Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano – 1º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

<u>Introdução à Probabilidade</u>

<u>Tarefa 4</u>

Cursista: Pedro Henrique Galhardo Rodrigues

Tutor: Andréa Silva de Lima

Sumário

Introdução

Este Plano de Trabalho tem por objetivo apresentar a pertinência dos eventos combinatórios e probabilísticos em nosso cotidiano bem como suas interpretações matemáticas por métodos de contagem ou por fórmulas algébricos.

Inicialmente, simples frações serão necessárias para compreender os conceitos da probabilidade. Após o desenvolvimento do conteúdo, será necessário lançar mão dos conteúdos trabalhados nas aulas de combinatória.

Para introduzir o assunto, iremos fazer uma reflexão de como a probabilidade está presente em nossas vidas muito mais do que imaginamos. Nas cotações de seguros, nos sorteios em geral e até mesmo na genética.

Os conceitos básicos de probabilidade serão passados de forma progressiva, e então os alunos farão 5 exercícios. Para contextualizar o que foi aprendido, será apresentada através de slides, uma explicação sobre o uso da probabilidade na genética.

A segunda atividade será um interessante estudo sobre o funcionamento da Mega Sena e as possibilidades de ser um raro e felizardo ganhador.

Este PT está previsto para ser aplicado em 8 aulas de 50 min, mais duas aulas para a avaliação.

Desenvolvimento

ATIVIDADE1

Habilidade relacionada:H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Frações e Princípio Fundamental da Contagem

Tempo de duração:250 min

Recursos utilizados: Folha de atividades, Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Geogebra, Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Resolver problemas com probabilidade.

Metodologia adotada: Em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo. Para introduzir o assunto será exibido um vídeo, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=eQYZkbHxPlY e também a leitura do texto abaixo. Está prevista também nesta atividade, a exibição do filme: **(Agentes do Destino(2011)/Matt Damon, Emily Blunt).**

O QUE É PROBABILIDADE?

Começaremos nosso estudo lendo o texto abaixo:

> ***É evidente que o homem deve levar em conta todo acontecimento ou incidente futuro, ainda que não saiba absolutamente se ele ocorrerá ou não. Esta incerteza, nós a exprimimos inserindo, por necessidade, a palavra "provável". Não só o homem comum percebe os acontecimentos indeterminados: os homens da ciência igualmente estabeleceram que é necessário, nos fatos de toda natureza, atribuir um significado primordial aos acontecimentos indeterminados. Os homens da ciência deram tal importância aos acontecimentos "aleatórios", isto é, não determinísticos, que foram levados a desenvolver um sistema de cálculo destinado a avaliar estes acontecimentos: o cálculo das probabilidades.***
>
> *fonte: http://www.inf.ufsc.br/cee/pasta3/art2p3.html*

A aleatoriedade e a probabilidade estão presente em vários aspectos de nossa vida.

Exemplos:

*SEGUROS *SORTEIOS *CONSÓRCIOS

*TÍTULOS DE CAPITALIZAÇÃO *LOTERIAS *GENÉTICA

O estudo da probabilidade vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos.

Ao começarmos o estudo da probabilidade, normalmente a primeira ideia que nos vem à mente é a da sua utilização em jogos, mas podemos utilizá-lo em muitas outras áreas. Um bom exemplo é na área comercial, onde um site de comércio eletrônico pode dela se utilizar, para prever a possibilidade de fraude por parte de um possível comprador.

Para iniciarmos o estudo da probabilidade, vamos a seguir definir alguns conceitos importantes sobre a matéria.

Experimento Aleatório

Se lançarmos uma moeda ao chão para observarmos a face que ficou para cima, o resultado é imprevisível, pois tanto pode dar cara, quanto pode dar coroa.

Se ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o resultado será mais imprevisível ainda, pois aumentamos o número de possibilidades de resultado.

A experimentos como estes, ocorrendo nas mesmas condições ou em condições semelhantes, que podem apresentar resultados diferentes a cada ocorrência, damos o nome de experimentos aleatórios.

Espaço Amostral

Ao lançarmos uma moeda não sabemos qual será a face que ficará para cima, no entanto podemos afirmar com toda certeza que ou será cara, ou será coroa, pois uma moeda só possui estas duas faces. Neste exemplo, ao conjunto {cara,coroa} damos o nome de espaço amostral, pois ele é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer neste experimento.
Representamos um espaço amostral, ou espaço amostral universal como também é chamado, pela letra S. No caso da moeda representamos o seu espaço amostral por:

S = { cara, coroa }

Se novamente ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o espaço amostral será:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Evento

Quando lançamos um dado ou uma moeda, chamamos a ocorrência deste fato de evento. Qualquer subconjunto de um espaço amostral é um evento.
Em relação ao espaço amostral do lançamento de um dado, veja o conjunto a seguir:
A = { 2, 3, 5 }
Note que $A \subset S$ (A está contido em S, A é um subconjunto de S). O conjunto A é a representação do evento do lançamento de um dado, quando temos a face para cima igual a um número primo.

