Figura 4.

Resposta



5. Preencha a tabela a seguir, observando os quadrados.

FIGURA	**TOTAL DE QUADRADOS**
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40

:	:
7	56
:	:
10	80

6. Você observou algum padrão para os quadrados? É o mesmo dos círculos? Troque ideia com seus colegas e indique a quantidade de quadrados da Figura n.

Resposta

Aqui também existe um padrão, mas não é o mesmo dos círculos. A quantidade de quadrados da Figura n é 8n.

7. Agora você deve observar as duas tabelas preenchidas anteriormente.

a. Escreva a sequência formada pelos círculos e pelos quadradinhos.

C: (1; 4; 9; ____; ____; ____; ____; ____; ____; ____; ...)

Q: (8; 16; 24; ____; ____; ____; ____; ____; ____; ____; ...)

Resposta

C: (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; ...)

Q: (8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; ...)

b. Lembra da "bota" da Etapa 1? As sequências P e Q podem ser geradas por uma "bota"? Em caso afirmativo, qual é o comprimento do seu pulo Troque ideias com seus colegas.

Resposta

Existe padrão apenas nos pulos da sequência dos quadradinhos, cujo pulo é sempre de 8 unidades.

• • • • •

Recursos Necessários

- Encarte do aluno

Procedimentos operacionais

- *Professor, continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*

• • • • •

Professor

Intervenção pedagógica

- *Nos itens 1, 2 e 3, os alunos devem observar apenas os círculos, e não devem ter dificuldade para desenharem os círculos da Figura 4. Já no preenchimento da tabela, eles podem não perceber que os círculos formam-se com uma quantidade igual ao quadrado da posição; nesse caso, volte às figuras, peça que eles as observem e se for necessário, oriente-os para fazerem os círculos da Figura 5. Os alunos que não tiverem dificuldade em preencher a tabela, muito provavelmente conseguirão escrever a fórmula. Em caso contrário, utilize mais exemplos numéricos, anotando na lousa os valores. Se os alunos ainda não conseguirem obter a fórmula, escreva as quantidades de círculos na forma de quadrado ($16 = 4^2$, por exemplo).*
- *Nos itens 4, 5 e 6, os alunos devem observar os quadrados. Circule pela turma e oriente os alunos a contarem os quadradinhos de cada uma das 3 figuras impressas para perceberem como eles se formam. No item 4, é preciso que você observe mais particularmente cada desenho, pois a figura pode ter o formato esperado, mas não ter exatamente a quantidade de quadrados. Assim como no item 3, escrever na lousa outros valores pode ajudar aos alunos que tiverem dificuldade para perceber o padrão. Aqui, bem como no item 3, talvez seja interessante fazer uma revisão de representação algébrica.*
- *No item 7, você deve orientar os alunos a escreverem os valores obtidos nos itens anteriores na forma de sequência. Para tal eles devem usar o que perceberam anteriormente, pois alguns valores não apa-*

recem nas tabelas. Já no item b, você pode retomar o que foi feito na Etapa 1. Repare que cada "bota" dá sempre pulos de mesmo tamanho, apesar de "botas" diferentes poderem dar pulos maiores ou menores. Esse detalhe tem tudo a ver com a definição de progressões aritméticas e você pode aproveitar esse momento para dizer aos alunos que as sequências que mantêm o mesmo tamanho de pulos são chamadas de progressões aritméticas.

Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

SAERJINHO 2012 · CADERNO C1105 2º BIMESTRE

Questão 40 M110073RJ

Observe abaixo o desenho de uma sequência formada por quadrados. Essa sequência segue um padrão.

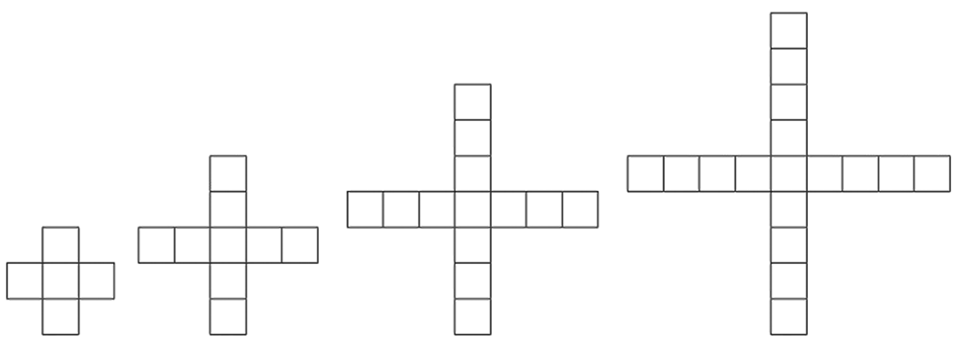


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Qual é a expressão que permite calcular o número de quadrados q das figuras dessa sequência de acordo com sua posição p?

