

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**  
**FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ - 3º ANO - 1º BIMESTRE**

**Colégio: COLÉGIO ESTADUAL EDMUNDO BITENCOURD**

**Professor: VALTER FERNANDES COSTA**

**Matrículas: 09149162**

**Série: 3º ANO – ENSINO MÉDIO**

**Tutora: SUSI CRISTINA BRITO FERREIRA**

**AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 2 –**  
**INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE**

**Pontos Positivos:**

O objetivo desse plano de trabalho seria apresentar e fixar os princípios elementares da probabilidade, no caso o domínio da fórmula  $P = \frac{n(A)}{n(S)}$  e sua aplicação conceitual. As aplicações conceituais serão em jogo de cartas e dados.

A recepção dos alunos foi boa. A ideia de se começar discutindo alguns problemas históricos e exemplos corriqueiros de probabilidade foi motivador e de boa absorção por parte dos alunos.

Percebeu-se que a tática de executar o PT em pequenos grupos, usando sempre inicialmente problemas fáceis avançando em ordem de dificuldade, cumpre bem seu objetivo, pois passa confiança e segurança aos alunos.

Antes da aplicação do PT sobre introdução a Probabilidade, houve a percepção que deveria se fazer algumas mudanças. Logo foi introduzida a atividade do jogo com um e dois dados. Essa mesma, junto com atividade dos problemas históricos, surtiu o efeito desejado.

### **Pontos Negativos:**

Um problema que aconteceu foi a falta de tempo para começar a implementação do PT. Até a elaboração dessa avaliação apenas uma aula tinha sido realizada com o PT de introdução a probabilidade. Mas antes já tinha sido analisado que a tarefa 1 da mega sena talvez não atingisse o efeito desejado. Mas dessa forma ficou pouco preciso poder analisar a eficácia do PT de introdução a probabilidade partindo de apenas uma aula.

### **Impressão dos Alunos:**

A tática de começar por atividades que continham problemas ligados ao cotidiano do alunado, mais a narrativa histórica através de problemas, causou uma impressão boa por parte dos alunos. Os alunos entenderam o uso da fórmula  $P = \frac{1}{n}$  e suas aplicações mais simples. Logo perceberam a lógica dentro das exemplificações, como no lançamento de dois dados ou de duas moedas. Acharam essa parte do conteúdo fácil.

# DESENVOLVIMENTO

## **ATIVIDADE RELACIONADA 1: Jogando com dois dados e calculando facilmente probabilidades.**

- **PRÉ-REQUISITOS:** Operação elementar de divisão, simplificação e noções de porcentagem.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha. Dois dados não viciados para cada grupo da sala.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado colaborativo.
- **OBJETIVOS:** : Resolver problemas de probabilidade.
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

### Desenvolvimento Histórico da probabilidade:

As probabilidades nasceram na Idade Média com os tradicionais jogos de azar e apostas que se efetuaram na Corte.

Os algebristas Italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc.XVI) fizeram as primeiras observações matemáticas relativas às apostas patentes nos jogos de azar.

Porém, a verdadeira teoria relativa às probabilidades surgiu através da correspondência entre Blaise Pascal e seu amigo Pierre De Fermat, chegando estes à mesma solução do célebre problema da divisão das apostas em 1654, embora tivessem seguido caminhos diferentes.

Este problema foi posto a Pascal pelo Cavaleiro De Méré. Este Cavaleiro era considerado por alguns um jogador inveterado, por outros um filósofo e homem de letras.

Um facto curioso é que este problema era o mesmo que, sensivelmente, um século antes havia retido a atenção de Pacioli, Tartaglia e Cardano.

Gerolamo Cardano, médico e matemático Italiano, nascido em Pavia (1501-1576) escreveu o primeiro livro relativo às probabilidades "*Liber de Ludo Alex*" ("Livro dos jogos do azar"), embora este só tenha sido publicado em 1663.