Classificação de Eventos

Podemos classificar os eventos por vários tipos. Vejamos alguns deles:

Evento Simples

Classificamos assim os eventos que são formados por um único elemento do espaço amostral.
A = { 5 } é a representação de um evento simples do lançamento de um dado cuja face para cima é divisível por5. Nenhuma das outras possibilidades são divisíveis por 5.

Evento Certo

Ao lançarmos um dado é certo que a face que ficará para cima, terá um número divisor de 720. Este é um evento certo, pois **720 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1**, obviamente qualquer um dos números da face de um dado é um divisor de 720, pois 720 é o produto de todos eles.
O conjunto **A = { 2, 3, 5, 6, 4, 1 }** representa um evento certo pois ele possui todos os elementos do espaço amostral S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

Evento Impossível

No lançamento conjunto de dois dados qual é a possibilidade de a soma dos números contidos nas duas faces para cima, ser igual a 15?
Este é um evento impossível, pois o valor máximo que podemos obter é igual a doze. Podemos representá-lo por $A = \emptyset$, ou ainda por **A = {}.**

Evento União

Seja **A = { 1, 3 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, ímpar e menor ou igual a 3e **B = { 3, 5 }**, o evento de ocorrência da face superior, ímpar e maior ou igual a 3, então **C = { 1, 3, 5 }**representa o evento de

ocorrência da face superior ímpar, que é a união dos conjuntos A e B, ou seja, $C = A \bigcup B$.
Note que o evento C contém todos os elementos de A e B.

Evento Intersecção

Seja **A = { 2, 4 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, par e menor ou igual a 4 e **B = { 4, 6 }**, o evento de ocorrência da face superior, par e maior ou igual a 4, então **C = { 4 }** representa o evento de ocorrência da face superior par, que é a intersecção dos conjuntos A e B, ou seja, $C = A \bigcap B$.
Veja que o evento C contém apenas os elementos comuns a A e B.

Eventos Mutuamente exclusivos

Seja **A = { 1, 2, 3, 6 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número divisor de6 e **B = { 5 }**, o evento de ocorrência da face superior, um divisor de 5, os eventos A e B são mutuamente exclusivos, pois $A \bigcap B = \emptyset$, isto é, os eventos não possuem elementos em comum.

Evento Complementar

Seja **A = { 1, 3, 5 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número ímpar, o seu evento complementar é **A = { 2, 4, 6 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número par.
Os elementos de A são todos os elementos do espaço amostral S que não estão contidos em A, então temos que A = S - A e ainda que S = A + A.

Probabilidade de Ocorrência de um Evento

Os três irmãos Pedro, João e Luís foram brincar na rua. Supondo-se que as condições de retorno para casa são as mesmas para cada um deles, qual é a probabilidade de Luís voltar para casa primeiro?
Como 3 é o número total de irmãos, então Luís tem 1 chance em 3 de voltar para casa primeiro, por isto a probabilidade de Luís voltar para casa antes dos seus irmãos é igual a 1/3.

Definição

A probabilidade de um evento ocorrer (Luís voltar para casa primeiro) considerando-se um espaço amostral(Pedro, João e Luís) é igual

a razão do número de elementos do evento (1, apenas Luís) para o número de elementos do espaço amostral (3, o número de irmãos que foram brincar na rua), desde que espaço o amostral seja um conjunto equiprovável, ou seja, todos os seus elementos tenham a mesma possibilidade de ocorrer (as condições de retorno para casa são as mesmas para os três irmãos).
Sendo E um evento, n(E) o seu número de elementos, S o espaço amostral não vazio e n(S) a quantidade de elementos do mesmo, temos que a probabilidade de E ocorrer é igual a:

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$, sendo $n(S) \neq 0$.

A probabilidade é um número entre zero e um, inclusive, o que significa que no mínimo não a nenhuma hipótese do evento acontecer e no máximo o evento sempre ocorrerá:

$0 \leq P(E) \leq 1$

Normalmente representamos probabilidades através de frações, mas também podemos representá-las por números decimais, ou até mesmo por porcentagens.

Exemplos

Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de obtermos um número divisor de 6?
Como vimos acima, o espaço amostral do lançamento de um dado é:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Como estamos interessados apenas nos resultados divisores de 6, o evento E é representado por:
E = { 1, 2, 3, 6 }
Então n(E) = 4 e n(S) = 6, portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{6} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{3}$$

Podemos também apresentar o resultado na forma de uma porcentagem:

$$P(E) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{3} \cdot 100\% \Rightarrow P(E) = 66{,}67\%$$

- A probabilidade de se obter um número divisor de 6 é 2/3 ou 66,67%.

ATIVIDADES

1Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a ou que c seja sucessor de b?

a) 4/27
b) 11/54
c) 7/27
d) 10/27
e) 23/54

2Qual é a probabilidade de, selecionado ao acaso, um anagrama da palavra ANE, iniciar-se por consoante?

(A) 1/3
(B) 1/6
(C) 2/3
(D) 5/8
(E) 1/2

3Joga-se N vezes um dado comum, de seis faces, não viciado, até que se obtenha 6 pela primeira vez. A probabilidade de que N seja menor do que 4 é

(A) 150/216
(B) 91/216
(C) 75/216
(D) 55/216
(E) 25/216

4Em uma urna há 5 bolas verdes, numeradas de 1 a 5, e 6 bolas brancas, numeradas de 1 a 6. Dessa urna retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas. Quantas são as extrações nas quais a primeira bola sacada é verde e a segunda contém um número par?

