FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ
Colégio: COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR AURÉLIO DUARTE
Cursista: ELIANA CRUZ WERMELINGER
Matrículas: O804539-5/0839402-5
Série: 3º ANO – ENSINO MÉDIO
Tutor: SUSI CRISTIANE BRITTO FERREIRA

AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PONTOS POSITIVOS

Como pontos positivos continuo, como venho fazendo no decorrer do curso, destacando o trabalho em duplas ou grupos, que favorece muito a dinamização das aulas e consequentemente a aprendizagem dos alunos (é um trabalho cooperativo que faz aluno e professor crescerem). Também o trabalho com os planos de ação que de forma simples levou os alunos e formarem os conceitos de contagem sem se deterem a fórmulas.

Ao executar este PT me senti muito mais preparada para as aulas, por estar mais embasada para a aplicação das mesmas devido aos textos oferecidos pelo curso e as pesquisas que realizei. E também por estar usando outra metodologia de ensino (formação de conceitos) oferecida pelos planos de ação.

PONTOS NEGATIVOS

Como ponto negativo vou destacar a atividade 6: “Montando um banco de questões”, pois devido a quantidade de aulas dispensadas a esse conteúdo, ficou muito”maçante” para os alunos realizarem mais essa atividade. Os alunos acharam cansativo terem que estudar mais estas questões para realizarem a avaliação.

ALTERAÇÕES

Como alteração colocaria no lugar da atividade 6 apenas uma avaliação individual onde poderia avaliar o nível de aprendizagem dos alunos em relação a este conteúdo. E verificaria também, como se sairiam trabalhando individualmente.

IMPRESSÕES DOS ALUNOS

Com relação às atividades dos planos de ação, os alunos acharam de fácil compreensão, isto, depois de pedirem meu auxilio para poderem realizá-las. Não conseguiram fazer sozinhos e nem com auxílio as questões do plano de ação 3: "*Qual é o número máximo de veículos que o estado do Rio de Janeiro pode emplacar começando com a letra L? e Qual é o número máximo de veículos que podem ser emplacados no Estado do Rio de Janeiro?*" e também a questão *"Qual é o número total de caminhos, de menor distância, que Camila poderá tomar para chegar ao supermercado no ponto P, partindo de sua casa no ponto C marcados na malha?*", do plano de ação 4, por se tratar de permutação com elementos repetidos. A maioria dos alunos das três turmas onde apliquei o Plano de Trabalho participou ativamente das ações propostas, empenhando-se em ajudar ao grupo ou colega de dupla.

Eliana Cruz Wermelinger

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho visa estimular nos alunos o estudo de Análise Combinatória, estudo este realizado na matemática e na lógica, responsável pela análise das possibilidades e das combinações.

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

Comemorando o aniversário de Pedro.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS: Nenhum.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em duplas.

OBJETIVOS: Resolver problemas com o uso do princípio multiplicativo.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula direcionada.

ROTEIRO DE AÇÃO: Pedir aos alunos que realizem as atividades das folhas de atividades à medida que acompanham as explicações.

A necessidade de contar o número de possibilidades de realizar determinada tarefa é muito importante na tomada de decisão em nosso cotidiano.

- Você poderia listar pelo menos duas situações em que isso acontece?

____
____

Aprender a organizar e a contar um grande número de possibilidades exige formas adequadas para ordenar informações. Que tal tentar analisar algumas situações e encontrar formas diferentes de realizar contagens.

Comemorando o aniversário de Pedro.

Pedro decidiu comemorar seu aniversário juntamente com sua namorada Deise, saindo para jantar num restaurante. Na hora marcada, Pedro chegou à casa de Deise, que estava nervosa, pois não conseguia achar a combinação ideal, de roupas, para sair. Ainda nervosa, Deise apresentou a Pedro as roupas que dispunha para escolher.

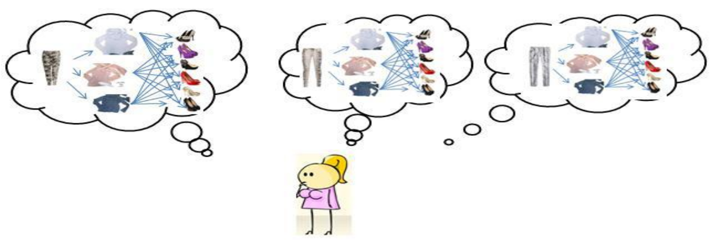
Veja as opções que Deise possuía:

3 calças

3 camisas

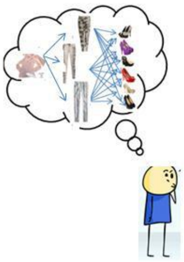
6 pares de sapato

1 - Com essa quantidade de roupa, de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir, usando uma camisa, uma calça e um par de sapatos?



