PLANO DE TRABALHO

Apresentado ao Curso de Capacitação para Professores da Rede Estadual do Rio de Janeiro

MATEMÁTICA NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Por: Jerônimo Pereira Vilela

Tutor: Edeson dos Anjos Silva

Introdução

Ensinar matemática atualmente é uma tarefa muito árdua. Os alunos estão cada vez mais desmotivados e desinteressados em aprender, e se distanciam deste conhecimento que é fundamental para sua formação cultural e profissional uma vez que a matemática faz parte da formação plena do cidadão.

Recai sobre os ombros dos professores a cobrança por um ensino onde a relação Ensino X Aprendizagem seja cada vez mais prazerosa, tornando a aproximação do educando com a matemática, possível.

Com este olhar trago uma proposta de abordagem de ANÁLISE COMBINATÓRIA e aproximando estes conceitos ao cotidiano. Utilizando de geometria, gráficos e outras aplicações que forem possíveis.

Vale lembrar que nem sempre isto é possível, pois, nem toda a matemática surgiu de modo espontâneo, ou mesmo da observação da natureza e seus fenômenos, mas também da urgente necessidade de organização da vida em sociedade e da sua busca incessante pela modernização dos processos.

Apresento este trabalho como um meio e não como um fim, de acordo com a realidade e disponibilidade tecnológica da minha escola.

Atividade 1

Introduzindo o conceito de Análise Combinatória

Duração: 100 minutos

Assunto: Análise Combinatória

Objetivos: introduzir o conceito de Análise Combinatória através de situações problemas.

Pré requisitos: leitura, escrita e operações básicas da matemática.

Material necessário: quadro branco, caneta para quadro branco, copias de planilhas, tabelas e folha de atividades, lápis e borracha.

Organização da turma: os alunos estarão organizados em duplas.

Desenvolvimento

Análise Combinatória

Fatorial de um número:

$$\boxed{n!=n.(n-1).(n-2)...3.2.1}$$

Definições especiais:

$$\boxed{\begin{array}{l} 0!=1 \\ 1!=1 \end{array}}$$

1) Calcule o valor da expressão $\frac{100!+101!}{99!}$.

$$\frac{100!+101!}{99!} = \frac{100.99!+101.100.99!}{99!} = 100 + 101.100 = 100 + 10100 = 10200$$

2) Resolva a equação $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 56$.

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 56 \Rightarrow \frac{(x+1)(x)(x-1)!}{(x-1)!} = 56 \Rightarrow (x+1)(x) = 56 \Rightarrow \mathrm{x}^2 + x = 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 15}{2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = 7 \\ \mathrm{x} = \text{-}8 \end{cases}$$

Resposta : $x = 7$, pois não existe fatorial de um número negativo.

Arranjo simples:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

3) Calcule $\frac{A_{6,2} + A_{4,3} - A_{5,2}}{A_{9,2} + A_{8,1}}$.

$$\frac{A_{6,2} + A_{4,3} - A_{5,2}}{A_{9,2} + A_{8,1}} = \frac{\frac{6!}{(6-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} - \frac{5!}{(5-2)!}}{\frac{9!}{(9-2)!} + \frac{8!}{(8-1)!}} = \frac{30 + 24 - 20}{72 + 8} = \frac{34}{80} = \frac{17}{40}$$

4) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com o algarismos do sistema decimal (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) sem os repetir, de modo que:

a) COMECEM COM 1.

R: O número pode possuir três algarismos, sendo que para o primeiro existe apenas 1 possibilidade (1) e para os outros dois ainda existem 9 números disponíveis:

$$1.A_{9,2}=\frac{9!}{(9-2)!}=\frac{9!}{7!}=\frac{9.8.7!}{7!}=9.8=72 \text{ números.}$$

b) COMECEM COM 2 E TERMINEM COM 5.

R: Para o primeiro algarismo existe apenas 1 possibilidade (2), e para o terceiro também existe apenas 1 possibilidade (5). Para o segundo ainda existem 8 possibilidades:

$$1.1.A_{8,1}=\frac{8!}{(8-1)!}=\frac{8!}{7!}=\frac{8.7!}{7!}=8 \text{ números.}$$

c) SEJAM DIVISÍVEIS POR 5.

