

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE
MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

PLANO DE TRABALHO 1 - 1º BIMESTRE/2013

Análise Combinatória

[Cláudia Márcia de Azevedo Pinto Rocha]

[claudiamarcia.rocha@yahoo.com.br]

COLÉGIO: Liceu de Humanidades de Campos

PROFESSOR: Cláudia Márcia de Azevedo Pinto Rocha

SÉRIE: 3ª

Grupo 2

TUTOR: EDESON DOS ANJOS SILVA

1 – Introdução:

O levantamento de possibilidades está presente desde o nosso cotidiano até as áreas mais variadas do conhecimento como lógica, estatística, economia, entre outras. Sendo assim, para a apresentação do conteúdo de Análise Combinatória são escolhidos assuntos contextualizados como seleção de roupas, montagem de um cardápio (Roteiro de Ação 1), composição de número de telefones celulares (Roteiro de Ação 2) e identificação de placas de automóveis (Roteiro de Ação 3), que são bastante utilizados por jovens ou adultos.

Nesse primeiro momento (apresentação), procura-se enfatizar a importância do princípio multiplicativo como o principal método de contagem.

No segundo momento, são propostos sete exemplos (exercícios resolvidos) do livro didático da escola “Gelson Iezzi e outros, Matemática - Ciência e Aplicações” dentre os quais dois deles são enfatizados a árvore das possibilidades. É importante que os alunos entendam como funciona a representação das possibilidades por meio da árvore das possibilidades, porque esse método é essencial para a concretização do conteúdo.

Sugere-se ao aluno a construção da árvore de possibilidades para resolver algumas atividades ou verificar suas respostas e informa-se que, em alguns casos, não é viável utilizar a árvore, por causa da quantidade de possibilidades.

Em dois exemplos aproveita-se para comentar sobre permutação e três exemplos envolvem combinação.

No terceiro momento encontra-se uma relação de oito problemas para serem resolvidos em casa, como forma de fixação do conteúdo.

Como encerramento do plano temos o quarto momento composto de duas etapas. Na primeira etapa, tira-se as dúvidas de todos os exercícios propostos para casa e numa segunda etapa faz-se uma atividade avaliativa.

Para a totalização do plano, serão necessários nove tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento do conteúdo mais um tempo para a avaliação da aprendizagem.

2 – Desenvolvimento

Atividade - Estudo da Análise Combinatória.

Habilidade relacionada:

Resolver Problemas de contagem, utilizando o Princípio Multiplicativo ou noções de Permutação Simples e ou Combinação Simples.

Pré-requisitos:

Nenhum

Tempo de duração:

500 min

Recursos educacionais utilizados:

Folha de atividades, lápis e borracha e livro didático.

Organização da turma:

Em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

Objetivos:

Resolver problemas com o uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Metodologia adotada:

Com os alunos organizados em dupla, distribuir as folhas de atividades com problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem e Noções de Permutação e Combinação, conforme descritas abaixo.

Folha de Atividade – Roteiro de Ação 1 – Comemorando o aniversário de Pedro.

A necessidade de contar o número de possibilidades de realizar determinada tarefa é muito importante na tomada de decisão em nosso cotidiano.

- Você poderia listar pelo menos duas situações em que isso acontece?

Exercício 1

Pedro decidiu comemorar seu aniversário juntamente com sua namorada Deise, saindo para jantar num restaurante. Na hora marcada, Pedro chegou à casa de Deise, que estava nervosa, pois não conseguia achar a combinação ideal, de roupas, para sair.

Ainda nervosa, Deise apresentou a Pedro as roupas que dispunha para escolher. Veja as opções que Deise possuía:

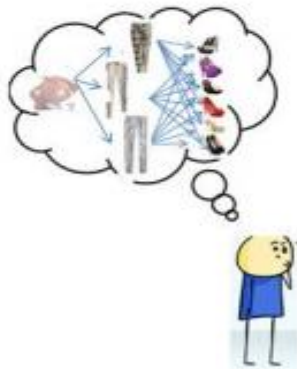


1 - Com essa quantidade de roupa, de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir, usando uma camisa, uma calça e um par de sapatos?