Deise disse a Pedro que gostaria muito de usar a camisa de cor rosa. Pediu a opinião de Pedro sobre qual combinação usar.

2 - Após essa decisão de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir?



Após a sugestão de Pedro, Deise decidiu qual roupa usar e o casal saiu para comemorar o aniversário de Pedro. Eles escolheram jantar no Restaurante Coma Feliz.

Ao chegarem nesse restaurante, um garçom lhes forneceu o cardápio que apresentava três tipos de pratos: Carnes, Lasanhas e Massas. Veja a seguir as opções do cardápio desse restaurante:

Tipos de Pratos

Carnes (Arroz, feijão, farofa)	**Lasanha (Salada)**	**Massas**
Filé mignon	Frango	Ravioli
Alcatra ao molho	Bolonhesa	Espaguete
Contra filé ao molho	4 queijos	Fusilli
Carne assada	Palmito	Canelone
Chuleta na brasa		Capelete
Picanha acebolada		
Bife à role		

Composição

Acompanhamento	**Sobremesa**	**Bebida**
Batata Frita	Sorvete de Morango	Suco de Maracujá
Nhoque	Sorvete de Chocolate	Suco de Laranja
Salada de Maionese	Sorvete Napolitano	Suco de Uva
Purê de Batata	Sorvete de Creme	Suco de Acerola
Purê de Aipim	Sorvete de Flocos	Suco de Melancia
Salada de Feijão Fradinho	Pudim	Refrigerante de Cola
	Mousse de Limão	Refrigerante de Limão
	Mousse de Maracujá	Refrigerante de Laranja
	Mousse de Chocolate	Refrigerante de Uva
	Pavê de Chocolate	Refrigerante de Guaraná
		Chopp
		Água Mineral

Deise escolheu comer lasanha acompanhada de uma bebida e um pudim.

3 - De quantas maneiras diferentes Deise pode fazer sua escolha?

Pedro escolheu comer uma carne, acompanhada de batata frita; uma bebida e uma sobremesa.

4 - De quantas maneiras diferentes Pedro pode fazer sua escolha?

5 - Nesse restaurante, é possível um cliente, comer um prato diferente por dia, acompanhado de uma bebida, durante um ano? Justifique sua resposta.

Atividade de Casa

Em todos os problemas a seguir, procure utilizar recursos de contagem para resolução. Utilize o que achar mais conveniente: árvore das possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama de Euler-Venn, desenho, ou faça uma lista dos elementos ou dos resultados possíveis, o importante é você achar uma forma de contar para dizer quantos e/ou quais são os resultados possíveis em cada situação. Faça os cálculos e dê as respostas em seu caderno.

1. Quantas peças tem um jogo de dominó? Quais são elas?

2. No lançamento simultâneo de 5 moedas, em que pode sair cara ou coroa em cada uma, quantos e quais são os resultados possíveis?

3. Em um jogo com dois dados comuns, quais e quantas são as somas possíveis de todos os números que poderão sair na face superior quando os dois dados forem lançados?

4. Usando todas as letras de uma palavra, podemos formar *anagramas* com elas. Os anagramas foram muito utilizados no passado como códigos de mensagens secretas e hoje ainda são usados como códigos de computadores e em jogos.
a) CAOL é um dos anagramas da palavra COLA. Dê outros dois anagramas para essa palavra, sendo que um deles não precisa ser uma palavra compreensível.
b) Quantos anagramas podemos ter a partir da palavra COLA?
c) Quantos anagramas da palavra cola começam com C?
d) Quantos anagramas da palavra COLA não começam com L?

ATIVIDADE 2

Mudanças de números de celulares.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS: Nenhum.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em grupos de quatro.

OBJETIVOS: Resolver problemas com o uso do princípio multiplicativo.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula direcionada.

ROTEIRO DE AÇÃO: Pedir aos alunos que realizem as atividades das folhas de atividades à medida que acompanham as explicações.

Mudanças de números de celulares

Em 2012, a Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) determinou que fosse acrescentado mais um dígito em todos os telefones móveis da região metropolitana do Estado de São Paulo. Esse aumento no número de dígitos possibilitará a criação de milhões de números de celulares a mais em todo o território nacional, já que a medida, aos poucos, será adotada em todos os Estados.


CBN A RÁDIO QUE TOCA NOTÍCIA SÃO PAULO

COMENTARISTAS BOLETINS EDITORIAS

QUARTA, 25/07/2012

Celulares de São Paulo terão um dígito a mais a partir do próximo domingo

Telefones de todas as operadoras da Região Metropolitana de SP e municípios pertencentes à área com DDD 11 terão de acrescentar o algarismo 9 antes do atual número.

