Formação Continuada para professores de Matemática
Fundação CECIERJ/SEEDUC – RJ
Colégio Estadual Cinamomo
Profª. Adilcimara da silva Gomes
Matrícula: 0838003-2
Série 2° Ano –Ensino Médio – 3° Bimestre
Tutora: Ana Paula Muniz

Introdução

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam, através de problemas do dia-a-dia, a aplicabilidade do conteúdo denominado **logaritmo** para resolução de problemas. O planejamento foi elaborado visando a transmissão de conhecimento através da construção feita pelos alunos com resolução de situações-problema e generalizações.

Já que os alunos apresentam dificuldades na interpretação de enunciados, nos cálculos envolvendo números reais e também a falta de interesse; utilizaremos assuntos diversificados e atraentes para que possamos ter a atenção dos alunos.

Para a totalização do plano serão necessários 12 tempos de 40 minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais 4 tempos para avaliação da aprendizagem, lembrando que essa turma é do EJA com 4 aulas semanais.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

APRESENTAÇÃO DO CONCEITO LOGARITMO

Habilidade Relacionada:

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo

Pré- Requisitos: Potenciação

Tempo de Duração: 80 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: Apresentação em Power point com um pouco da história de logaritmo, e também exemplos de fractais, de onde será introduzido logaritmo, folha de atividades, régua, tesoura e lápis de cor.

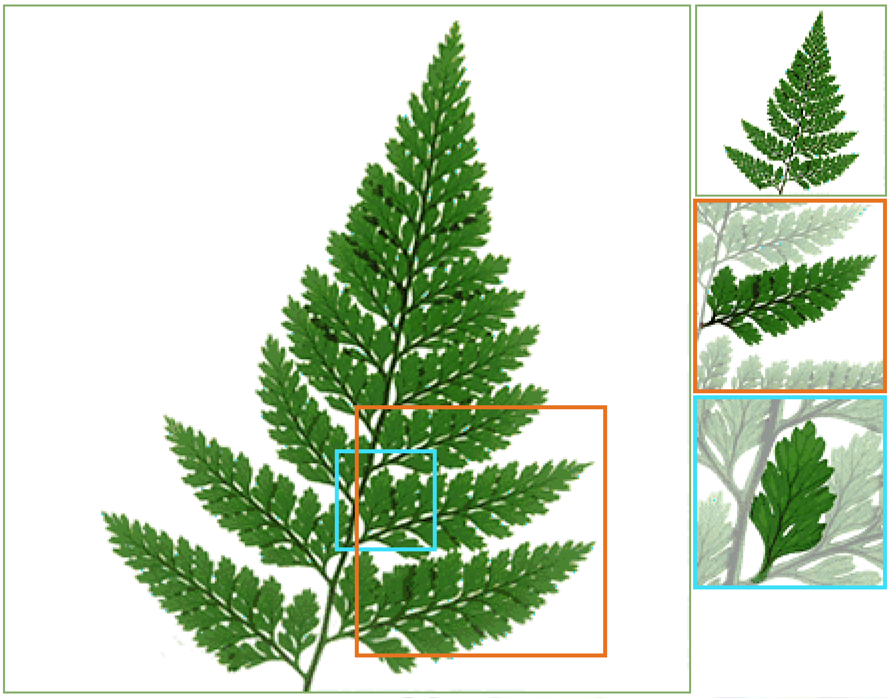
Organização da Turma: Grupos de dois alunos

Objetivos: Apresentar o conceito de logaritmo a partir do estudo de fractais.