A) q = p + 4
B) q = 4p
C) q = 4p + 1
D) q = 4p + 5
E) q = 5p

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

A resposta correta é o item (c), uma vez que todas as figuras são formadas por um quadrado no centro acrescido de uma quantidade de quadrados igual à posição à sua volta, isto é, na Figura 1 é acrescido um quadrado em cada lado (4 no total), na Figura 2 são acrescidos 2 quadrados em cada lado (8 no total), na Figura 3 são acrescidos 3 quadrados em cada lado (12 no total) e assim sucessivamente.

Erros Possíveis:

O aluno que optou pelo item (a) pode ter sido induzido pelo fato de cada figura ser formada a partir da anterior, acrescentando-se 4 quadradinhos. O que optou pelo item (b) deve ter desconsiderado o quadrado do centro. Quem optou pelo item (d), deve ter percebido que a sequência é uma PA, e indicou o primeiro termo e somou com o quádruplo da posição, pois 4 é a razão. Já o aluno que optou pelo item (e) deve ter observado apenas a figura 1 e ter sido induzido por um raciocínio multiplicativo.

Professor

Etapa Flex
Para saber +

Uma sequência muito estudada é a sequência de Fibonacci. Nela, o primeiro e o segundo número são fixos e iguais a 1 e encontramos os termos seguintes, somando os dois anteriores:

Terceiro termo: 1 + 1 = 2

Quarto termo: 1 + 2 = 3

Quinto termo: 2 + 3 = 5

Sexto termo: 3 + 5 = 8.

Sétimo termo: 5 + 8 = 13.

E assim por diante...

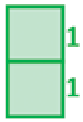
Portanto, a sequência é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Acredita-se que Fibonacci começou a investigar essa sequência no estudo de uma população de coelhos. O problema pressupunha que em cada procriação eram gerados exatamente dois coelhos, um macho e uma fêmea, o que não é muito realista. Apesar da motivação inicial do estudo dessa sequência não ter tido uma aplicação prática, descobriu-se que existem muitas outras em diversos campos.

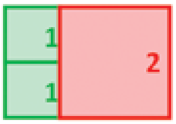
A seguir temos uma situação onde essa sequência aparece na natureza.

Vamos montar uma sequência de figuras formadas por quadrados justapostos, cujos lados medem os números de Fibonacci.

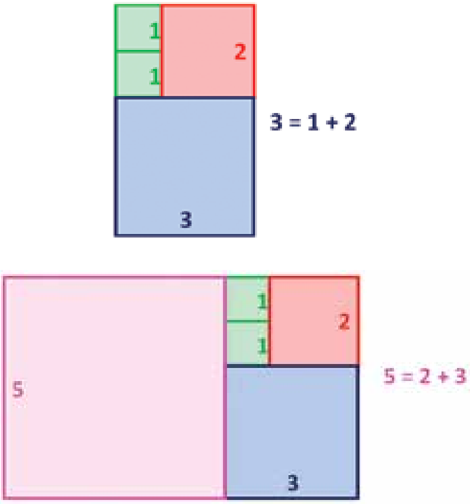
Inicialmente justapomos dois quadrados cujos lados medem os dois primeiros termos dessa sequência, ou seja, medem 1 unidade.