(A) 15
(B) 20
(C) 23
(D) 25
(E) 27

5Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

A) 27/64.
B) 27/256.
C) 9/64.
D) 9/256.

Probabilidade Genética

É obvio que a Genética não é tão simplista como sugere a imagem. Na verdade, a genética é outra área que utiliza as teorias da probabilidade, pois os acontecimentos nesse ramo da Biologia envolvem eventos aleatórios, como o encontro dos gametas masculinos e femininos com determinados genes na fecundação. Vamos supor que um indivíduo heterozigoto para determinada característica (Aa) forma dois tipos de espermatozóides, A e a. Caso uma mulher também seja heterozigota, formará óvulos A e a.

A fecundação ocorrerá ao acaso, pois não sabemos qual espermatozóide, A ou a será responsável pela concepção ou qual célula feminina será fecundada A ou a.

Observe o esquema:

Pais Aa X Aa

Gametas A a A a

Geração AA Aa Aa aa

Veja o quadro de possibilidades:

Meninos / Meninas	A = 1/2	a = 1/2
A = 1/2	AA = 1/4 = 25%	Aa = 1/4 = 25%
a = 1/2	Aa = 1/4 = 25%	aa = 1/4 = 25%

Exemplo

Um homem e uma mulher possuem pigmentação normal. O homem é filho de um pai normal e uma mãe albina. A mulher é filha de uma mãe normal e um pai albino. Determine a probabilidade deles terem um filho albino do sexo masculino.

Homem = Aa

Mulher = Aa

	Homem			Mulher	
	Aa		X	Aa	
Gametas	A	a		A	a
Geração	AA	Aa		Aa	aa (albina)
Probabilidade	1/4	1/4		1/4	1/4

Probabilidade de criança albina = 1/4

Probabilidade de criança sexo masculino = 1/4 + 1/4 = 2/4 = 1/2

Os eventos criança albina e criança sexo masculino são independentes, dessa forma temos que para a criança ser albina e possuir o sexo masculino a probabilidade é a seguinte: 1/2 * 1/4 = 1/8 ou 12,5%.

ATIVIDADE 2 **Habilidade relacionada:** H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Probabilidade.

Tempo de duração: 100 min

Recursos utilizados: Folha de atividades, Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Geogebra, Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Mostrar a utilidade da probabilidade em assuntos que outrora não tinham nenhuma ligação com a matemática.

Metodologia adotada: Em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

Coração Restaurado

O resultado dos primeiros transplantes de células tronco no Brasil acena com a perspectiva do uso dessa técnica no combate à insuficiência cardíaca , uma das primeiras causas de morte no mundo .

1) Células-tronco tem sido tema de polêmicas infindáveis , especialmente de cunho religioso. Para avaliar a opinião dos funcionários da sua escola (professores e funcionários) , faça a seguinte experiência :

- Selecione 30 pessoas e peça a cada um que opine sobre o uso de células-tronco. Organize antecipadamente algumas possibilidades de resposta como: a favor, contra , não tenho opinião formada, não conheço do assunto .
- Organize os dados coletados em uma tabela ;
- De posse da tabela, elabore uma questão envolvendo os conceitos de espaço amostral e evento. Discuta com seu grupo as possíveis soluções

2) Escreva um texto emitindo a opinião do quarteto sobre o tema célula-tronco .

Escândalo do orçamento (1993)

Em 1993 foi descoberto um dos maiores casos de corrupção envolvendo deputados federais no Brasil. Descobriu-se que eram retirados dos cofres públicos milhões de reais que iam para contas particulares. O método usado pelos políticos para fazer a lavagem de dinheiro era jogar em uma loteria esportiva.

Apelidado de anão-mor da máfia do orçamento, o ex-deputado João Alves amealhou um patrimônio de 5 milhões de dólares, com direito a imóveis e jatinho. Em setembro de 1993, quando foi instalada a CPI para apurar as denúncias de José Carlos Alves dos Santos, João Alves chocou o país ao dizer, sorrindo que sua fortuna era resultado de seguidas vitórias na loteria. ”Deus me ajudou”, disse. João Alves teve seu mandato cassado, responde a três processos no Tribunal Federal e uma pequena parte de seus bens bloqueados e não podem ser vendidos.

Agora é com você:

a) Sabendo-se que a loteria esportiva é composta de 14 jogos, sendo que cada jogo tem três possibilidades (coluna1, coluna do meio e coluna 2),quantos cartões diferentes os políticos precisavam preencher utilizando todas as possibilidades?

----

b) Se cada jogo custou R$ 1,00, quanto foi gasto para registrar todas as cartelas?

ATIVIDADE 3Habilidade relacionada:H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Combinação e definição de probabilidade no contexto dos jogos da Mega Sena.

Tempo de duração: 250 min

Recursos utilizados: Folha de atividades, Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Geogebra, Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Resolver problemas com Combinação e probabilidade.

Metodologia adotada: Em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.