Telefone celular modelo Nokia 6280 (Foto: Wikimedia)

Recentemente os moradores de São Paulo sofreram uma mudança em sua rotina. Os números dos telefones celulares da cidade de São Paulo e outros 63 municípios do estado ganharam um dígito 9 à esquerda.

1. De acordo com a recomendação da Anatel, os números de celulares de São Paulo, na antiga configuração, deveriam iniciar com os dígitos 6, 7, 8 e 9. Qual é a quantidade máxima de números de telefones celulares, que podemos obter com a antiga configuração?

2. A necessidade de comunicação entre as pessoas, encurtando as distâncias e diminuindo o tempo tem contribuído para o aumento nas vendas dos aparelhos celulares. Explique o que levou a Anatel a acrescentar um dígito (o nº 9) nos números de celulares dessas cidades, em São Paulo?

3. Com a nova configuração, os números de telefones celulares em São Paulo passaram a ser formados por 9 dígitos escolhidos entre 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Porém o 2º dígito jamais pode ser 0 (zero). Pesquise o porquê de esses novos números de celulares não poderem apresentar o algarismo 0 (zero) como seu 2º dígito?

Leia atentamente a notícia a seguir divulgada por uma agência de notícia no Estado de São Paulo:

ANATEL Agência Nacional de Telecomunicações

Fonte imagem: http://www.anatel.gov.br

"A partir deste domingo (29/07/12) os números de celulares de São Paulo e outros 63 municípios ganharão um 9 à esquerda. A medida, conduzida pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), órgão que regula o setor, é obrigatória e gratuita para o DDD 11. Ela vai possibilitar o aumento da capacidade de numeração de 44 milhões para 90 milhões. Hoje, existem 34,2 milhões de chips ativos e 8 milhões nos estoques das operadoras. Ou seja, 95% dos números já têm praticamente um dono."

Fonte: Agência Estado

4. De acordo com a notícia, a nova numeração proporcionaria a capacidade máxima de 90 milhões números de telefones celulares em SP. Essa afirmação está correta? Justifique rigorosamente sua resposta.

5. Desses novos números de celulares, quantos apresentam todos os dígitos distintos?

6. Uma operadora de telefonia celular de SP disponibilizou para venda em uma de suas lojas recém inauguradas, todos os números de celulares com inicio 917, 918 e 919. Quantos números ela disponibilizou?

7. Desses números de celulares qual é a quantidade máxima que apresenta números com todos os dígitos diferentes?

Atividade de Casa

Utilizando o Principio Fundamental da Contagem resolva os exercícios abaixo.

1. Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 6, quantos números de:

a) 3 algarismos podemos formar?

b) 3 algarismos distintos podemos formar?

2. Em um saguão de um prédio, existem 7 portas. Tentando melhorar a circulação de ar no local, o zelador está testando diferentes modos de deixar as portas abertas. Ele pode deixar de 1 até 6 portas abertas, mas não todas as 7 ao mesmo tempo. De quantas formas diferentes essas portas poderão ficar abertas?

3. Uma empresa vai colocar código em alguns produtos em fase de testes. Ficou resolvido que para esses testes serão usados códigos formados por 5 algarismos diferentes, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5. Considerando que cada produto receberá um código, quantos produtos entrarão em fase de testes?

ATIVIDADE 3

Mudanças na numeração nas placas de veículos de uma cidade.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS: Princípio Fundamental da Contagem.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em duplas.

OBJETIVOS: Resolver problemas com o uso do princípio multiplicativo.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula direcionada.

ROTEIRO DE AÇÃO: Pedir aos alunos que realizem as atividades das folhas de atividades à medida que acompanham as explicações.

Mudança na numeração das placas de veículos em uma cidade.

Atualmente automóveis de todo o país trafegam identificados por placas cujo modelo é formado por três letras e quatro números. As letras são escolhidas entre 26 disponíveis de nosso alfabeto e os algarismos são escolhidos entre os 10 que compõem o nosso sistema de numeração. Esse sistema foi implantado em 1990.

Antes desse novo sistema de emplacamento dos veículos de transito ser implantado em 1990, os automóveis do país utilizavam placas compostas por 2 letras e 4 números .

1. Quantas placas de automóveis, na antiga configuração, formada por 2 letras e 4 números podiam ser obtidas?

2. Explique o que levou o DENATRAN (Departamento Nacional de Transito) a acrescentar uma letra as antigas placas de transito. Essa decisão era mesmo necessária?

3. Quantas placas de automóveis podem ser obtidas a partir dessa mudança feita pelo DENATRAN?

4. Isso representa um aumento de quantas placas em relação ao número total anterior, que utilizavam 2 letras e 4 algarismos?

