Reforço escolar · Matemática ·

P.A. e P.G., elas têm razão!

Dinâmica 3

2º Série | 2º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	Ensino Médio 2ª	Numérico Aritmético	Regularidades numéricas: sequências

DINÂMICA	P.A. e P.G., elas têm razão!
HABILIDADE BÁSICA	H41 - Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).
HABILIDADE PRINCIPAL	H55 - Resolver problemas envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da PA e da PG na resolução de problemas significativos.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	De olho no taxímetro.	15 a 20 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
2	Um novo olhar ...	Quadrados com canudos.	20 a 30 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
3	Fique por dentro!	Multiplicando microscopicamente...	20 a 25 min	Grupos de 3 ou 4 alunos com discussão coletiva.	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Professor

Apresentação

Caro professor,

Nessa dinâmica buscamos estudar problemas que envolvem PA e PG. Na etapa 1, o aluno deve trabalhar o valor cobrado pelo taxi, por meio do valor numérico de expressões algébricas, além de observar um padrão numérico dessa situação. Na etapa 2, propomos uma PA construída com canudos para que ele analise como podemos obter os termos, utilizando ou não a fórmula do termo geral. Na etapa 3 o foco também será encontrar termos de uma sequência, só que agora em uma PG. Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

20 MINUTOS

Matemática

Atividade • De olho no taxímetro

Objetivo

Utilizar expressões algébricas.

Descrição da atividade

Professor, é bastante comum que o aluno, ao se deparar com uma expressão algébrica, crie uma expectativa em encontrar uma resposta numérica para o problema proposto, possivelmente repetindo o processo de resolver uma equação. Acreditamos que uma das dificuldades que os alunos apresentam no cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica é o de atribuir significado aos diferentes valores que podem ser obtidos ao serem efetuadas as substituições das variáveis por diferentes valores numéricos. Por esse motivo, propomos uma atividade baseada em uma situação real na qual os alunos devem construir uma sequência, obtida pelos valores numéricos de uma das expressões algébricas e que por sua vez é uma progressão aritmética.

Veja a proposta da atividade.

Em uma determinada cidade do Brasil, o valor em reais, V, cobrado por uma corrida de taxi, em bandeira 1, é calculado da seguinte maneira:

- O valor calculado quando o taxi fica parado é de $V_p(t) = 0{,}50 \cdot t$, onde t é o tempo, em minutos, em que o taxi ficou parado. Por exemplo, se um taxi ficou parado 10 minutos $V_p(10) = 0{,}50 \cdot 10 = 5$, ou seja, o valor da parada de 10 minutos é de R$ 5,00.
- Quando o taxi está em movimento o valor é calculado pela expressão $V_m(n) = 5 + 2n$, onde 5 é o valor da bandeirada e n o número de quilômetros rodados (esse número deve ser inteiro e maior que zero). Por exemplo, o valor cobrado por 8 km rodados é $V_m(8) = 5 + 2 \cdot 8 = 5 + 16 = 21$, ou seja R$ 21,00.
- O valor total da viagem é dado por $V = V_p + V_m$. Com isso, se um taxi rodou 8 km e, nessa viagem, ficou parado por 10 minutos, o valor total da viagem é $V = 21 + 5 = 26$, ou seja, R$ 26,00.

1. Qual é o valor pago por uma corrida de 13 km, considerando que o taxi manteve-se sempre em movimento?

Resposta

$V_m(13) = 5 + 2 \cdot 13 = 5 + 26 = 31$, ou seja, a corrida custa 31 reais.

• • • • •

2. Qual é o valor pago por uma corrida de 9 km, considerando que, por conta dos sinais de trânsito fechados, o taxi permaneceu parado um total de 6 minutos?

Resposta

$V_m(9)=5+2\cdot 9=5+18=23 = 5 + 18 = 23$ *e* $V_p(6)=0{,}50\cdot 6=3$

Como o valor total da viagem é dado por $V=V_p+V_m$*, temos que o valor pago nesta corrida é de 26 reais.*

3. Em um mesmo dia um taxista realizou duas corridas, a primeira de 32 km e a segunda de 29 km. Na primeira corrida, o taxi manteve-se sempre em movimento, enquanto na segunda o tempo em que ficou parado totalizou 12 min. Que corrida teve o custo mais alto?