Deise disse a Pedro que gostaria muito de usar a camisa de cor rosa. Pediu a opinião de Pedro sobre qual combinação usar.

2 - Após essa decisão de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir?



Após a sugestão de Pedro, Deise decidiu qual roupa usar e o casal saiu para comemorar o aniversário de Pedro. Eles escolheram jantar no Restaurante Coma Feliz.

Ao chegarem nesse restaurante, um garçom lhes forneceu o cardápio que apresentava três tipos de pratos: Carnes, Lasanhas e Massas. Veja a seguir as opções do cardápio desse restaurante:

Tipos de Pratos		
Carnes (Arroz, feijão, farofa)	Lasanha (Salada)	Massas
Filé mignon	Frango	Ravioli
Alcatra ao molho	Bolonhesa	Espaguete
Contra filé ao molho	4 queijos	Fusilli
Carne assada	Palmito	Canelone
Chuleta na brasa		Capelete
Picanha acebolada		
Bife à role		

Composição		
Acompanhamento	Sobremesa	Bebida
Batata Frita	Sorvete de Morango	Suco de Maracujá
Nhoque	Sorvete de Chocolate	Suco de Laranja
Salada de Maionese	Sorvete Napolitano	Suco de Uva
Purê de Batata	Sorvete de Creme	Suco de Acerola
Purê de Aipim	Sorvete de Flocos	Suco de Melancia
Salada de Feijão Fradinho	Pudim	Refrigerante de Cola
	Mousse de Limão	Refrigerante de Limão
	Mousse de Maracujá	Refrigerante de Laranja
	Mousse de Chocolate	Refrigerante de Uva
	Pavê de Chocolate	Refrigerante de Guaraná
		Chopp
		Água Mineral

Deise escolheu comer lasanha acompanhada de uma bebida e um pudim.

3 - De quantas maneiras diferentes Deise pode fazer sua escolha?

Pedro escolheu comer uma carne, acompanhado de batata frita; uma bebida e uma sobremesa.

4 - De quantas maneiras diferentes Pedro pode fazer sua escolha?

5 - Nesse restaurante, é possível um cliente, comer um prato diferente por dia, acompanhado de uma bebida, durante um ano? Justifique sua resposta.

Roteiro de Ação 2

Leia o texto a seguir:

Em 2012, a Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) determinou que fosse acrescentado mais um dígito em todos os telefones móveis da região metropolitana do Estado de São Paulo. Esse aumento no número de dígitos possibilitará a criação de milhões de números de celulares a mais em todo o território nacional, já que a medida, aos poucos, será adotada em todos os Estados.

Para estar mais bem inteirado sobre este assunto, que será abordado na primeira parte da atividade, sugerimos acessar o seguinte link, disponibilizado pelo próprio site da Anatel:

<http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalNivelDois.do?org.apache.struts.taglib.html.TOKEN=80ce370e1bd1228e95bcf62ae855843c&acao=carregaCombos&codItemCanal=1746&no>

Recentemente os moradores de São Paulo sofreram uma mudança em sua rotina. Os números dos telefones celulares da cidade de São Paulo e outros 63 municípios do estado ganharam um dígito 9 à esquerda.

1. De acordo com a recomendação da Anatel, os números de celulares de São Paulo, na antiga configuração, deveriam iniciar com os dígitos 6, 7, 8 e 9. Qual é a quantidade máxima de números de telefones celulares, que podemos obter com a antiga configuração?

2. A necessidade de comunicação entre as pessoas, encurtando as distâncias e diminuindo o tempo tem contribuído para o aumento nas vendas dos aparelhos celulares. Explique o que levou a Anatel a acrescentar um dígito (o nº 9) nos números de celulares dessas cidades, em São Paulo?

3. Com a nova configuração, os números de telefones celulares em São Paulo passaram a ser formados por 9 dígitos escolhidos entre 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Porém o 2º dígito jamais pode ser 0 (zero). Pesquise o porquê de esses novos números de celulares não poderem apresentar o algarismo 0 (zero) como seu 2º dígito?