5. Esse aumento corresponde a quantos por centos? O que isso significa?

A regulamentação do DENATRAN estabeleceu que cada estado brasileiro possuiria uma seqüência exclusiva para o primeiro emplacamento dos veículos.

Para o Estado do Rio de Janeiro foi disponibilizada a seguinte sequencia de numeração:
KMF 0001 até LVE 9999.

A ordem da sequência das placas é dada, seguindo da esquerda para a direita, da seguinte maneira:
“Segue-se primeiramente a ordem alfabética da placa, seguida pela ordem numérica.”

Na sequência das placas do Rio de Janeiro, por exemplo, a placa LBO 5723 vem primeiro que a placa LCA 0001.

6. De acordo com as informações anteriores, um automóvel cuja placa é LUP 1239 pode ter sido emplacada do no Rio de Janeiro? Justifique sua Resposta.

7. Qual é o número máximo de veículos que o estado do Rio de Janeiro pode emplacar começando com a letra L?

8. Qual é o número máximo de veículos que podem ser emplacados no Estado do Rio de Janeiro ?

Atividade de Casa

1. Considere estes meios de transporte utilizados para o deslocamento entre as cidades.
   - A e B: ônibus, trem e avião.
   - B e C: ônibus e trem.
   - C e D: ônibus, trem, avião e navio.

Calcule o número de modos de se fazer o percurso:
a) A - B - C - D

b) A – B – A

c) A – B – C – D – C

d) B – C – D – C

2. Com os algarismos 3, 4 e 5, calcule a quantidade de números que podemos formar com:
a) 2 algarismos.

b) 2 algarismos distintos.

3. (UFSCar-SP) Quantos números existem entre 1000 e 2000, cada um formado por algarismos distintos e escolhidos entre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

4. Usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 6, quantos números ímpares de 3 algarismos podemos formar?

5. Usando os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9, quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

6. Em uma sala existem 10 lâmpadas. Calcule o número de maneiras de essa sala estar iluminada,sabendo que todas as lâmpadas não podem estar acesas ao mesmo tempo?

ATIVIDADE 4

O trajeto de Camila.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS:
- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em duplas.

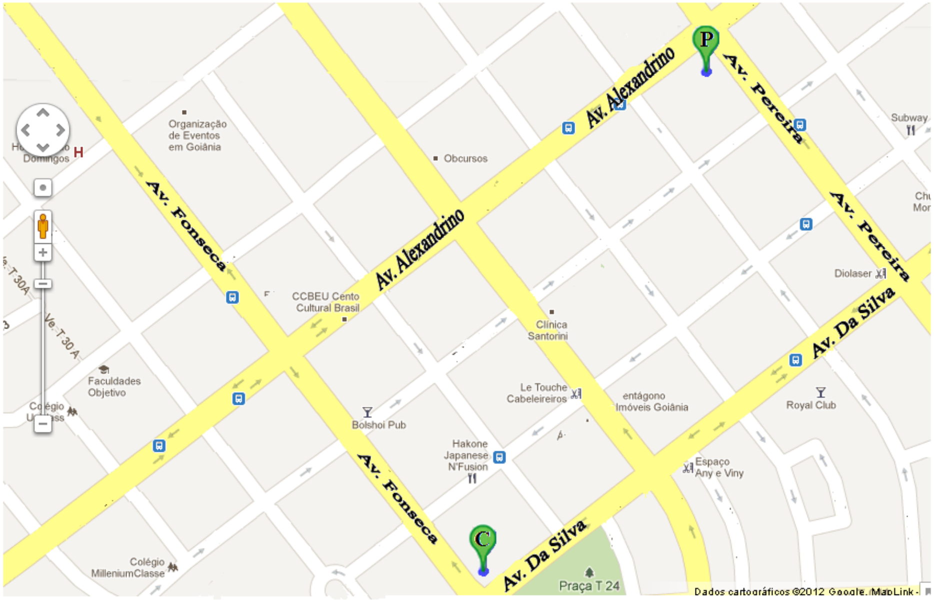
OBJETIVOS: Resolver problemas que envolvem Permutações com repetição

METODOLOGIA ADOTADA: Aula direcionada.

ROTEIRO DE AÇÃO: Pedir aos alunos que realizem as atividades das folhas de atividades à medida que acompanham as explicações.

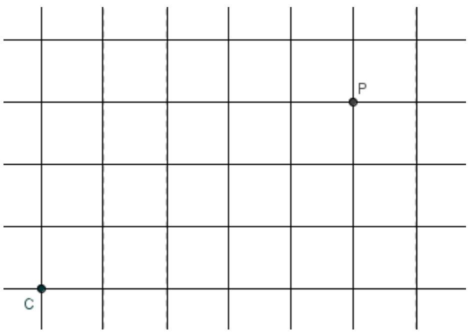
O trajeto de Camila

O mapa a seguir apresenta as ruas e avenidas do bairro da residência de Camila. Sua casa encontra-se na esquina das Avenidas Fonseca e Da Silva. Semanalmente, Camila vai ao Supermercado Promocional que fica na esquina das Avenidas Alexandrino e Pereira. Veja o mapa a seguir.