JOGANDO NA MEGA SENA

A Mega Sena é o jogo que paga milhões para o acertador dos 6 números sorteados. Esse jogo consiste em realizar uma aposta contendo no mínimo 6 e no máximo 15 dezenas escolhidas do conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}.

Cada aposta mínima de 6 dezenas custa R$ 2,00 e o preço das apostas varia conforme a tabela abaixo:

Tabela de valores dos jogos da Mega Sena

Quantidade de dezenas apostadas	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Valor em R$	2,00	14,00	56,00	168,00	420,00

O preço das apostas é calculado a partir do total de agrupamentos de 6 dezenas que um apostador faz com as dezenas apostadas. Assim, um apostador que joga na Mega Sena as dezenas 05 – 09 – 12 – 13 – 35 – 37 – 57, fará 7 jogos, pagando pelo jogo R$ 14,00.

1. Nesses agrupamentos a ordem das dezenas, em cada jogo, é fator determinante na composição dos jogos? Justifique.

____

____

Você já reparou que um apostador que faz uma aposta simples de 6 dezenas paga R$ 2,00 pela aposta. Se ele acrescentar uma dezena, isto é, apostar em 7 dezenas, irá pagar R$ 14,00 (7 x R$ 2,00). Porém caso ele aposte em 8 dezenas, irá pagar R$ 56,00. Por que isso ocorre? Ele não deveria pagar R$ 16,00 (8 x R$ 2,00) pelas 8 dezenas? Para responder essas perguntas, resolva os itens a seguir.

2. Um apostador da mega sena escolheu as dezenas 05 – 09 – 12 – 13 – 35 – 37 – 57 para realizar seu jogo. Pelas regras do jogo, ele ganhará o prêmio caso seja sorteada uma das sequências de 6 dezenas formadas a partir das dezenas escolhidas. Quantas sequências de 6 dezenas são possíveis de se formar, com essas dezenas? Descreva-as?

____

____

3. Para uma aposta de 7 dezenas, pela tabela de valores da Mega Sena, é cobrado do apostador R$ 14,00. Esse valor está correto? Justifique.

____

____

4. Pela tabela de valores dos jogos da Mega Sena, um apostador que escolher 8 dezenas para jogar na mega sena pagará R$ 56,00. Por que isso ocorre? Justifique.

____

____

5. Quanto pagará pela aposta um apostador que escolher, para jogar na Mega Sena, as dezenas 01 – 02 – 09 – 10 – 21 – 22 – 33 – 39 – 45 – 54 ?

____

____

6. Um apostador que dispunha de muito dinheiro para jogar escolheu quinze dezenas entre as sessenta e fez a suas apostas na Mega Sena. Qual foi número total de apostas que esse apostador realizou? Quanto ele pagou pelas apostas?

____

____

7. Certo apostador escolheu uma quantidade de dezenas e jogou na Mega Sena, pagando R$ 924,00. Quantas dezenas diferentes ele escolheu?

____

____

Agora que já sabemos como funciona o jogo da Mega Sena, perguntamos: Quais são as chances de uma pessoa ganhar na Mega Sena realizando apenas um jogo simples de 6 dezenas? Para isso recorreremos ao estudo das probabilidades.

8. Calcule o número de resultados possíveis, isto é, o número de sequências simples de 6 dezenas formadas a partir das 60 dezenas possíveis, para um Sorteio da Mega Sena. Este número é da ordem de quantos milhões?

____

____

9. Agora, calcule a chance de um apostador ganhar na Mega Sena, com uma aposta simples.

____

____

10. Podemos afirmar que essa probabilidade é igual a zero? Justifique.

____

____

11. Suponha que um apostador fez um jogo com 10 dezenas na Mega Sena. Qual é a chance desse apostador acertar na Mega Sena?

____

____

SOLUÇÕES

A resposta do item 2 é sim. Com 7 dezenas produzem-se 7 sequências simples de 6 dezenas. Como cada sequência simples custa R$ 2,00 então temos 7 x R$ 2,00 = R$ 14,00.

Resposta do item 3

Isso ocorre porque o número de sequências simples de 6 dezenas é calculado por uma combinação das 8 dezenas tomadas 2 a 2. Assim teremos: $C_{8,6} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$. Logo, temos 28 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar 28 x R$ 2,00 = R$ 56,00.

Resposta do item 5

Esse apostador escolheu 10 dezenas. Observando a tabela de valores dos jogos da Mega Sena, vemos que ele pagará R$ 420,00 pelos jogos.

Resposta do item 6

Como esse apostador escolheu 15 dezenas temos que o número de aposta é dado por: $C_{15,6} = \frac{15!}{9!\cdot 6!} = 5005$. Logo, temos 5005 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar 5005 x R$ 2,00 = R$ 10.010,00.

Resposta do item 7

Como esse apostador escolheu **n** dezenas pagando 924 reais, temos que ele realizou 462 jogos simples. Basta fazer $924 \div 2$. Com isso, para calcular o número **n** de dezenas deve-se resolver a seguinte equação:

$$C_{n,6} = 462 \quad \Rightarrow \quad \frac{n!}{6!(n-6)!} = 462$$

Para evitar resolver uma equação do 6º grau, com apoio a tabela de valores dos jogos da Mega Sena verificamos que $C_{10,6} = 210$. Logo, fazendo n= 11 temos:

$$C_{11,6} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

Portanto, temos 5005 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar 5005 x R$ 2,00 = R$ 10.010,00.