Resposta

Primeira corrida: $V_m(32)= 5 + 2 \cdot 32 = 5 + 64 = 69$ *reais.*

Segunda corrida: $V_p(12)=0{,}50\cdot 12=6$ *e* $V_m(29)=5+2\cdot 29=5+58=63$*, ou seja, V = 6 + 63 = 69 reais.*

Portanto, as duas corridas custaram 69 reais.

4. Considerando que o taxi manteve-se sempre em movimento, preencha a tabela a seguir com o valor pago pela corrida, de acordo com a quilometragem indicada.

QUILOMETRAGEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VALOR EM REAIS								21	

Resposta

QUILOMETRAGEM	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VALOR EM REAIS	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*	*21*	*23*

5. De acordo com a tabela do item anterior, os valores das corridas, em reais, formam uma sequência. Você consegue observar algum padrão nesta sequência? Explique.

Resposta

Sim. Cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido adicionando 2 reais ao anterior.

• • • • •

Recursos necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais:

- *Professor, organize a turma em grupos de 3 ou 4 alunos.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, ao longo de toda esta etapa o aluno é convidado a encontrar valores numéricos de expressões algébricas, por meio de uma atividade que se aproxima de um fato real. Os alunos, por sua vez, têm que identificar os dados para que, por meio de uma substituição, possam encontrar o valor numérico pedido. É importante que você observe se os alunos apresentam dificuldade na interpretação de tais dados, o que pode ser percebido, por exemplo, quando é feita uma substituição indevida. Fique atento ao fato de que a dificuldade do aluno pode não estar na realização dos cálculos, mas sim em não compreender o problema proposto.*

- *Para os itens 1 e 2, é interessante que você destaque que os valores de* V_p *e* v_m *dependem de variáveis diferentes e que, portanto, os alunos devem estar atentos a qual das duas fórmulas usar de acordo com o dado apresentado no problema.*

- *Na terceira e quarta questões, os alunos realizam substituições e cálculos similares aos das questões anteriores, sendo este um momento propício para você observar se eles compreenderam o que foi feito. Você pode aproveitar para enfatizar que expressões algébricas são representações simbólicas de algo que queremos calcular, e que, no cotidiano, muitas vezes usamos expressões algébricas ou numéricas sem perceber, como é o caso do cálculo da corrida de taxi.*

- *Ao preencherem a tabela da questão 4, os alunos constroem uma sequência que será analisada na questão seguinte. Neste momento, você deve observar como os alunos encontram os valores da tabela. Por exemplo, para calcularem o valor gasto numa corrida de 4 km, os alunos podem realizar uma substituição na expressão $5 + 2n$, fazendo $5 + 2 \cdot 4$, obtendo o resultado 13 reais, ou ainda, podem perceber que se eles conhecem o valor pago numa corrida de 3 km, basta adicionar 2 reais. Essa última ideia é a que deve ser discutida na quinta questão, e nesse momento você pode comentar que tal sequência é uma progressão aritmética de razão 2.*

Segunda Etapa

Um novo olhar ...

Atividade • Quadrados com canudos

Objetivo

Calcular valores a partir da fórmula do termo geral da PA.

Descrição da atividade

Professor, nessa etapa os alunos devem construir uma sequência de quadrados com canudos. A ideia é que para formar as figuras eles percebam que sempre acrescentam um número constante de canudos (no caso, 3), ou seja, o processo de construção da figura favorece a percepção da regularidade e consequentemente na compreensão ou até mesmo obtenção do termo geral.

Acompanhe a atividade a seguir.

Observe as figuras abaixo.

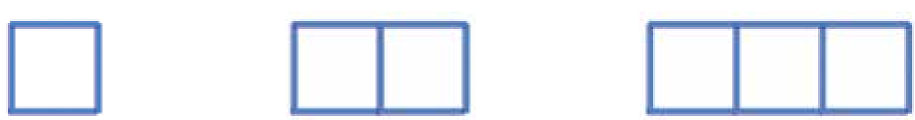


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Utilizando canudos, monte uma figura como a Figura 1.