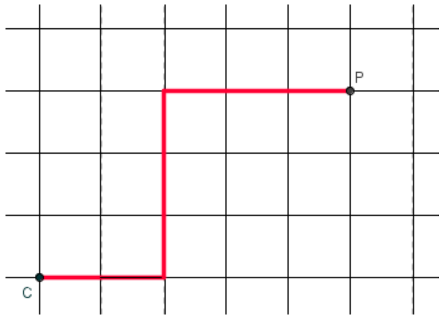


No mapa considerado, todos os quarteirões são quadrados congruentes e chamaremos de “quadra” a distância entre uma esquina e outra de uma mesma rua ou avenida.

Essa situação pode ser modelada por uma malha quadriculada representando as ruas e avenidas desse bairro. Indicaremos pelo ponto **C** a localização da casa de Camila e pelo ponto **P** a localização do Supermercado Promocional. Veja a seguir a representação dessa situação:



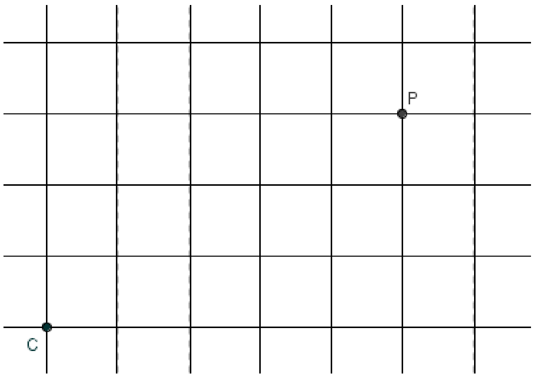
Indicando pela letra X o trajeto de uma quadra feito na horizontal e pela letra Y o trajeto de uma quadra feito na vertical, podemos indicar como um dos possíveis caminhos de Camila chegar ao supermercado partindo de sua casa (C) o percurso XXYYYXXX. Veja na malha abaixo como seria esse percurso.



1. Indique outros cinco caminhos para chegar ao ponto P partindo do ponto C e seu respectivo número de quadras.

2. Qual é a menor distância (em número de quadras) percorrida por Camila para chegar ao Supermercado Promocional, no ponto **P**, partindo de sua casa, no ponto **C**, marcados na malha?

3. Trace na malha a seguir pelo menos 05 caminhos diferentes que possuam a menor distância entre si.



3. Qual é o número total de caminhos, de menor distância, que Camila poderá tomar para chegar ao supermercado no ponto P, partindo de sua casa no ponto C marcados na malha?

Atividade de Casa

1. Em um colégio, existem 2 rampas do andar térreo para o 1° andar, 4 escadas do 1° para o 2° andar e 3 escadas do 2° para o 3°andar. Calcule o número de trajetos possíveis para um aluno se deslocar:

a) do andar térreo para o 2° andar.

b) do 2°andar para o 3° e, a seguir, para o térreo.

2. Invente um problema sobre escolha de roupa, comida ou bebida para ser resolvido por meio do princípio multiplicativo e cuja resposta seja 24.

3. Elabore um problema para ser resolvido pela árvore das possibilidades que tenha a seguinte pergunta:

De quantos modos diferentes eles podem se sentar?

ATIVIDADE 5

Dando nomes aos bois.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS:
- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em duplas.

OBJETIVOS: Levar o aluno a conhecer a nomenclatura das diversas formas de contagem

METODOLOGIA ADOTADA: Aula direcionada.

ROTEIRO DE AÇÃO: Pedir aos alunos que realizem as atividades das folhas de atividades à medida que acompanham as explicações.

As situações-problema que resolvemos até agora exigiram uma forma organizada de dispor dados de modo a permitir a contagem dos elementos ou resultados possíveis. Como dito em aula, a parte da matemática que desenvolve modelos que permitem a resolução de problemas desse tipo é chamada de ***Análise Combinatória***.

Apesar de o princípio fundamental da contagem ser a idéia básica para a resolução desses problemas, há alguns processos de contagem que possuem características especiais e que aparecem com frequência. Por isso, vamos analisar algumas dessa formas específicas de se organizar contagens, denominadas ***permutação, arranjos e combinações.***

Lembre-se que nas atividades anteriores você já utilizou todas elas, porém sem saber como se chamavam.