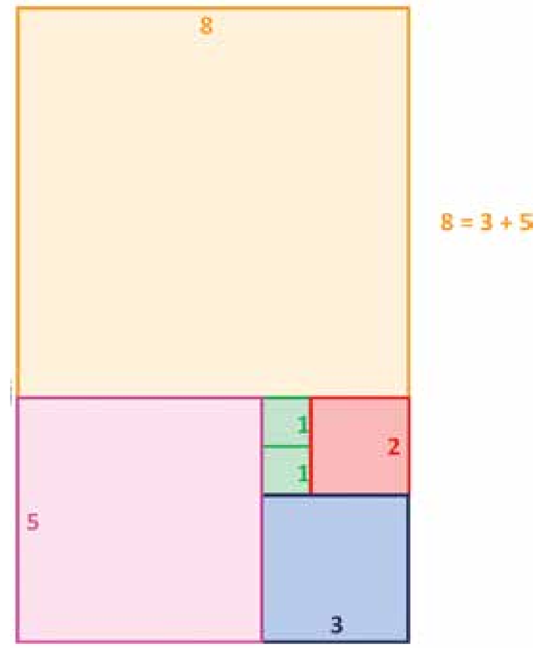


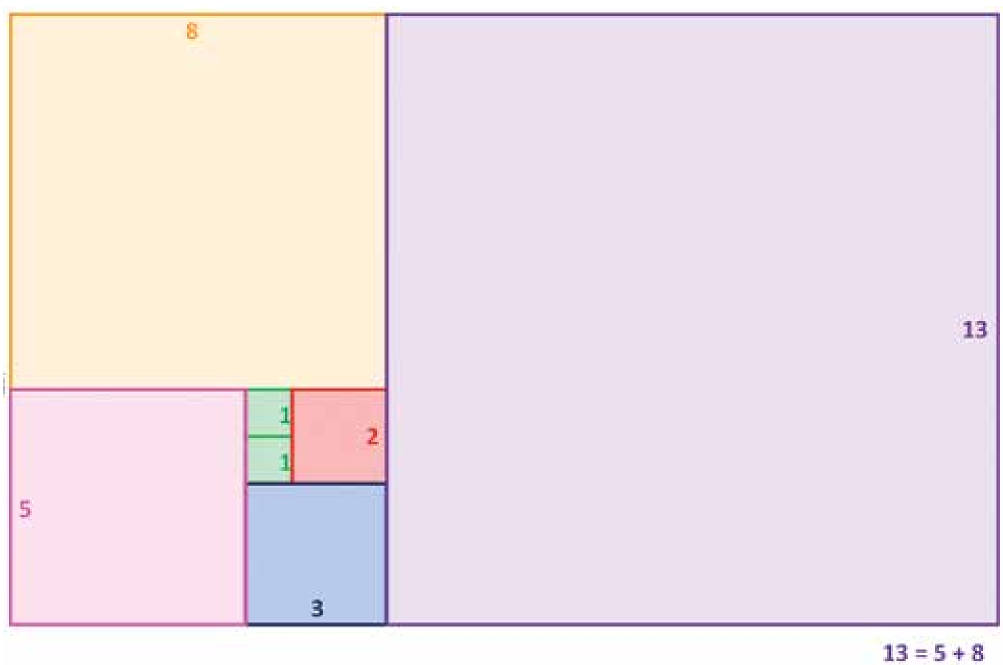
Em seguida, justapomos o quadrado cujo lado mede o terceiro termo dessa sequência. Note que seu lado corresponde a soma das medidas dos lados dos dois quadrados iniciais.



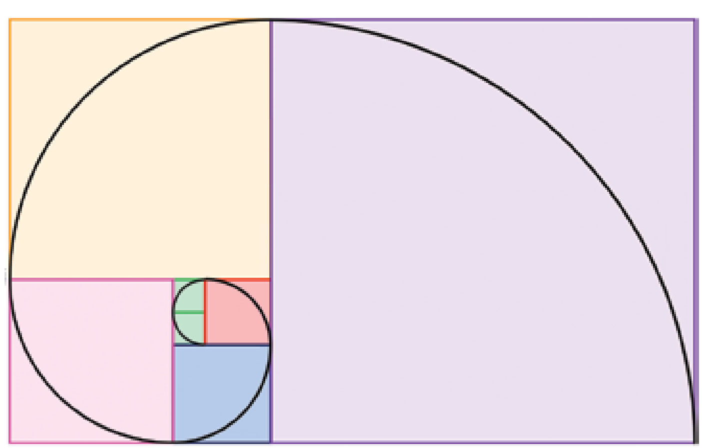
Para continuar justapondo quadrados dessa maneira será sempre necessário somar as medidas dos lados dos dois últimos quadrados formados. Observe a sequência de figuras quando justamos sucessivamente os quadrados cujos lados medem 3, 5, 8 e 13.