Quantos canudos você utilizou?

Resposta

4 canudos.

2. Agora, monte uma figura com 2 quadrados, como indicado na Figura 2.

Quantos canudos foram utilizados?

E para fazer a 3ª figura, quantos canudos são necessários?

Resposta

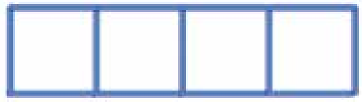
Foram utilizados 7 canudos na 2ª figura e 10 canudos na 3ª figura.

• • • • •

3. Construa, utilizando canudos, uma representação da próxima figura da sequência apresentada.

Quantos quadrados terá o quarto termo desta sequência? E quantos canudos terá o quarto termo? Como podemos encontrar o número de canudos do quarto termo a partir do terceiro termo?

Resposta



O quarto termo dessa sequência é formado por 4 quadrados, com um total de 13 canudos. Para encontrarmos o número de canudos do quarto termo a partir do terceiro, basta adicionarmos 3 canudos.

• • • • •

4. Quantos quadrados terá o quinto termo desta sequência? E quantos canudos terá o quinto termo?

Como podemos encontrar o número de canudos do quinto termo a partir do quarto termo?

Resposta

5 quadrados e 16 canudos.

Adicionando à quantidade de canudos do quarto termo 3 canudos.

• • • • •

5. Explique como podemos encontrar o número de canudos do 6º termo se conhecemos o número de canudos do 4º?

Resposta

A cada termo são adicionados 3 canudos, portanto, basta acrescentar esta mesma quantidade duas vezes, ou seja, 6 canudos, já que precisamos conhecer o número de canudos a partir de dois termos anteriores.

6. Sabendo-se que o 7º termo da sequência contém 22 canudos, quantos canudos terá o 11º termo?

Como você obteve o resultado?

Resposta

22 + 4.3 = 22 + 12 = 34, 34 canudos.

A cada termo são adicionados 3 canudos, portanto, basta acrescentar esta mesma quantidade quatro vezes, ou seja, 12 canudos, já que precisamos conhecer o número de canudos a partir de quatro termos anteriores.

7. Quantos canudos possui o 45º termo da sequência. Explique como você pensou.

Resposta

Se a cada termo adicionamos 3 canudos então precisamos de 4 + 3.44 = 4 + 132 = 136, ou seja, 136 canudos.

8. Indique a sequência formada pela quantidade de canudos em cada figura.

Resposta

(4, 7, 10, 13, 16, ...)

9. A sequência formada pela quantidade de canudos em cada figura é uma PA, uma vez que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se a razão ao elemento anterior. Numa PA, cada termo pode ser determinado a partir de qualquer outro, bastando acrescentar ou retirar a razão tantas vezes quantas forem necessárias.

Em geral, costuma-se indicar como se determina um elemento qualquer a partir do primeiro termo: a expressão $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ determina o termo geral da PA, onde a_n é o termo de ordem *n* ou *n*-ésimo termo, *r* é a razão e a_1 é o primeiro termo da PA.

Escreva uma fórmula para a sequência de canudos estudada que permita determinar seu *n*-ésimo termo e que dependa só do valor da posição n.

Resposta

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 1$$

● ● ● ● ●

Recursos necessários:

- Encarte de aluno.
- Canudos.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, permaneça com a turma dividida em grupos.*
- *Distribua entre os grupos uma quantidade de canudos suficiente para que eles construam os 4 primeiros termos da sequência.*

● ● ● ● ●

Intervenção pedagógica

- *Professor, para que o objetivo da dinâmica seja alcançado, é primordial que você incentive seus alunos a reproduzirem as figuras com canudinhos se eles apresentarem dificuldade em responder aos itens 1 e 2. Durante a construção, o aluno pode perceber relações que pos-*

sivelmente auxiliarão sua percepção do termo geral de uma progressão aritmética, quando ele obtém um termo da sequência a partir do termo anterior.