Metodologia Adotada

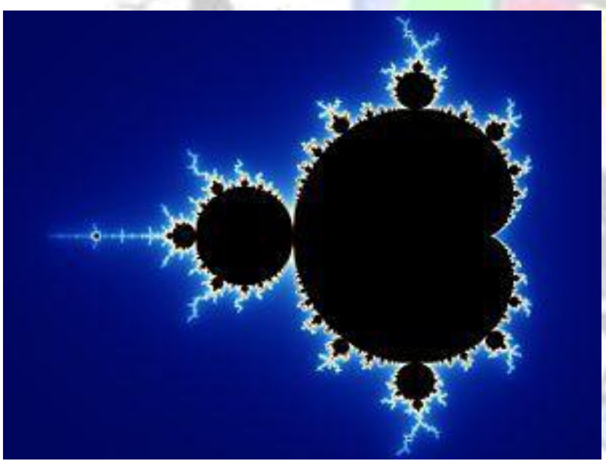
Primeiramente fazemos uma revisão de potenciação no quadro; depois apresentaremos slides para aos alunos com um pouco da história do assunto que será estudado: logaritmo e também exemplos de fractais, como folha de samambaia, figuras e exemplos da curva de Koch.

Utilizando como base o roteiro de ação 1
O que poderia haver em comum entre uma samambaia, uma árvore, nuvens, cristais, formas geométricas, ou ainda, a computação gráfica?
O matemático Benoit Mandelbrot percebeu que vários objetos presentes na natureza possuem características bastante especiais e que podem ser associados com formas geométricas abstratas.
Com esse raciocínio, Mandelbrot definiu, a partir do adjetivo em latim *fractus* (cujo verbo em latim *frangere* significa quebrar, irregular), um novo objeto, denominado *Fractal.*
A principal característica de um fractal é a autos semelhança, ou seja, cada parte de um objeto carrega em si a mesma estrutura do objeto inteiro, de maneira que podemos obter o objeto inteiro a partir da ampliação de uma de suas partes.
Um belo exemplo que poderia expressar a ideia de autos semelhança é o de uma samambaia



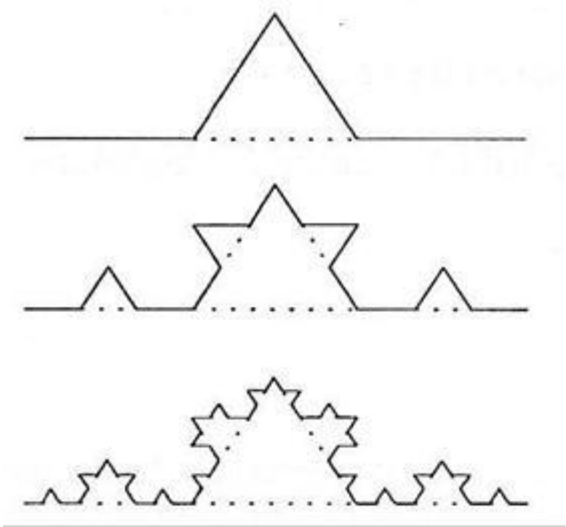
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

Observe agora a bela imagem a seguir. Ela é chamada *Conjunto de Mandelbrot*. Repare que, ao olharmos para uma pequena parte da figura, temos a nítida impressão de que estamos olhando para a figura inteira.



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal

Podemos também criar fractais por meio da repetição de procedimentos. A *Curva de Koch*, por exemplo, é obtida a partir de um segmento de reta que deve ser dividido em três partes iguais, de maneira que, o segmento central seja substituído por um triângulo equilátero sem a base. Repetindo esse processo com os segmentos restantes, produzimos, então, a *Curva de Koch.*



Fonte: http://www.cap.ufrgs.br/matweb/abordagem%20fractais.html

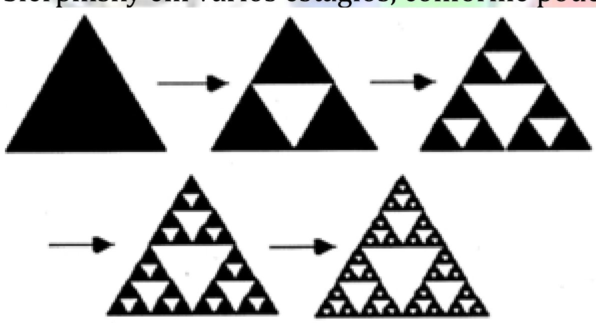
Um fractal bastante conhecido é o Triângulo de Sierpinsky. Ele é obtido a partir de um triângulo equilátero e após sucessivas repetições dos passos descritos abaixo.