R: Para um número ser divisível 5, ele deve terminar com 0 ou com 5. Primeiramente vamos calcular o número de divisíveis por 5 que terminam com 0:

$\rightarrow$ Para o terceiro algarismo existe apenas 1 possibilidade (0), e para os dois primeiros ainda existem 9 números disponíveis. Portanto o número de divisíveis por 5 que terminam com 0 é:

$$1.A_{9,2}=\frac{9!}{(9-2)!}=\frac{9!}{7!}=\frac{9.8.7!}{7!}=9.8=72 \text{ números.}$$

$\rightarrow$ Agora calculamos quantos divisíveis por 5 terminam com 5: para o terceiro algarismo existe apenas uma possibilidade (5). Para o primeiro algarismo existem ainda 8 possibilidades, pois o número não pode começar com 0 (senão seria um número de 2 algarismos). E para o segundo algarismo também existem 8 possibilidades (o segundo algarismo pode ser 0).

$$1.A_{8,1}.A_{8,1}=\frac{8!}{(8-1)!}.\frac{8!}{(8-1)!}=\frac{8!}{7!}.\frac{8!}{7!}=\frac{8.7!}{7!}.\frac{8.7!}{7!}=8.8=64 \text{ números.}$$

Resposta: O número de divisíveis por 5 é $72+64=136$ números.

5) Quantos são os números compreendidos entre 3000 e 4000 formados por algarismos distintos escolhidos entre 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9?

R: O número deve ter quatro algarismos (pois está entre 3000 e 4000). Para o primeiro algarismo existe apenas uma possibilidade (3), e para os outros três ainda existem 8 números disponíveis, então:

$$1.A_{8,3}=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=\frac{8.7.6.5!}{5!}=8.7.6=336 \text{ números.}$$

Permutação Simples:

É um caso particular de arranjo simples. É o tipo de agrupamento ordenado onde entram **todos** os elementos.

$$\boxed{P_n = n!}$$

6) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados por 1,2,3,5 e 8?

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ números.

7) Quantos anagramas da palavra EDITORA :

a) COMEÇAM POR A.

Para a primeira letra existe apenas uma possibilidade (A), e para as outras 6 letras existem 6 possibilidades. Então o total é :

$1.P_6 = 1.6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ anagramas.

b) COMEÇAM POR A e terminam com E.

Para a primeira letra existe 1 possibilidade (A), e para última também só existe 1 (E), e para as outras 5 letras existem 5 possibilidades. Então o total é :

$1.1.P_5 = 1.1.5! = 5.4.3.2.1 = 120$ anagramas.

8) Calcule de quantas maneiras podem ser dipostas 4 damas e 4 cavalheiros, numa fila, de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas.

R :Existem duas maneiras de fazer isso :

C - D - C - D - C - D - C - D ou D - C - D - C - D - C - D - C

Colocando um cavalheiro na primeira posição temos como número total de maneiras :

$P_4.P_4 = 4!.4! = 24.24 = 576$ maneiras.

Colocando uma dama na primeira posição temos também :

$P_4.P_4 = 4!.4! = 24.24 = 576$ maneiras.

Portanto o total é $576 + 576 = 1152$ maneiras.

Combinação Simples:

é o tipo de agrupamento em que um grupo difere do outro apenas pela **natureza** dos elementos componentes.

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

9) Resolver a equação $C_{m,3} - C_{m,2} = 0$.

$$\frac{m!}{3!(m-3)!} - \frac{m!}{2!(m-2)!} = 0$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)!}{3!(m-3)!} - \frac{m.(m-1).(m-2)!}{2!(m-2)!} = 0$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{3!} - \frac{m.(m-1)}{2!} = 0$$

$$\frac{m^3 - 2m^2 - m^2 + 2m}{6} - \frac{m^2 - m}{2} = 0$$

$$\frac{m^3 - 3m^2 + 2m - 3m^2 + 3m}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^3 - 6m^2 + 5m = 0$$

$$m^2 - 6m + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m' = 5 \\ m'' = 1 \end{cases}$$

Resposta : $m = 5$.

obs : $m = 1$ não é a resposta porque não pode haver $C_{1,3}$.

10) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes podem ser feitas?