- *Nas questões 3 e 4, os alunos devem perceber que para acrescentar um quadradinho à imagem existente, basta adicionar 3 canudos, posicionando-os adequadamente. Essa percepção é fundamental para que eles compreendam que para obter qualquer termo da sequência a partir do termo anterior, basta acrescentar três canudinhos. Destaque esse fato.*

- *Nas questões 5 e 6, você pode ressaltar que, se a cada termo são adicionados 3 canudos, é possível determinar qualquer termo da sequência, partindo de um termo conhecido. Essa ideia deve ser abordada porque geralmente os alunos determinam os termos de uma sequência, ou por uma construção recorrente, ou partindo unicamente do primeiro termo da sequência. É importante que o aluno seja capaz de averiguar os "pulinhos" de um termo para outro quando se soma um determinado valor constante, neste caso a razão da PA, e perceber que é possível dar saltos maiores, «pulões», quando um termo é somado a um múltiplo da razão.*

- *A questão 7 visa a extrapolação do que foi feito nas questões anteriores. Explore as diversas maneiras que os alunos obtiveram o resultado e incentive-os a chegarem ao 45º termo da sequência partindo de outros termos que não o primeiro.*

- *Na questão 9, esperamos que os alunos utilizem a fórmula dada e escrevam o termo geral apenas em função da posição. É possível que mesmo aqueles alunos que responderam corretamente as questões anteriores, tenham alguma dificuldade, porque além da questão da compreensão da sequência, os alunos precisam calcular o valor numérico identificando corretamente as variáveis, como foi trabalhado na etapa 1. Por esse motivo, reforce com eles quais são as variáveis utilizadas na fórmula, bem como, a ordem em que devem ser feitas as operações.*

Terceira Etapa:
Fique por dentro!

25 minutos

Atividade • Multiplicando microscopicamente...

Objetivo:

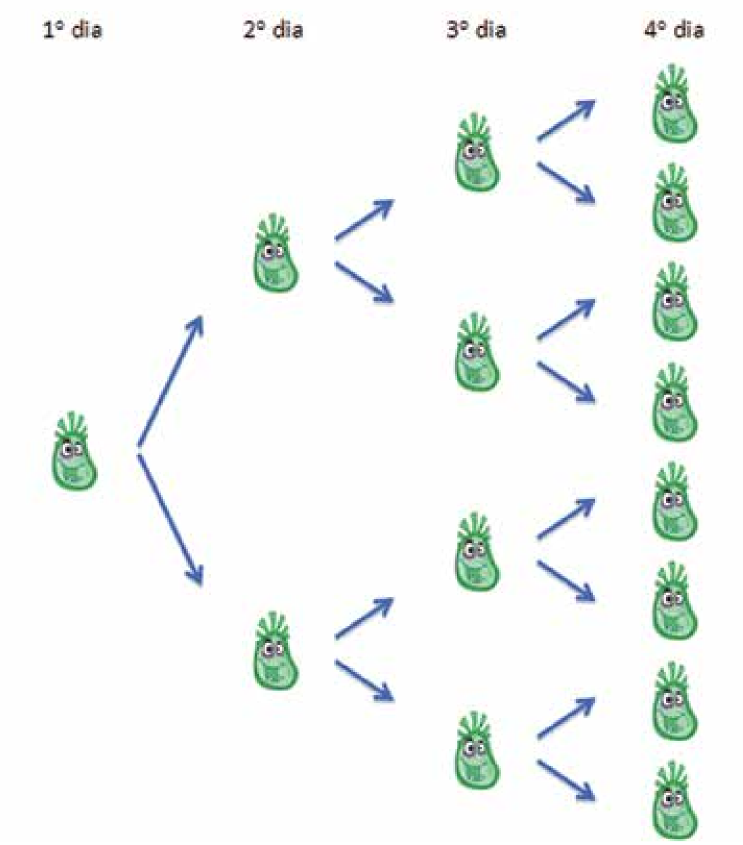
Utilizar o conceito de PG para resolver um problema de crescimento exponencial.

Descrição da atividade:

Professor, assim como foi feito na atividade anterior para PA, nesta atividade é apresentada uma situação que envolve a utilização do termo geral da PG. Para tal, apresentamos um problema usual de crescimento exponencial. Veja a proposta a seguir.