Permutação

Seja D um conjunto com d elementos chamamos de permutação a todo arranjo com d elementos, retirados de D.

Exemplo:

1) Seja A um conjunto com os elementos {a, b, c}.

As permutações de A são: {(a,b,c);(a,c,b);(b,a,c);(b,c,a);(c,a,b);(c,b,a)}.

2) Quantos anagramas a palavra *oba* possui?

As **permutações** da palavra dada são: {(oba);(oab);(bao);(boa);(abo);(aob)}

Calculo de permutações por **fatorial.** Definição de fatorial:

$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots3.2.1$

Aproveitar este momento para definir e dar outros exemplos de fatorial

Exemplo:

1) Quantas são as possíveis formações de 5 pessoas em fila indiana?

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

2) Quantos são os anagramas da palavra *EMPUXO* ?

São seis letras, sem repetição, assim $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

Que tal resolver alguns exercícios a fim de praticar um pouco de fatorial, relacionando-os com outras operações já conhecidas.

1. Calcule o valor de:

a) 8!

b) 9!

c) 4! + 5!

d) $(3!)^2 - 5 \cdot 5!$

2. Simplifique:

$a)\ \frac{10!}{9!}$

$b)\ \frac{12!}{13!}$

$c)\ \frac{6.7!}{6!.5}$

$d)\ \frac{30!}{27!3!}$

3. Efetue.

$a)\ \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$

$b)\ \frac{10!+9!}{9!-8!}$

4. Simplifique.

$a)\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

$b)\ \frac{(n+2)!}{n!}$

Arranjo

Dado o conjunto B = {2, 4, 6, 8}. Os agrupamentos de dois elementos do conjunto B, são:

{(2,4), (2,6), (2,8), (4,2), (4,6), (4,8), (6,2), (6,4), (6,8), (8,2), (8,4), (8,6)}

Veja que cada arranjo é diferente do outro. Portanto, são caracterizados:

Pela natureza dos elementos: (2,4) ≠ (4,8)

Pela ordem dos elementos: (1,2) ≠ (2,1)

Exemplo:

Em um colégio, dez alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?
Temos dez alunos disputando duas vagas, portanto, dez elementos tomados dois a dois.

$$A=\frac{n!}{(n-p)!}\Rightarrow A=\frac{10!}{(10-2)!}\Rightarrow A=\frac{10!}{8!}\Rightarrow A=\frac{10*9*8!}{8!}\Rightarrow A=10*9=90$$

Agora é sua vez de praticar um pouco mais!

1. Calcule.
a) $A_{10,2} + A_{5,2}$
b) $A_{4,3} + A_{7,2}$

2. Simplifique.

$a)\ \dfrac{A_{n,3}}{A_{n-1,2}}$

$b)\ \dfrac{A_{2n,2}}{A_{2n+1,2}}$

3. Resolva as equações.

a) $A_{n,2} = 56$

b) $A_{n,3} = 8.\ A_{n,2}$

4. No sistema decimal, quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar?

5. Quantos números inteiros positivos, maiores que 10 e menores 1000, têm algarismos repetidos?

6. (Cefet-PR-2008) Para tentar melhorar seu índice no Ibope, uma emissora de televisão resolveu mudar a ordem de sua programação, no sábado, das 12 às 18 horas. Os programas exibidos nesse horário são: esporte, documentário, religioso, variedades, filme nacional e filme estrangeiro.Cada um desses programas tem duração de uma hora.Se o programa religioso deve ser o último a ser exibido,então, o número de maneiras diferentes de se formar a programação é de:

a) 120

b) 5

c) 60

d) 720

e) 6

Combinação

Em uma festa de aniversário será servido sorvete aos convidados. Serão oferecidos os sabores de morango (M), chocolate (C), baunilha (B) e ameixa (A) e o convidado deverá escolher dois entre os quatro sabores. Notemos que, não importa a ordem em que os sabores são escolhidos. Se o convidado escolher morango e chocolate {MC} será a mesma coisa que escolher chocolate e morango {CM}. Nesse caso, podemos ter escolhas repetidas, veja: {M,B} = {B,M}, {A,C} = {C,A} e assim sucessivamente. Portanto, na combinação os agrupamentos são caracterizados somente pela natureza dos elementos.

Exemplo:

Lucas vai realizar uma viagem e quer escolher quatro entre nove camisetas. De quantos modos distintos ele pode escolher as camisetas?

Temos nove camisetas tomadas quatro a quatro.

$$C = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C = \frac{9!}{4!(9-4)!}$$

$$C = \frac{9*8*7*6*5!}{4!*5!}$$

$$C = \frac{3024}{4*3*2*1}$$

$$C = \frac{3024}{24}$$

$$C = 126$$

Que tal praticar um pouco?