Resposta do item 8

Como a Mega Sena disponibiliza um total de 60 dezenas para a realização dos jogos, o número de dezenas simples, formadas a partir dessas 60 dezenas é obtido por $C_{60,6} = 50.063.860$. Esse número é da ordem de 50 milhões.

Resposta do item 9

Essa probabilidade é calculada por:

$$P(X) = \frac{n^{\circ}\ de\ resultados\ favoráveis}{n^{\circ}\ total\ de\ possibilidades} \Rightarrow$$

$$P(1) = \frac{1}{50.063.860}$$

Resposta do item 10

A probabilidade não é igual a zero.

Mas podemos afirmar que essa chance é

muito pequena.

Resposta do item 11

Como esse apostador escolheu 10 dezenas para jogar na mega sena, pela análise da Tabela de Valores dos jogos da Mega Sena ele realizou 210 jogos. Portanto a chance dele acertar na Mega Sena é de:

$$P(10) = \frac{210}{50.063.860} = \frac{3}{715.198}$$

Do ponto de vista teórico, é fácil ver que não vale a pena jogar na Mega Sena, ainda mais se a aposta for simples.

A Caixa Econômica Federal arrecadou em 2012 10,5 bilhões de reais em jogos de loteria como Mega Sena e Loto fácil. O prêmio mais alto pago neste mesmo ano foi de 244,7 milhões de reais que foi dividido para três pessoas que acertaram.

Será que vale a pena fazer uma fezinha?

1) Com as letras a, b, c, d, e, f quantos códigos de quatro letras poderão ser construídos

Lista de Exercício com gabarito

1) (FGV) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

(A) 3/25 (B) 7/50 (C) 1/10 (D) 8/50
(E) 1/5

Solução. O espaço amostral (Ω) possui 50 elementos. O número de múltiplos de 8, pode ser calculado utilizando a progressão aritmética de razão 8, com a_1 = 8 (1º múltiplo) e a_n = 48 (último múltiplo).

$$\boxed{48 = 8 + (n-1).8 \Rightarrow 48 = 8 + 8n - 8 \Rightarrow n = \frac{48}{8} = 6}.$$

O número de elementos do evento E (múltiplos de 8) é n(E) = 6. Logo, $\boxed{P(E) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}}$.

2) No lançamento de um dado não viciado o resultado foi um número maior do que 3, qual é a probabilidade de esse ser um número par?

(A) 1/6 (B) 1/2 (C) 1/3 (D) 2/5
(E) 2/3

Solução1. O espaço amostral para um lançamento de dados é {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Como foi informado queo resultado é maior que 3, o espaço amostral fica reduzido para {4, 5, 6}. Neste espaço, os resultados pares são 4 e 6. Logo $\boxed{P(par \mid > 3) = \frac{2}{3}}$.

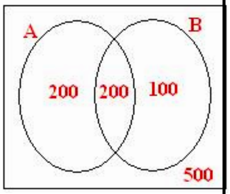
Solução2. Utilizando a fórmula para a probabilidade condicional, temos:

i) E = {resultado maior que 3} = {4, 5, 6}; ii) E' = {resultado par} = {2, 4, 6}; iii) E ∩ E' = {4, 6}

Logo, $\boxed{P(E' \mid E) = \frac{P(E' \cap E)}{P(E)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{6}.\frac{6}{3} = \frac{2}{3}}$.

3) Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios de um clube **A**, 300 de um clube **B** e 200 de ambos. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade dessa pessoa ser sócia de **A** ou de **B**?

(A) 75% (B) 60% **(C)** 50% (D) 45% (E) 30%



Solução. Utilizando a teoria de conjuntos, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 400 + 300 - 200 = 500$.

Logo, $\boxed{P(A \cup B) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} \to 50\%}$.

4) Uma pessoa joga uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de sair CARA nas quatro jogadas?

(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 1/8 **(D)** 1/16
(E) 1

Solução1. O espaço amostral para essas jogadas possuirá $2^4 = 16$ elementos. O evento CCCC ocorrerá somente uma vez. Logo, $\boxed{P(CCCC) = \frac{1}{16}}$.

Solução2. Como as jogadas são independentes, isto é, um resultado não depende do outro, temos pelo teorema da multiplicação:

$$\boxed{P(C \cap C \cap C \cap C) = P(C).P(C).P(C).P(C) = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}}.$$

5) (UPF) - Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. Tira-se, sucessivamente, 2 bolas. Então a probabilidade das bolas serem da mesma cor, é:

(A) 1/7 (B) 2/7 **(C)** 3/7 (D) 4/7
(E) 5/7

Solução. Não há reposição, pois as retiradas são sucessivas.

$$\boxed{P(\text{mesma cor}) = P(BB \cup PP) = P(B \cap B) + P(P \cap P) = \left(\frac{3}{7}\right).\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{7}\right).\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}}.$$

OBS: Usando o espaço amostral: $\boxed{P(\text{mesmacor}) = \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}}$.

6) Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é:

(A) 2/5 (B) 3/5 (C) 1/2 (D) 1/3
(E) 2/3

Solução. Como queremos que três estejam ocupados teremos três desocupados. Alinhando os apartamentos utilizando O (ocupado) e D (desocupado), temos a sequência: ODODOD. O número total de possibilidades de permutar (com repetição) essa situação seria $P_6^{2,2} = \frac{6!}{3!3!} = 20$**. Mas como a situação é por andar, temos 2 possibilidades em cada andar. Logo, 2x2x2 = 8 possibilidades de termos 1 vazio e 1 ocupado por andar. Então,** $P(O / Andar) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$**.**

OBS: O número total de ocupações poderia ser calculado como combinação: $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$**.**

7) (VUNESP) Dois jogadores, A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e, se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter vencido?

(A) 10/36 **(B)** 5/32 (C) 5/36 (D) 5/35 (E) não se pode calcular

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto de 36 elementos (pares ordenados). O evento "soma 5" será E(A) = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)}. Os eventos "soma 5" e soma "8" são disjuntos, logo não há interseção. Se A não ganhou o espaço amostral ficará reduzido para 36 – 4 = 32 elementos. O evento soma 8 será E(B) = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.

Logo, a probabilidade de B vencer será: $P(soma\ 8) = \frac{5}{32}$**.**

8) Se num grupo de 10 homens e 6 mulheres sorteamos 3 pessoas para formarem uma comissão, qual a probabilidade de que essa comissão seja formada por 2 homens e 1 mulher?

(A) 3/56 (B) 9/56 (C) 15/56 **(D)** 27/56 (E) 33/56

Solução1. Queremos um resultado HHM em qualquer ordem. Logo há 3!/2! = 3 formações possíveis. A probabilidade para um deles, por exemplo, HHM será:

$$\begin{cases} P(HHM) = \left(\frac{10}{16}\right).\left(\frac{9}{15}\right).\left(\frac{6}{14}\right) = \frac{5}{8}.\frac{3}{5}.\frac{3}{7} = \frac{9}{56} \\ P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases} \Rightarrow P(H1M) = 3.\frac{9}{56} = \frac{27}{56}.$$

Solução2. $$P(H1M) = \frac{C_{10}^2.C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{\frac{10.9.8!}{2!8!}.\frac{6!}{1!0!}}{\frac{16.15.14.13!}{3!13!}} = \frac{\frac{10.9}{2}.6}{\frac{16.15.14}{6}} = \frac{10.9.3}{8.5.14} = \frac{2.9.3}{8.14} = \frac{9.3}{8.7} = \frac{27}{56}.$$

9)(UFRGS) Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de:

(A) 25% (B) 30% (C) 33% (D) 50%
(E) 60%

Solução1. Queremos um resultado HMM em qualquer ordem. Logo há 3!/2! = 3 formações possíveis. A probabilidade para um deles, por exemplo, HHM será:

$$\begin{cases} P(HMM) = \left(\frac{2}{6}\right).\left(\frac{4}{5}\right).\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}.\frac{4}{5}.\frac{3}{4} = \frac{1}{5} \\ P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases} \Rightarrow P(H2M) = 3.\frac{1}{5} = \frac{3}{5} \to 60\%.$$

Solução2. $$P(H2M) = \frac{C_2^1.C_4^2}{C_6^3} = \frac{\frac{2!}{1!0!}.\frac{4.3.2!}{2!2!}}{\frac{6.5.4.3!}{3!3!}} = \frac{2.6}{5.4} = \frac{6}{10} \to 60\%.$$

10) (UFRGS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

(A) 1/10 **(B)** 1/9 (C) 1/5 (D) 2/5
(E) 1/2.

Solução1. Considerando os pares como AA, BB, CC, DD, EE, há um total de 10 meias. O número de formas de retirar duas meias quaisquer desse total

será: $C_{10}^{2} = \frac{10.9.8!}{2!8!} = 45$**. Há 5 possibilidades de saírem duas do mesmo par.**

Logo, $P(\text{Mesmo Par}) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$**.**

Solução2. O resultado é um dos pares (AA) ou (BB) ou (CC) ou (DD) ou (EE). Como não há interseções entre os pares, a probabilidade total será a soma das probabilidades de cada caso.

$$P[(AA)\cup(BB)\cup(CC)(DD)(EE)] = \left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right) = 5.\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

11)(UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de:

(A) 10% (B) 15% (C) 30% (D) 50%
(E) 75%

Solução. A caixa possui um total de 200 parafusos e há 15% de 100 = 15 parafusos defeituosos da máquina A e 5% de 100 = 5 parafusos defeituosos da máquina B. Logo, há um total de 20 parafusos defeituosos. Como já foi detectado que o parafuso retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20.