Laplace publicou a obra da Teoria Analítica das Probabilidades, em 1812. Esta obra foi um importante tributo para o desenvolvimento dos conhecimentos nesta área, uma vez que reuniu as ideias descobertas até então, donde se salienta a famosa Lei de Laplace.

Laplace comentou as teorias de Pascal do seguinte modo:

*"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."*

A teoria das probabilidades evoluiu de tal forma que no século XX possui uma axiomática própria dentro da teoria matemática. Tal efeito deve-se sobretudo a Kolmogorov, que em 1933 adotou a nova definição de probabilidade que atualmente designamos por "Definição frequêncista".



Pierre De Fermat



Blaise Pascal

### Problema histórico:

Em 1754, perguntaram a D'Alembert qual era a probabilidade de obter pelo menos uma cara ao lançar uma moeda duas vezes. O raciocínio de D'Alembert terá sido o seguinte:

" Só existem três casos possíveis.

- Sair cara no 1º lançamento (e o jogo termina);
- Não sair cara no 1º lançamento mas sair no 2º;
- Nunca sair cara.

“Ora, os dois primeiros são favoráveis, logo a probabilidade pedida é  $2/3$ .”

O que pensa deste raciocínio?

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm>. Acessado em 04/03/2013

### ATIVIDADE RELACIONADA 1: Jogando com dois dados:

Dois dados não viciados são jogados, observa-se as faces voltadas para cima.



Fonte: [Google.com.br](http://Google.com.br). Acessado em 02/04/2013

Pergunta-se:

1. Faça uma tabela com todas as possibilidades de pares.  
Exemplo: (1,1), (1,2), (1,3), ..., (6,6).

---

---

---

---

---

Após fazer a tabela pedida no exemplo 2, responda.

2. Quantos pares teremos?

---

---

---

3. Quantos pares têm números iguais?

---

---

---

4. Quantos pares têm números diferentes?

---

---

---

5. Quantos pares têm o primeiro numero maior que o segundo?

---

---

---

6. Quantos pares têm os dois números pares?

---

---

---

7. Quantos pares têm os dois números impares?

---

---

---

$$P(X) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados favoráveis}}{n^{\circ} \text{ total de possibilidades}},$$

8. Usando a fórmula

calcule a probabilidade de acontecer os casos:

a) Saírem dois números iguais.

---

---

---

---

---

b) Saírem dois números diferentes.

---

---

---

---

---

c) Saírem apenas números pares.

---

---

---

---

---

d) Saírem apenas números ímpares.

---

---

---

---

---

e) Sair o primeiro números maior que o segundo.

---

---

---

---

---

1.A tabela seria essa:

D <sub>1</sub> /D <sub>2</sub>	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

2. O total de resultados seria 36.

8.A)  $P = 6/36$

8.B)  $P = 30/36$

8.C)  $P = 9/36$

8.D)  $P = 9/36$

## **ATIVIDADE 2: Jogando na Mega Sena**

- **PRÉ-REQUISITOS:** Combinação e definição de probabilidade no contexto dos jogos da Mega Sena.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado colaborativo.
- **OBJETIVOS:** : Resolver problemas com Combinação e probabilidade.

## **ATIVIDADE RELACIONADA 1: Jogando na Mega Sena:**

A Mega Sena é o jogo que paga milhões para o acertador dos 6 números



sorteados. Esse jogo consiste em realizar uma aposta contendo no mínimo 6 e no máximo 15 dezenas escolhidas do conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}. Cada aposta mínima de 6 dezenas custa R\$ 2,00 e o preço das apostas varia conforme a tabela abaixo:

Tabela de valores dos jogos da Mega Sena

Quantidade de dezenas apostadas	6	7	8	9	10
Valor em R\$	2,00	14,00	56,00	168,00	420,00

O preço das apostas é calculado a partir do total de agrupamentos de 6 dezenas que um apostador faz com as dezenas apostadas. Assim, um apostador que joga na Mega Sena as dezenas 05 – 09 – 12 – 13 – 35 – 37 – 57, fará 7 jogos, pagando pelo jogo R\$ 14,00.