1) Calcule o valor de:
a) $C_{7,2}$
b) $C_{6,3} + C_{9,2}$
c) $2!C_{8,3} + 3!C_{7,4}$

2. Simplifique.

$$a)\frac{C_{n,3}}{C_{n-1,2}}$$

$$b)\frac{C_{2n+2,2}}{C_{2n,2}}$$

3. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas num grupo de 10 pessoas?

4) Em uma só urna há 10 fichas numeradas de 1 a 10. De quantos modos podemos retirar 3 fichas para que a soma delas seja maior ou igual a 9?

5. Em uma aula de dança de salão, há 5 homens e 5 mulheres.De quantos modos diferentes podem ser formados casais para uma dança?
Ao resolver este problema, Pedro pensou: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida entre as 10, porque pode ser homem ou mulher. Depois que a primeira for escolhida, a segunda só poderá ser escolhida entre as 5 pessoas do sexo oposto ao da primeira. Então há 10 . 5 modos de formar um casal para uma dança". Você concorda com Pedro? Por quê?

Permutação com elementos repetidos

Permutação de elementos repetidos deve seguir uma forma diferente da permutação, pois elementos repetidos permutam entre si. Para compreender como isso acontece veja o exemplo abaixo:

A permutação da palavra MATEMÁTICA ficaria da seguinte forma:

Sem levar em consideração as letras (elementos) repetidas, a permutação ficaria assim:
$P_{10} = 10! = 3.628.800$

Agora, como a palavra MATEMÁTICA possui elementos que repetem, como a letra A que repete 3 vezes, a letra T repete 2 vezes e a letra M repete 2 vezes, assim a permutação entre si dessas repetições seria 3! . 2! . 2!. Portanto, a permutação da palavra MATEMÁTICA será:

$$P^{3,2,2}_{10} = \frac{10!}{2!\,.\,3!\,.\,2!} = \frac{3628800}{2\,.\,1\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,1} = \frac{3628800}{24} = 151200$$

Portanto, com a palavra MATEMÁTICA podemos montar 151200 anagramas.

Seguindo esse raciocínio podemos concluir que, de uma maneira geral, a permutação com elementos repetidos é calculada utilizando a seguinte fórmula:

Dada a permutação de um conjunto com n elementos, alguns elementos repetem n_1 vezes, n_2 vezes e n_n vezes. Então, a permutação é calculada:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_n} = \frac{n!}{n_1!\; n_2!\; \ldots\; n_n!}$$

Exemplo:
Quantos anagramas podem ser formados com a palavra MARAJOARA, aplicando a permutação teremos:

$$P^{4,2}_9 = \frac{9!}{4!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,2!} = \frac{15120}{2} = 7560$$

Portanto, com a palavra MARAJOARA podemos formar 7560 anagramas.

Que tal resolver mais estes problemas?

1. Considere os anagramas da palavra ARARA. Calcule:
a) o total deles.
b) o número deles que têm as vogais juntas.
c) o número deles que não têm as vogais juntas.

2. Quantos números inteiros podemos escrever usando 3 algarismos 1, 4 algarismos 5 e 2 algarismos 7?

3. Ao resolverem o problema ”Quantos anagramas tem a palavra JULIANA? Fábio e Eduardo não chegaram a um acordo. O primeiro dizia que o número de anagramas era 5040. O segundo afirmava que era 2520. Quem estava certo? Por quê?

ATIVIDADE 6

Hora de testar seus conhecimentos.

HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo e/ou aditivo, noções de permutação simples e/ou com elementos repetidos, arranjo e/ou combinação simples.

PRÉ-REQUISITOS:
- Princípio multiplicativo e aditivo.
- Noções de permutação simples e com elementos repetidos.
- Arranjo e combinação simples.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em fileiras onde os alunos estarão sentados individualmente em suas carteiras.

OBJETIVOS: Avaliar de forma individual as habilidades dos alunos em resolver situações-problema referentes às diversas formas de contagem.

METODOLOGIA ADOTADA: Avaliação individual.

ROTEIRO DE AÇÃO: Entregar as avaliações e pedir aos alunos que resolvam as questões sozinhos.