A ameba é um protozoário e só pode ser vista ao microscópio. Após crescer até um certo tamanho, uma ameba se divide ao meio e produz outras duas. No dia seguinte, cada uma se divide ao meio novamente, formando quatro amebas no total. No terceiro dia o mesmo processo se repete e teremos oito amebas, e esse processo, teoricamente, pode continuar indefinidamente.

O desenho abaixo ilustra tal situação até o 4º dia, onde  representa uma ameba.



Supondo que as amebas sigam o mesmo padrão de reprodução, responda:

1. Quantas amebas existirão no 5º dia? Explique como encontrou este valor.

Resposta

16 amebas. Basta dobrar o número de amebas do terceiro dia.

2. Utilizando uma sequência numérica, expresse o número de amebas nos 6 primeiros dias.

Resposta

(1, 2, 4, 8, 16, 32)

• • • • •

3. Explique como podemos encontrar o número de amebas do 10º dia se conhecemos o número de amebas do 8º dia?

Resposta

Basta pegarmos o número de amebas do 8º dia e multiplicá-lo pelo quadrado da razão.

• • • • •

4. Explique como podemos encontrar o número de amebas do 22º dia se conhecemos o número de amebas do 23º dia?

Resposta

Basta pegarmos o número de amebas do 23º dia e dividi-lo por 2.

• • • • •

5. Quantas amebas haverá no 11º dia?

Resposta

$a_{11} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$. *Logo teremos 1024 amebas*

• • • • •

Recursos Necessários:

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais:

- *Professor, continue com a turma organizada em grupos de 3 ou 4 alunos.*

Intervenção Pedagógica:

- *Professor, caso os alunos sintam dificuldades no item 1, incentive-os a fazerem o desenho. Assim, ele poderá compreender melhor o que está acontecendo.*
- *É muito importante que o aluno perceba que existe uma multiplicação por 2 entre um elemento e seu antecessor. Procure evidenciar tal característica seja fazendo com que os alunos observem o esquema, seja observando a sequência numérica que representa a quantidade de amebas em cada dia.*
- *No item 3, os alunos devem perceber que devem multiplicar por 2 duas vezes, ou seja, pelo quadrado de 2. Talvez seja interessante questioná-los sobre o que aconteceria se a diferença entre os termos fosse de três posições; nesse caso, deve-se multiplicar pelo cubo de 2.*
- *No item 4, é importante que os alunos percebam que estamos "andando para trás" e que, portanto, devemos utilizar a operação inversa, ou seja, dividir no lugar de multiplicar.*
- *Finalmente, no item 5, esperamos que o aluno seja capaz de determinar o décimo primeiro termo sem determinar todos os anteriores. Repare que optamos por colocá-lo por último para que o aluno escolha a maneira que ele achar mais conveniente para resolver. É interessante, portanto, que você explore as maneiras que os alunos pensaram. Não despreze nenhuma maneira, inclusive, se aparecer uma que tenha calculado todos os 11 termos, nesse caso, você pode conduzir a discussão para que os alunos percebam que é muito trabalhoso dessa forma, sobretudo, se o termo fosse muito mais distante.*

• • • • •

Quarta Etapa
Quiz

10 MINUTOS

Avaliação Diagnóstica/SAERJINHO 2011 (Adaptado).

A Avenida das Margaridas tem 30 casas. Nesse endereço, as casas foram numeradas obedecendo à progressão aritmética (10, 14, 18, ...).

Dado:

Fórmula do termo geral da PA

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

O número da última casa dessa rua é igual a:

a. 126

b. 130

c. 30

d. 300

e. 156

Quinta Etapa:
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

O aluno deve observar que na sequência (10, 14, 18, ...) a razão é $r = 4$. Como queremos encontrar o número da última casa e temos um total de 30 casas, desejamos obter o valor de a_{30}.

Na questão temos: $a_1 = 10$, $r = 4$ e $n = 30$. Utilizando a fórmula do termo geral da PA:

$$a_{30} = 10 + (30 - 1) \cdot 4$$
$$a_{30} = 10 + 116$$
$$a_{30} = 126$$

E a resposta correta é a alternativa a.