	Máquina A	Máquina B	Total
defeituoso	15	5	20
não defeituoso	85	95	180
Total	100	100	200

Logo, $P(A \mid \text{defeituoso}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \to 75\%$**.**

12) (UFRGS) Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídasao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos.A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo éde:

(A) 14% (B) 16% **(C)** 20% (D) 25%
(E) 33%

Solução. O espaço amostral será $C_{10}^{2}=\frac{10.9.8!}{2!8!}=45$**. Cada número de 1 a 9 possui um consecutivo, excetuando o 10, pois não há a ficha 11. Logo,** $P(consecutivo)=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}\rightarrow 20\%$**.**

13) (FUVEST) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

(A) 1/2 (B) 1/3 **(C)** 1/4 (D) 1/5
(E) 1/6

Solução. A decomposição em fatores primos de 60 é (2 x 2 x 3 x 5) = 2^2 **x 3 x 5. O número de divisores é calculado pelo produto (2+1).(1+1).(1+1) = 12. Os únicos divisores primos são 2, 3 e 5, num total de três elementos. Logo,** $P(DivPrimo)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$**.**

14)(VUNESP) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados 1 , 2 , 3 , . . . , 9 . Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de serem escolhidos) , a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

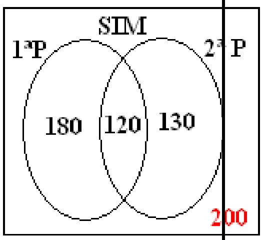
(A) 0,3777... (B) 0,47 (C) 0,17 **(D)** 0,2777...
(E) 0,1333...

Solução. Há cinco rótulos ímpares e quatro pares. Considerando cada retirada de camundongo e buscando a possibilidades (Ímpar, Ímpar), temos: $P(I)=\frac{5}{9}.\frac{4}{8}=\frac{5}{18}=0,2777...$**.**

15)(FEI) Em uma pesquisa realizada em uma Faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. Cento e vinte responderam sim a ambas; 300 responderam sim à primeira; 250 responderam sim à segunda e 200 responderam não a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido não à primeira pergunta?

(A) 1/7 (B) 1/2 (C) 3/8 **(D)** 11/21
(E) 4/25

Solução. O número de alunos será a soma do número de alunos que responderam SIM com o número de alunos que responderam NÃO. Como há interseção nas respostas sim, forma-se o diagrama mostrado.



i) Total de alunos: 180 + 120 + 130 + 200 = 630 alunos.

ii) Responderam NÃO à primeira pergunta: 130 + 200 330 alunos. Observe que responder NÃO à primeira pergunta, implica em responder SIM <u>somente</u> segunda pergunta ou NÃO a ambas. Logo, $\boxed{P(\overline{1^a P}) = \frac{330}{630} = \frac{33}{63} = \frac{11}{21}}$**.**

16)(FATEC) Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade de ele ser um número ímpar é:

(A) 1 (B) 1/2 **(C)** 2/5 (D) 1/4
(E) 1/5

Solução. Para que o número seja ímpar a unidades simples deverá ser um algarismo ímpar. Há dois casos a considerar: _ _ _ _ 5 e _ _ _ _ 7. Como 5 e 7 estão fixos, a permutação será entre os quatro algarismos restantes. Logo há 2.4! = 2(24) = 48 números ímpares. O espaço amostral será 5! = 120 números de cinco algarismos distintos. Logo, $\boxed{P(\text{ímpar}) = \frac{48}{120} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}}$**.**

17) (Objetivo) Uma urna contém apenas 10 bolas. Essas bolas são de diversas cores, e somente 4 são brancas. Sabe-se que as bolas diferem apenas na cor. Retira-se uma bola ao acaso, e em seguida retira-se outra bola, sem reposição da primeira. A probabilidade de obter duas bolas que não sejam ambas brancas é:

(A) 2/15 **(B)** 13/15 (C) 1/3 (D) 3/5
(E) 2/9

Solução. Como há várias possibilidades, o evento complementar E = {duas bolas brancas} facilitará o cálculo: $\boxed{P(B) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{5}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15}}$**. Logo, o evento pedido é o complementar desse:** $\boxed{P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}}$**.**

18) (EFOA) Uma pessoa tem em mãos um chaveiro com 5 chaves parecidas, das quais apenas uma abre determinada porta. Escolhe uma chave ao acaso, tenta abrir a porta, mas verifica que a chave escolhida não serve. Na segunda tentativa, com as chaves restantes, a probabilidade de a pessoa abrir a porta é de:

(A) 20% **(B)** 25% (C) 40% (D) 75%
(E) 80%

Solução. Na primeira tentativa a pessoa já excluiu uma das chaves. Logo seu espaço amostral fica reduzido a quatro chaves. Na segunda tentativa a probabilidade será 1 em 4. Logo, $\boxed{P(abrir)=\frac{1}{4}\to 25\%}$.

19) Das 180 pessoas que trabalham em uma empresa, sabe-se que 40% têm nível universitário e 60% são do sexo masculino. Se 25% do número de mulheres têm nível universitário, a probabilidade de selecionar-se um funcionário dessa empresa que seja do sexo masculino e não tenha nível universitário é:

(A) 5/12 **(B)** 3/10 (C) 2/9 (D) 1/5 (E) 5/36

Solução. Observe a tabela com os cálculos de acordo com as informações.

	Possui curso	Não possui curso	Total
Masculino	72 – 18 = 54	54	60% de 180 =108
Feminino	25% de 72 = 18	72 – 18 = 54	72
Total	40% de 180 = 72	180 – 72 = 108	180

Logo, $\boxed{P(M\cap NãoCurso)=\frac{54}{180}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}}$.