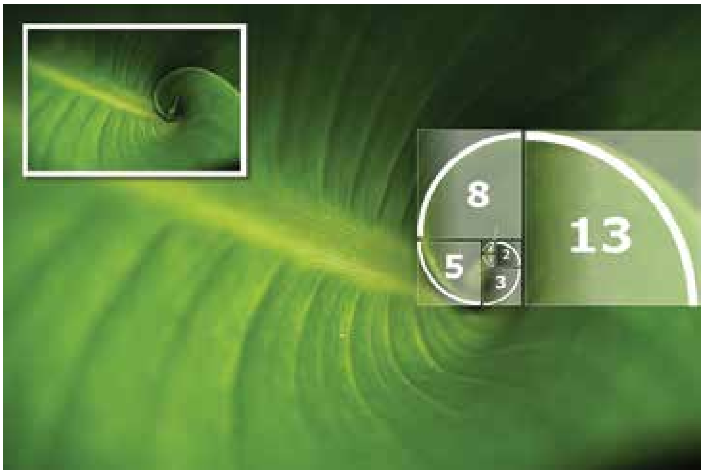


Construindo arcos nesse retângulo, formamos uma espiral. Veja:



Professor

Essa espiral está presente em muitas formas da natureza, como por exemplo, a folha de bromélia a seguir.

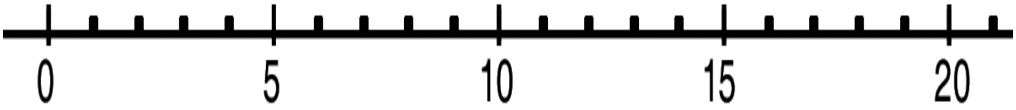


Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Bromelia.png

Etapa Flex

Agora, é com você!

1. Retomando a situação da parte 2 da Etapa 1, pense na seguinte situação: Imagine que você está no número 20 e vai dar pulos para voltar ao 0.



a. Preencha a tabela com todos os comprimentos e seus respectivos números de pulos.

POSIÇÃO INICIAL	COMPRIMENTO DO PULO	NÚMERO DE PULOS	POSIÇÃO FINAL
20	1	20	0
20	2	10	0
20	4	5	0
20	5	4	0
20	10	2	0
20	20	1	0

b. Qual a relação entre o comprimento do pulo, o número de pulos e a posição inicial?

Respostas

Posição Inicial = (Comprimento do Pulo) x (Número de Pulos)

• • • • •

2. Para realizar essa tarefa você pode desenhar ou utilizar uma caixa de palitos de fósforos ou uma caixa de palitos de dentes ou uma caixa de grampos de cabelos.

   Com palitos de fósforo, construa um quadrado.

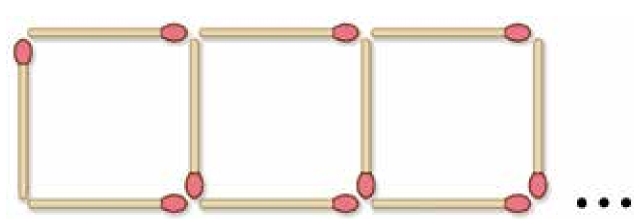
a. Quantos palitos você usou?

Respostas

4.

• • • • •

Continue a formar outros quadrados sempre à direita do anterior formando uma sequência de quadrados, como indicado na figura abaixo.



b. Ao formar 4 quadrados, quantos palitos você usou?

Respostas

13.

• • • • •

Professor

c. E se você formar cinco?

Respostas

16.

• • • • •

d. E se formar dez?

Resposta

31.

• • • • •

e. E se formar 65?

Resposta

196.

• • • • •

f. Se alguém quiser saber quantos palitos serão usados para formar uma quantidade qualquer n de quadrados, você saberia escrever uma expressão para ajudá-lo?

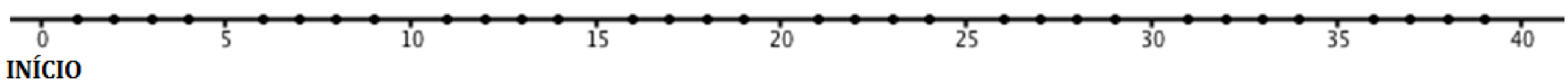
Resposta

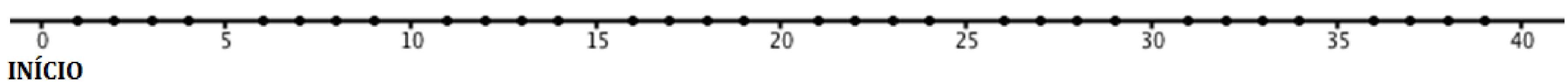
Para n quadrados temos (1+3n) palitos.

• • • • •

Anexo I


0
5
10
15
20
25
30
35
40
INÍCIO


0
5
10
15
20
25
30
35
40
INÍCIO


0
5
10
15
20
25
30
35
40
INÍCIO

1	2	3
4	5	6