Possíveis erros:

Os alunos que optarem pela alternativa b, provavelmente consideraram que a PA possui 31 termos ao invés de 30, ou seja, aplicaram a fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ equivocadamente. Os alunos que marcaram a letra c, podem ter confundido o valor do termo a_{30} com a sua posição na sequência. Já os alunos que assinalaram a alternativa d, provavelmente, multiplicaram o primeiro termo (10) por 30, mostrando que não compreenderam como utilizar a fórmula do termo da PA. Os alunos que optaram pela alternativa e podem ter errado ao calcular o valor da expressão do termo geral, fazendo a adição antes da multiplicação.

Etapa Flex:
Para saber +

Por que os nomes Aritmética e Geométrica?

Você já se perguntou por que as sequências estudadas recebem os nomes de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica?

Tanto em uma PA quanto em uma PG podemos considerar termos equidistantes a um determinado termo, ou seja, termos que estão a uma mesma distância de um determinado elemento.

Por exemplo, na PA (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21), 12 é o termo médio, pois se encontra no meio. Ele pode ser calculado pela média aritmética de termos equidistantes.

O termo tem três pares de termos equidistantes:

- a_1 e a_7,
- a_2 e a_6,
- a_3 e a_5.

Assim,

- $\dfrac{a_1 + a_7}{2} = \dfrac{3+21}{2} = 12 = a_4$,
- $\dfrac{a_2 + a_6}{2} = \dfrac{6+18}{2} = 12 = a_4$ e
- $\dfrac{a_3 + a_5}{2} = \dfrac{9+15}{2} = 12 = a_4$.

Na verdade, isso não acontece apenas para o termo médio: em uma PA, cada termo é a média aritmética de dois termos equidistantes. Com isso, na sequência do exemplo o a_5=15 pode ser obtido como $a_5 = \dfrac{a_3 + a_7}{2} = \dfrac{9+21}{2} = 15$ ou $a_5 = \dfrac{a_4 + a_6}{2} = \dfrac{12+18}{2} = 15$

Já em uma PG, temos uma situação parecida. Mas, no lugar da média aritmética, temos a média geométrica de dois termos equidistantes. A média geométrica entre dois números a e b, reais positivos, é calculada por $\sqrt{a \cdot b}$.

Na PG (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128), o termo $a_3 = 8$ possui dois pares de termos equidistantes e, a partir deles, é possível obter a_3, calculando a média geométrica.

- a_1 e a_5 fi $a_3 = \sqrt{a_1 \cdot a_5} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$
- a_2 e a_4 fi $a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$.

Agora que você já viu a média geométrica para o terceiro termo, que tal verificar como encontrar $a_4=16$ como média geométrica de dois termos equidistantes?! Mãos à obra!

Agora, é com você!

1. Uma firma fabrica escadas de tamanhos variados, desde bem pequenas até escadas gigantes. Nós podemos representá-las usando palitos. Desta forma, nossa menor escada, que possui apenas um degrau, pode ser representada usando 5 palitos. Para construir uma escada de dois degraus usamos 8 palitos, a de três, 11 palitos.

Considerando *P* o número total de palitos e *d* o número de degraus, temos que a fórmula que dá o número total de palitos usados para fazer uma escada de *d* degraus é:

$$P = 3d + 2.$$

Agora responda:

a. Qual o número de palitos de uma escada de 8 degraus?

Resposta

$P = 3 \cdot 8 + 2 = 26$

b. Qual o número de palitos de uma escada de 20 degraus?

Resposta

$P = 3 \cdot 20 + 2 = 62$

Professor

c. Que tipo de sequência é formada pela quantidade de palitos das escadas?

Resposta

Trata-se de uma PA.

d. Ainda no contexto das sequências, o que significa o valor 3 da fórmula do número de palitos?

Resposta

O valor 3 representa a razão da PA.

2. Uma cultura de certa bactéria mantida em condições ideais triplica seu volume a cada dia, se o volume no primeiro dia é de 9 u.v. (unidade de volume) o volume no quinto dia é?

Resposta

No quinto dia temos $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot 3^4 = 729$*. Logo o volume é 729 u.v.*