20) (F .Maringá) Um número é escolhido ao acaso entre 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:

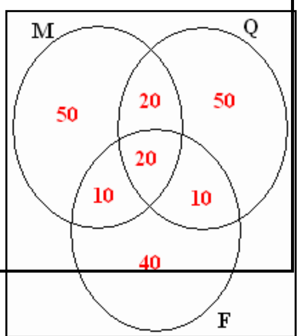
(A) 1/5 (B) 2/25 (C) 4/25 (D) 2/5 **(E)** 3/5

Solução. Não há interseção entre esses eventos. Logo P(Primo ∪ QPerfeito) = P(Primo) + P(QPerfeito). Há n{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} = 8 primos e n{1, 4, 9, 16} quadrados: $\boxed{P(Primo\cup QPerfeito)=\frac{8+4}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}}$.

21) (FASP) Um colégio tem 400 alunos. Destes, 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química e 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

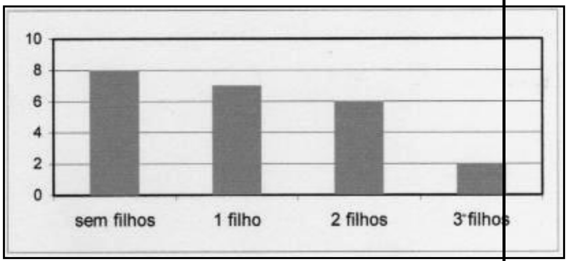
(A) 1/10 (B) 1/8 (C) 2/5 (D) 5/3 (E) 3/10

Solução. Construindo o diagrama com as informações basta identificar a região que indica o número de alunos que estudam Matemática e Química.



$$P(\text{Matemática} \cap \text{Química}) = \frac{20+20}{400} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}.$$

22) (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico mostrado. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



(A) 1/3 (B) 1/4 (C) 7/15 (D) 7/23 **(E)** 7/25

Solução. De acordo com o gráfico, há 8 mulheres sem filhos, 7 mulheres com 1 filho, 6 mulheres com 2 filhos e 2 mulheres com 3 filhos. O total de crianças é: 8(0) + 7(1) + 6(2) + 2(3) = 7 + 12 + 6 = 25. O número de mulheres com filho único é 7. Logo, $P(\text{FilhoÚnico}) = \frac{7}{25}$

Avaliação

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de
maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu
cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

ALISTA DE EXERCÍCIOS apresentado nas páginas17 a 25deste Plano de Trabalho será passada aos alunos em caráter de exercícios de revisão. Desta lista serão retiradas 6 questões que será um TESTE para nota.

Será aplicada também uma prova escrita utilizando questões do SAERJINHO como matriz de referência.

Este plano foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3002 do C.E. Carlos Maria Marchon e para a turma 3002 do C.E. Maria Veralba Ferraz. Serão necessárias 12 aulas de 50 min para a aplicação do mesmo,

Ambas as unidades estão preparadas com projetores e computadores para a aplicação deste trabalho.

Acredito que as atividades propostas neste Plano de Trabalho irãodespertar interesse nos alunos em relação aos assuntos abordados.

Fontes de Pesquisa

BUCCHI, Paulo. Matemática e Cidadania: Ensino Médio 2, 1ª edição, São Paulo, Escala Editora,2008,pp119-132.

Matemática Didática, Probabilidade. http://www.matematicadidatica.com.br/ProbabilidadeConceitos.aspx Acesso em 05 de março de 2013

Repensando Análise Combinatória. Analise Combinatória. Formação Continuada. Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ.

Pedro Henrique Galhardo Rodrigues, Análise Combinatória, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2013.

Greicy Moraes Martinelle Gustavo, Função polinomial do 1º grau, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2012.

Greicy Moraes Martinelle Gustavo, Razões Trigonométricas, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2012.

Avaliação da implementação do Plano de Trabalho 2

Pontos positivos: A simplicidade como o assunto foi introduzido trouxe uma compreensão satisfatória por parte dos alunos. A forma como o conteúdo foi introduzido também agradou muito. Eles adoraram o filme que foi passado e viram muitas conexões com o que estava sendo ensinado.

Pontos Negativos: Não tive tempo hábil para aplicar de uma melhor maneira este PT. Por conta do feriado perdemos algumas aulas então tive que dar uma corrida agora no final.

Impressão dos alunos: Mai uma vez os alunos corresponderam de forma satisfatória. Não tiveram grandes dificuldades nos exercícios, gostaram da forma que o assunto foi explanado e entenderam a matéria.

Alterações: Na atividade1 foi incluída a exibição do filme.(Pois não estava prevista). Foi incluída também uma nova atividade para mostrar a aplicação da probabilidade em áreas aparentemente desconexas. As duas atividades propostas nesta seção forma sugeridas no Fórum 4 pelas colegas ROSEMARY PITANGA DE OLIVEIRA ARAUJO BELFORD ROXO (Coração Restaurado) e CARMEN BEATRIZ LANDEIRA PEIXOTO DE MIRANDA PACHECO PATY DO ALFERES (Escândalo do Orçamento-1993). Acredito que a realização destas atividades enriquecerá muito as aulas.