Obs: os números começando pelo prefixo “90” teria um inconveniente, pois é o mesmo usado em ligações a cobrar, o que causaria uma enorme confusão

Leia atentamente a notícia a seguir divulgada por uma agência de notícia no Estado de São Paulo:

Fonte imagem: <http://www.anatel.gov.br>

"A partir deste domingo (29/07/12) os números de celulares de São Paulo e outros 63 municípios ganharão um 9 à esquerda. A medida, conduzida pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), órgão que regula o setor, é obrigatória e gratuita para o DDD 11. Ela vai possibilitar o aumento da capacidade de numeração de 44 milhões para 90 milhões. Hoje, existem 34,2 milhões de chips ativos e 8 milhões nos estoques das operadoras. Ou seja, 95% dos números já têm praticamente um dono."

Fonte: Agência Estado

4. De acordo com a notícia, a nova numeração proporcionaria a capacidade máxima de 90 milhões números de telefones celulares em SP. Essa afirmação está correta? Justifique rigorosamente sua resposta.

5. Desses novos números de celulares, quantos apresentam todos os dígitos distintos?

6. Uma operadora de telefonia celular de SP disponibilizou para venda em de suas lojas recém inauguradas, todos os números de celulares com início 917, 918 e 919. Quantos números ela disponibilizou?

7. Desses números de celulares qual é a quantidade máxima que apresenta números com todos os dígitos diferentes?

Roteiro de Ação 3

Atualmente automóveis de todo o país trafegam identificados por placas cujo modelo é formado por três letras e quatro números. As letras são escolhidas entre 26 disponíveis de nosso alfabeto e os algarismos são escolhidos entre os 10 que compõem o nosso sistema de numeração. Esse sistema foi implantado em 1990.

Antes desse novo sistema de emplacamento dos veículos de trânsito ser implantado em 1990, os automóveis do país utilizavam placas compostas por 2 letras e 4 números .

1. Quantas placas de automóveis, na antiga configuração, formada por 2 letras e 4 números podiam ser obtidas?

2. Explique o que levou o DENATRAN (Departamento Nacional de Trânsito) a acrescentar uma letra as antigas placas de trânsito. Essa decisão era mesmo necessária?

3. Quantas placas de automóveis podem ser obtidas a partir dessa mudança feita pelo DENATRAN?

4. Isso representa um aumento de quantas placas em relação ao número total anterior, que utilizavam 2 letras e 4 algarismos?

5. Esse aumento corresponde a quantos por centos? O que isso significa?

A regulamentação do DENATRAN estabeleceu que cada estado brasileiro possuiria uma seqüência exclusiva para o primeiro emplacamento dos veículos. Para o Estado do Rio de Janeiro foi disponibilizada a seguinte sequência de numeração:

KMF 0001 até LVE 9999.

A ordem da sequência das placas é dada, seguindo da esquerda para a direita, da seguinte maneira:

“Segue-se primeiramente a ordem alfabética da placa, seguida pela ordem numérica.”

Na sequência das placas do Rio de Janeiro, por exemplo, a placa LBO 5723 vem primeiro que a placa LCA 0001.

6. De acordo com as informações anteriores, um automóvel cuja placa é LUP 1239 pode ter sido emplacada do no Rio de Janeiro? Justifique sua Resposta.

7. Qual é o número máximo de veículos que o estado do Rio de Janeiro pode emplacar começando com a letra L?

8. Qual é o número máximo de veículos que podem ser emplacados no Estado do Rio de Janeiro ?

Exercícios Resolvidos

1 -

Um quiosque de praia na Bahia lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

Combinado de sanduíche natural
e suco a R\$ 5,00

Para esse combinado, há quatro opções de sanduíche (frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango).