1. Nesses agrupamentos a ordem das dezenas, em cada jogo, é fator determinante na composição dos jogos? Justifique.

---

---

---

---

---

Você já reparou que um apostador que faz uma aposta simples de 6 dezenas paga R\$ 2,00 pela aposta. Se ele acrescentar uma dezena, isto é, apostar em 7 dezenas, irá pagar R\$ 14,00 (7 x R\$ 2,00). Porém caso ele aposte em 8 dezenas, irá pagar R\$ 56,00. Por que isso ocorre? Ele não deveria pagar R\$ 16,00 (8 x R\$ 2,00) pelas 8 dezenas? Para responder essas perguntas, resolva os itens a seguir.

2. Um apostador da mega sena escolheu as dezenas 05 – 09 – 12 – 13 – 35 – 37 – 57 para realizar seu jogo. Pelas regras do jogo, ele ganhará o prêmio caso seja

sorteada uma das sequências de 6 dezenas formadas a partir das dezenas escolhidas. Quantas sequências de 6 dezenas são possíveis de se formar, com essas dezenas? Descreva-as?

---

---

---

3. Para uma aposta de 7 dezenas, pela tabela de valores da Mega Sena, é cobrado do apostador R\$ 14,00. Esse valor está correto? Justifique.

---

---

---

A resposta do item 2 é sim. Com 7 dezenas produzem-se 7 sequências simples de 6 dezenas. Como cada sequência simples custa R\$ 2,00 então temos  $7 \times \text{R\$ } 2,00 = \text{R\$ } 14,00$ .

4. Pela tabela de valores dos jogos da Mega Sena, um apostador que escolher 8 dezenas para jogar na mega sena pagará R\$ 56,00. Por que isso ocorre? Justifique.

---

---

---

---

Isso ocorre porque o número de sequências simples de 6 dezenas é calculado por uma combinação das 8 dezenas tomadas 2 a 2. Assim teremos:

$C_{8,6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$  . Logo, temos 28 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar  $28 \times \text{R\$ } 2,00 = \text{R\$ } 56,00$ .

5. Quanto pagará pela aposta um apostador que escolher, para jogar na Mega Sena, as dezenas 01 – 02 – 09 – 10 – 21 – 22 – 33 – 39 – 45 – 54 ?

---

---

---

Esse apostador escolheu 10 dezenas. Observando a tabela de valores dos jogos da Mega Sena, vemos que ele pagará R\$ 420,00 pelos jogos.

6. Um apostador que dispunha de muito dinheiro para jogar escolheu quinze dezenas entre as sessenta e fez a suas apostas na Mega Sena. Qual foi número total de apostas que esse apostador realizou? Quanto ele pagou pelas apostas?

---

---

---

---

Como esse apostador escolheu 15 dezenas temos que o número de aposta é dado

por:  $C_{15,6} = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005$  . Logo, temos 5005 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar  $5005 \times \text{R\$ } 2,00 = \text{R\$ } 10.010,00$ .

7. Certo apostador escolheu uma quantidade de dezenas e jogou na Mega Sena, pagando R\$ 924,00. Quantas dezenas diferentes ele escolheu?

---

---

---

---

Como esse apostador escolheu n dezenas pagando 924 reais, temos que ele realizou 462 jogos simples. Basta fazer  $924 \div 2$  Com isso, para calcular o número n de dezenas deve-se resolver a seguinte equação:

$$C_{n,6} = 462 \Rightarrow \frac{n!}{6!(n-6)!} = 462$$

Para evitar resolver uma equação do 6º grau, com apoio a tabela de valores dos jogos da Mega Sena verificamos que  $C_{10,6} = 210$ . Logo,

$$C_{11,6} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

fazendo n= 11 temos:

Portanto, temos 5005 jogos simples. Com isso o apostador deverá pagar 5005 x R\$ 2,00 = R\$ 10.010,00.