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!.(10-6)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.4!} = \frac{5040}{4!} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ tipos de saladas.}$$

11) Numa reunião com 7 rapazes e 6 moças, quantas comissões podemos formar com 3 rapazes e 4 moças?

RAPAZES - $C_{7,3}$

MOÇAS - $C_{6,4}$

O resultado é o produto $C_{7,3}.C_{6,4}$.

$$\frac{7!}{3!(7-3)!}.\frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{7.6.5.4!}{3!.4!}.\frac{6.5.4!}{4!.2!} = \frac{210}{3!}.\frac{30}{2} = 35.15 = 525 \text{ comissões.}$$

Atividade 2

Atividade de fixação

Duração: 100 minutos

Assunto: Fatorial, Arranjo, Permutação e Combinação.

Objetivos: fixar os conteúdos propostos através de atividades.

Pré requisitos: conhecimentos básicos de Fatorial, Arranjo, Permutação e Combinação.

Material necessário: quadro branco, caneta para quadro branco, cópias das atividades a serem propostas, lápis e borracha.

Organização da turma: os alunos estarão organizados em duplas.

Desenvolvimento

Exercícios

1) Quantos são os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5?

2) Eu possuo 4 pares de sapatos e 10 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

3) De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FLÚOR de sorte que a última letra seja sempre a letra R?

4) Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar que não comecem com 16, nem com 17?

5) Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar que não comecem com 16, nem com 17?

6) Qual deve ser o valor numérico de n para que a equação $(n + 2)! = 20 \cdot n!$ seja verdadeira?

7) De um total de 6 pratos à base de carboidratos e 4 pratos à base de proteínas, pretendo fazer o meu prato com 5 destes itens, itens diferentes, de sorte que contenha ao menos 2 proteínas. Qual é o número máximo de pratos distintos que poderei fazer?

8) Em um refeitório há doces e salgados. Cada pessoa receberá um recipiente com 3 doces, dos 8 tipos disponíveis e apenas 2 salgados, dos 7 tipos fabricados. Quantas são as diferentes possibilidades de preenchimento do recipiente?

9) Oito pessoas irão acampar e levarão quatro barracas. Em cada barraca dormirão duas pessoas. Quantas são as opções de distribuição das pessoas nas barracas?

10) Em uma sapateira irei guardar 3 sapatos, 2 chinelos e 5 tênis. Quantas são as disposições possíveis desde que os calçados de mesmo tipo fiquem juntos, lado a lado na sapateira?

11) Grêmio (RS), Flamengo (RJ), Internacional (RS) e São Paulo (SP) disputam um campeonato. Levando-se em conta apenas a unidade da federação de cada um dos clubes, de quantas maneiras diferentes pode terminar o campeonato?

12) Um certo número de pessoas pode ser agrupado de duas em duas pessoas, não importando a ordem das mesmas, resultando em 10 diferentes possibilidades de agrupamento. Quantas pessoas fazem parte deste grupo?

13) Se enfileirarmos 3 dados iguais, obteremos um agrupamento dentre quantos possíveis?

14) Em um pequeno galinheiro há 12 aves, dentre um galo, galinhas, frangos e frangas, no entanto só existe espaço para 10 aves no poleiro. De quantas maneiras distintas elas podem ser empoleiradas, sabendo-se que o poleiro sempre ficará lotado?

Avaliação

O processo de avaliação será realizado através:

- da observação do empenho e participação dos alunos na realização das atividades.
- Observar as dificuldades encontradas na realização das atividades propostas.
- Questionar como o aluno viu o trabalho proposto, o que mais lhe chamou a atenção e o que precisa melhorar.
- Pequenas avaliações escritas do conteúdo trabalhado, em dupla, com quatro questões.

Bibliografia:

Matemática: ciência e aplicações, volume 3 / Gelson Iezzi ... [et al.]. – São Paulo: Atual, 2001.

Novo olhar matemática, volume 3 / Joamir Roberto de Souza – 1ª Ed. – São Paulo: FTD, 2010.

Matemática, volume único / Luiz Roberto Dante – 1ª Ed. – São Paulo: ática, 2005.

Matemática, ensino médio ; volume 3 / Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz – 6ª Ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.