De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

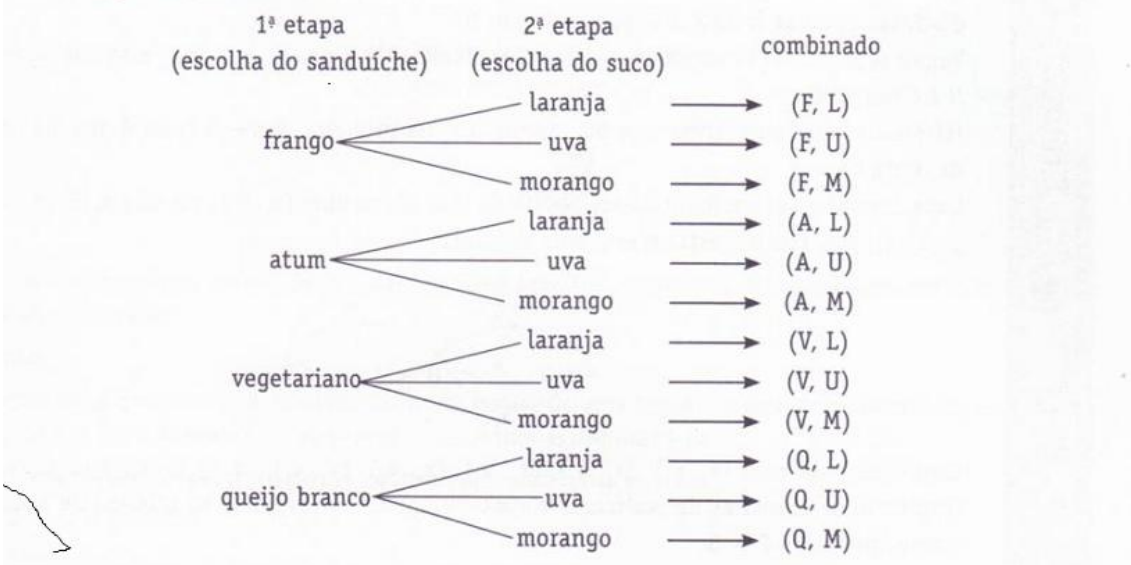
- Em primeiro lugar, a pessoa deverá optar pelo sabor do lanche. Há quatro opções: frango (F), atum (A), vegetariano (V) e queijo branco (Q).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (L), uva (U) ou morango (M).



Praia Jardim de Alah, em Salvador, Bahia.

DORIVAL MOREIRA/PULSAR

A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama sequencial, conhecido como **diagrama da árvore**. Observe:



O número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$.

2-

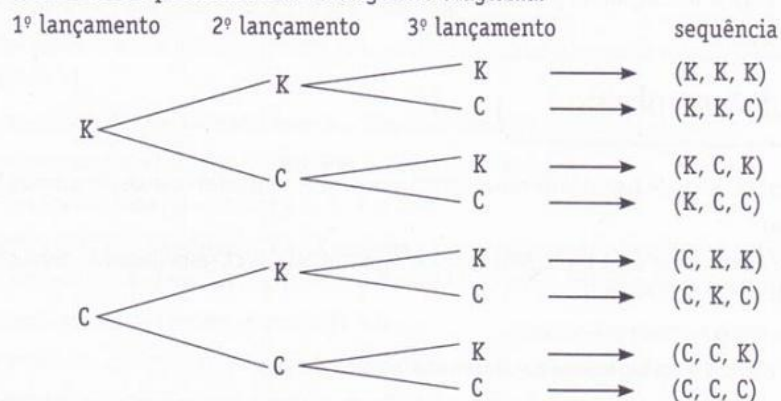
Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

Vamos representar cara por *K* e coroa por *C*.

Há três etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O primeiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.
- Para cada resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o segundo lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- A partir de cada um dos resultados anteriores, o terceiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.

Vamos representar essas possibilidades no seguinte diagrama:



O número de sequências possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.



ZAPT

- 3 - Utilizando todas as letras de *P, R, A, T, O* e trocando-as de ordem, temos uma sequência de cinco letras que forma uma “palavra” com ou sem sentido. Cada “palavra” formada corresponde a um anagrama, como em: PROTA, ATORP, RAPTO, TROPA etc.
O número de anagramas formados é o número de permutações possíveis com as letras *P, R, A, T, O*, a saber:

Assim, pelo PFC, o número de anagramas possíveis é:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (essa sequência multiplicativa em ordem decrescente é chamada de Fatorial de um número e é representada por **$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$**)

- 4 – Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.



- a) De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?
b) Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Solução:

- a) Cada forma de dispor as cinco pessoas lado a lado corresponde a uma permutação entre elas, uma vez que a sequência é formada por todos os membros da família.

O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 120$.