8. Calcule o número de resultados possíveis, isto é, o número de sequências simples de 6 dezenas formadas a partir das 60 dezenas possíveis, para um Sorteio da Mega Sena. Este número é da ordem de quantos milhões?

---

---

---

---

Como a Mega Sena disponibiliza um total de 60 dezenas para a realização dos jogos, o número de dezenas simples, formadas a partir dessas 60 dezenas é obtido por  $C_{60,6} = 50.063.860$ . Esse número é da ordem de 50 milhões.

9. Agora, calcule a chance de um apostador ganhar na Mega Sena, com uma

aposta simples.

---

---

---

---

Essa probabilidade é calculada por:

$$P(X) = \frac{\textit{n}^{\circ} \textit{ de resultados favoráveis}}{\textit{n}^{\circ} \textit{ total de possibilidades}} \Rightarrow$$

$$P(1) = \frac{1}{50.063.860}$$

10. Suponha que um apostador fez um jogo com 10 dezenas na Mega Sena. Qual é a chance desse apostador acertar na Mega Sena?

---

---

---

---

Como esse apostador escolheu 10 dezenas para jogar na mega sena, pela análise da Tabela de Valores dos jogos da Mega Sena ele realizou 210 jogos. Portanto a chance dele acertar na Mega Sena é de:

$$P(10) = \frac{210}{50.063.860} = \frac{3}{715.198}$$

Roteiro de ação 5 (1º bimestre -3º ano- 2013) – Fonte: <http://projetoceeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=53> . Acessado em 01/04/2013.

## TEORIA

### Conceito

Consideremos a experiência do lançamento de uma moeda e leitura da face

voltada para cima. Ao realizarmos  $n$  vezes a experiência, se obtivermos  $m$  vezes o resultado “cara” é  $\frac{m}{n}$ . É claro que lançada a moeda o resultado é imprevisível, pois não podemos dizer com absoluta certeza que o resultado será “cara”, pois nada impede que dê “coroa”. A experiência provou que conforme se aumenta  $n$ , ou seja, à medida que mais lançamentos da moeda são feitos, a frequência relativa  $\frac{m}{n}$  tende a estabilizar-se em torno de  $\frac{1}{2}$ .

Exemplo:

Em 1000 lançamentos ( $n = 1000$ ), 529 resultados foram favoráveis ( $m = 529$ ), o que nos dá para  $\frac{m}{n}$  o valor de 0,529. Em 4040 lançamentos, 2048 resultados foram favoráveis o que nos dá  $\frac{m}{n} = 0,50693$ , isso significa que no lançamento de uma moeda “honesta” a probabilidade de se obter “cara” é  $\frac{1}{2}$ . Essa experiência foi realizada por Kerrich e Buffon.

A definição que permite calcular teoricamente a probabilidade de um evento, sem realizar a experiência é:

Dado um espaço amostral  $S$ , com  $n(S)$  elementos, e um evento  $A$  de  $S$ , com  $n(A)$  elementos, a probabilidade do evento  $A$  é o  $P(A)$  tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/probabilidade.htm>. Acessado em 01/04/2013

## AValiação

A avaliação nesse caso serve para poder se saber o quanto se avançou, ou não, na assimilação do conceito de probabilidade.

A avaliação será feito com uma carga horária de 50 minutos e será individual, seguindo a risca os exemplos dados, atividades e exercícios de aprendizagem. Os alunos serão medidos, na capacidade de reconhecer e aplicar o conceito de probabilidade.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Matemática: ciência e aplicação, 2 : ensino médio/ Gelson Iezzi...[ET al.]. – 6. Ed. – São Paulo : Saraiva, 2010.
2. Roteiros de Ação 5 - 1º bimestre/3º Série/ 2013 – Formação Continuada – Seeduc/RJ.

## Endereços Eletrônicos acessados entre 01/04/2013 e 02/04/2013:

1. Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/probabilidade.htm>. Acessado em 01/04/2013
2. Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm>. Acessado em 01/04/2013
3. Fonte: <http://www.google.com.br>. Acessado em 02/04/2013