Aluno(a): ____________________________ Turma:____Data: ___/___/13

1. (UFAL - adaptada) Quantos números inteiros positivos divisíveis por 5, de 4 algarismos distintos, podem ser escritos com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?
a) 625
b) 125
c) 120
d) 24
e) 20

2. Quantos anagramas da palavra PROBLEMA começam com P e terminam com M?
a) 40 320
b) 5 040
c) 15 120
d) 120
e) 720

3. (UFBA - adaptada) Um salão tem cinco portas e ficará aberto se, pelo menos, uma das portas estiver aberta. Calcule de quantas maneiras diferentes o salão poderá estar aberto.
a) 30
b) 31
c) 32
d) 119
e) 120

4. (Saerjinho 2011) Doze competidores disputam um campeonato de xadrez em que o resultado não permite empate. De quantos modos diferentes podemos ter a classificação dos três primeiros lugares?
a) 1728
b) 1320
c) 220
d) 36
e) 33

5. (Saerjinho 2011) Pedro é supersticioso e acredita que os números ímpares dão sorte. Ele escolheu para placa de seu carro um número formado por quatro dígitos, todos números ímpares e distintos.
A quantidade de opções numéricas para a placa do carro de Pedro é igual a:
a) 5
b) 20
c) 120
d) 480
e) 625

6. (Saerjinho 2011) Treze competidores disputam um campeonato de xadrez em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?
a) 13
b) 26
c) 78
d) 156
e) 169

7. Uma professora de Matemática do 3°ano passou a seguinte equação para que os alunos resolvessem

$$\boxed{C_{n,\,1} + C_{n,\,2} = 6}$$

Arnaldo resolver da seguinte forma:

$$C_{n,1} + C_{n,2} = 6 \Rightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!} = 6 \Rightarrow$$

$$n + n\cdot(n-1) = 6 \Rightarrow n + n^2 - n = 6 \Rightarrow n^2 = 6 \Rightarrow n = \sqrt{6}$$

$$S = \{\sqrt{6}\}$$

Já Roberto resolveu assim:

$$C_{n,1} + C_{n,2} = 6 \Rightarrow \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)!}{1\cdot(n-1)!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2\cdot1\cdot(n-2)!} = 6 \Rightarrow$$

$$\frac{n}{1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2n}{2} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow 2n + n\cdot(n-1) = 12 \Rightarrow 2n + n^2 - n = 12 \Rightarrow$$

$$n^2 + n - 12 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\cdot1}$$

$$n' = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$n'' = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \rightarrow \textit{não} \quad \textit{serve}$$

$$S = \{3\}$$

Quem resolveu corretamente, Arnaldo ou Roberto?

8. (Saerjinho 2011) No fim de uma competição esportiva sobem ao pódio apenas três concorrentes. Se a competição envolvia 6 equipes, de quantos modos é possível formar o pódio?
a) 2
b) 18
c) 20
d) 120
e) 720

9. (Saerjinho 2011) Em uma lanchonete, o freguês pode escolher 2 sabores diferentes, entre 4 disponíveis, para uma pizza, e um tipo de suco entre 3 disponíveis.
Quantas são as possibilidades de o freguês escolher duas pizzas de sabores diferentes e um tipo de suco?
a) 12
b) 18
c) 24
d) 36
e) 48

10. (Fatec-SP) Para realizar operações bancárias via Internet, certo site exige que se apresente uma senha constituída por 4 algarismos.Depois de realizada a operação, é necessário digitar uma segunda senha, de 3 algarismos. Nos dois casos podem ser escolhidos quaisquer algarismos de 0 a 9. Suponhamos que alguém que não conheça as senhas tente descobri-las fazendo tentativas.O número máximo de tentativas será
a) 4^{10}
b) 10^7
c) 11 000
d) 10 998
e) 120

GABARITO:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
d	e	b	b	c	c	Arnaldo	d	b	c

AVALIAÇÃO

Uma boa forma de avaliar a aprendizagem dos alunos é acompanhar a solução dos desafios e atividades disponíveis nos objetos de aprendizagem utilizados durante a aula. Baseado nisto a avaliação será baseada na participação dos alunos na realização das tarefas e no processo de colaboração com o grupo.

A tarefa 6 também corresponde a uma avaliação e deverá ser pontuada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO:

- Roteiro de ação 1 – Comemorando o aniversário de Pedro
- Roteiro de ação 2 – Mudança de números de celulares
- Roteiro de ação 3 - Mudança na numeração de placas de veículos
- Roteiro de ação 4 – O trajeto de Camila

(Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 1º bimestre/2013 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/)

LIVROS DIDÁTICOS UTILIZADOS PARA PESQUISA E ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES:

- José Ruy Giavanni, José Roberto Bonjorno **Matemática Completa : ensino médio** : volume 2 – 2. ed. renov. - São Paulo: FTD, 2005. – Coleção (matemática completa)
- Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz **Matemática : ensino médio** : volume 2 – 6 ed. – São Paulo : Saraiva, 2010.

ENDEREÇOS ELETRÔNICOS ACESSADOS PARA ELABORAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO E DAS ATIVIDADES:

- http://www.algosobre.com.br/matematica/analise-combinatoria.html
- http://www.brasilescola.com/matematica/analise-combinatoria.htm
- http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/paginas/protegidas/prova/configurarProva.faces