- b) Para que Giba e Gina apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma “única pessoa” que irá permutar com as outras três, num total de $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Gina podem trocar de lugar entre si, de $P_2 = 2! = 2$ maneiras distintas.

Assim, o resultado procurado é $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$.

entre os blocos dentro do bloco

- 5 – Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente duas dessas frutas?

Vamos representar, uma a uma, as possibilidades de mistura:

mamão e banana	maçã e morango	abacate e mamão
mamão e maçã	maçã e laranja	abacate e banana
mamão e morango	banana e morango	abacate e maçã
mamão e laranja	banana e laranja	abacate e morango
banana e maçã	morango e laranja	abacate e laranja

Observe que escolher {mamão e laranja}, por exemplo, é o mesmo que escolher {laranja e mamão}, pois não importa a ordem em que as frutas sejam escolhidas.

Assim, cada escolha que Jaqueline poderá fazer consiste em um **agrupamento não ordenado** de duas frutas

Como podemos contar o número de combinações de vitamina?

Inicialmente, podemos usar o PFC para contar o número de agrupamentos ordenados de duas frutas:

$$\begin{array}{ccc} 6 & \cdot & 5 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1^{\text{a}} \text{ fruta} & & 2^{\text{a}} \text{ fruta} \end{array} = 30$$

Esse cálculo inclui escolhas repetidas, pois sabemos que a ordem de escolha das frutas não importa. O número de ordens possíveis em que duas determinadas frutas podem ser escolhidas é:

$$P_2 = 2 \cdot 1 = 2$$

Assim, como cada escolha foi contada duas vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

6-

Em uma classe de 30 alunos pretende-se formar uma comissão de três alunos para representação discente no colégio. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Solução:

Cada comissão corresponde a uma combinação dos 30 alunos, tomados 3 a 3, uma vez que não importa a ordem de escolha dos alunos.

O número de comissões que podem ser formadas é $C_{30,3}$ ou:

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{(30-3)! 3!} = \frac{30!}{27! 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27! 6} = 4060$$

7-

Em uma academia trabalham sete professores de musculação e dez de ginástica aeróbica. Quantas equipes de dois professores de musculação e dois de ginástica aeróbica podem ser formadas?

Solução:

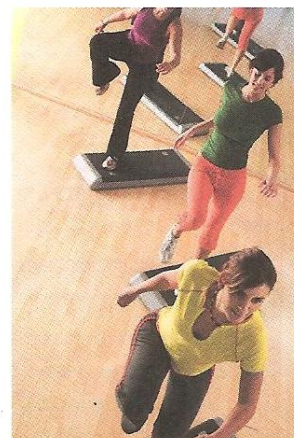
Para escolher os professores de musculação, temos:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 5!} = 21 \text{ possibilidades}$$

Para cada uma dessas 21 possibilidades, o número de maneiras para escolher os professores de aeróbica é:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2! 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45$$

Assim, o resultado procurado é $21 \cdot 45 = 945$.



JUPITER UNLIMITED/OTHER IMAGES

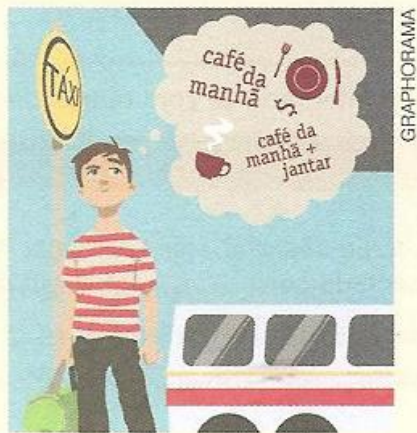
Exercícios Propostos (casa)

1-

Em um teste vocacional, um jovem deve responder a doze questões, assinalando, em cada uma, uma única alternativa, escolhida entre *sim*, *não* e *às vezes*. De quantas formas distintas o teste poderá ser respondido?

2-

Em uma excursão, o passageiro deve escolher a categoria de hotel em que se hospedará (turística, turística superior, primeira, luxo) e o regime de alimentação (só café da manhã ou café da manhã + jantar). De quantos modos distintos o turista poderá fazer a escolha, se os hotéis de luxo só oferecem café da manhã?



3- Em um torneio internacional de natação participam cinco atletas europeus, dois americanos e um brasileiro.

De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

4-

A senha de um cartão magnético bancário, usado para transações financeiras, é uma sequência de duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguida por uma sequência de três algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas?

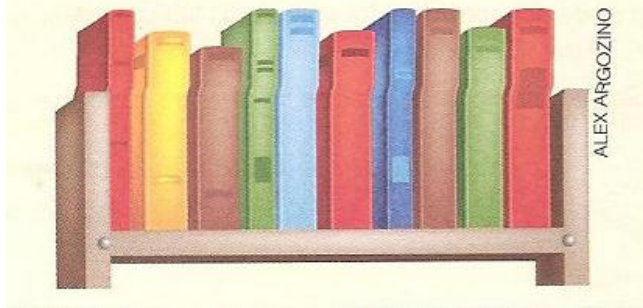
5-

Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.

- a) Quantos são?
- b) Quantos começam por vogal?
- c) Quantos começam e terminam por consoante?

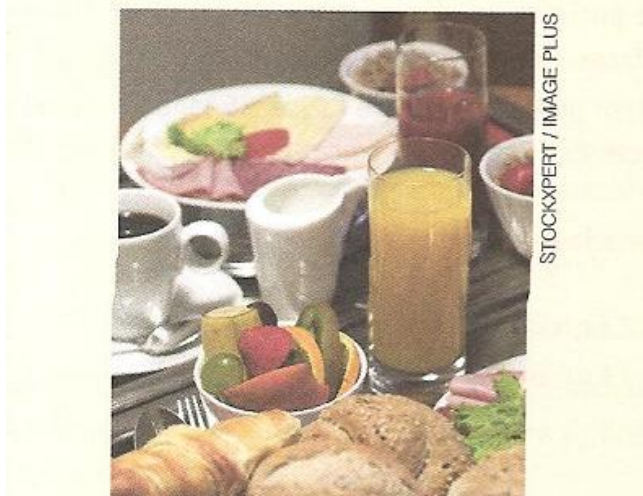
6-

Uma estante tem 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria. De quantos modos podemos arrumar esses livros na estante, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?



7-

Para montar uma cesta de café da manhã estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pães, três tipos de queijo, três tipos de frutas, cinco sabores de geleia e quatro sabores de tortas doces. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pães, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geleia e uma torta doce?



8-

Um casal de Curitiba decidiu que a viagem de lua de mel seria feita pelo Nordeste, visitando exatamente três das nove capitais.

- De quantos modos distintos poderiam ser escolhidas as três capitais, sem levar em consideração a ordem de visita?
- Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantos modos poderia ser feita a escolha?

3- Avaliação

Será realizada em dupla

Tempo de duração:

50 min

Atividade Avaliativa

- 1- Para realizar um bingo beneficente, uma associação solicitou a confecção de uma série completa de cartelas com 10 números cada uma, sem repetição, sendo utilizados os números de 1 a 15.
- 2- As atuais placas de licenciamento de automóveis contam de sete símbolos, sendo três letras, dentre as 26 do alfabeto, seguidas de quatro algarismos. Quantas são as placas distintas, sem o algarismo zero na primeira posição reservada aos algarismos?
- 3- João e Maria fazem parte de um grupo de 15 pessoas, 5 das quais serão escolhidas para formar uma comissão. Do total de comissões que podem ser formadas, de quantas fazem parte João e Maria?
- 4- Com a palavra CADERNO quantos anagramas começam por vogal e terminam com consoante?
- 5- Num Hospital existem 3 portas de entrada que dão acesso para um amplo saguão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve se dirigir ao 6º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

Fontes de pesquisa:

Souza Joamir - Coleção Novo Olhar Matemática, São Paulo: FTD, 2010. Volume 2,

Ribeiro Jackson – Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia, São Paulo: Scipione, 2011. Volume 2.

<http://projetoeduc.cecierj.edu.br>. Matemática 3ª série - 1º bimestres, Roteiros de ação 1, 2 e 3.

Gelson Iezzi e outros, Matemática - Ciência e Aplicações, São Paulo: Saraiva, 2010. Volume 2, pp. 250, 251, 259, 263 a 265 e 268.