1) Obtenha o ponto médio de cada um dos lados do triângulo equilátero disponibilizado pelo seu professor.

2) Trace segmentos de reta unindo os pontos médios, obtendo quatro triângulos equiláteros.

3) Com o auxílio da tesoura, recorte o triângulo central.

4) Note que, ao retirarmos o triângulo central, temos agora três novos triângulos. Repita os passos anteriores com os triângulos restantes e obtenha o Triângulo de Sierpinsky em vários estágios, conforme podemos ver na figura abaixo.



Fonte: http://www.cap.ufrgs.br/matweb/abordagem%20fractais.html

5) Agora é com você! Vamos fazer uma pequena investigação e descobrir o número de triângulos no Triângulo de Sierpinsky a cada iteração. Para tal, preencha a tabela abaixo:

Iteração	0	1	2	3	4	5	6
N° de triângulos	1	3	9				

6) Você seria capaz de escrever uma fórmula que relacione o número de triângulos na n-ésima iteração?

No século XVI, o matemático alemão Michael Stifel utilizou uma tabela como essa para efetuar multiplicações. Nessa época, das grandes navegações e do pleno desenvolvimento da Astronomia, o uso da trigonometria para o estudo da Astronomia

exigia uma necessidade de precisão de cálculo com números bastante grandes com oito ou mais casas decimais. Isso certamente dava muito trabalho, pois era preciso multiplicar, dividir e extrair raiz quadrada desses números.
Fonte: http://quinzo.wordpress.com/2011/05/22/when-the-world-would-really-end/
A brilhante ideia de Stifel consiste na organização de uma tabela que associa duas sequências numéricas. Vamos utilizar a tabela, que construímos juntos, para entender melhor como podemos obter o resultado das multiplicações.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	9	27	81	243	729	2181	6561	19683	59049	177147	531441	1594323

7) Efetue as seguintes operações e veja se você percebe algum padrão, observando a tabela:
a) 2 187 X 27 =
b) 6 561 X 243 =
c) 177 147 6 561

8) Agora, lembrando do que você aprendeu, utilize a tabela para efetuar as seguintes multiplicações e divisões:
a) 59049 6561 =
b) 243 729 =
c) 2187 81 =
d) 531541 19683 =

Como você deve ter percebido, a segunda sequência de nossa tabela é formada pelas potências de 3 e a primeira sequência formada pelos respectivos expoentes.

As ideias de Stifel certamente influenciaram o matemático e teólogo escocês John Napier (1550-1617) na criação dos *logaritmos*.
O termo *logaritmos* também foi inventado por Napier e é a combinação de duas palavras gregas – *logos* e *arithmos* – a primeira significa razão e a segunda significa número.
A grande percepção de Stifel e Napier foi a observação de que o trabalho com o expoente dos números, quando escritos na forma de potência, se torna bastante simples.
Como, em nosso exemplo, a base das potências é 3, dizemos que:
* 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja,

* 5 é o logaritmo de 243 na base 3, ou seja,

*10 é o logaritmo de 59049 na base 3, ou seja,

* 13 é o logaritmo de 1594323 na base 3, ou seja,

9) A partir dessas informações, preencha a seguinte tabela:

Log $_3$ 531441 =_________________	O logaritmo de 81 na base 3 é ________
O logaritmo de 177147 na base 3 é ______	Log $_3$ 6561 = _________________
Log $_3$ 729 =_________	O logaritmo de 3 na base 3 é ______

10) Complete a tabela logarítmica abaixo com as potências de base 2 e responda às seguintes questões:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	4											

a) O logaritmo de 256 na base 2 é _______

b) 512 x 16 = _______

c) $\log_2 1024$ = ______

d) 32 x 256 = _____

e) O logaritmo de 2 048 na base 2 é _______

f) $\log_2 4096$ =

g) 4 096 : 256 = ________

Se o aluno tiver compreendido as atividades anteriores, deverá estar preparado para entender a definição formal do logaritmo de um número real positivo.

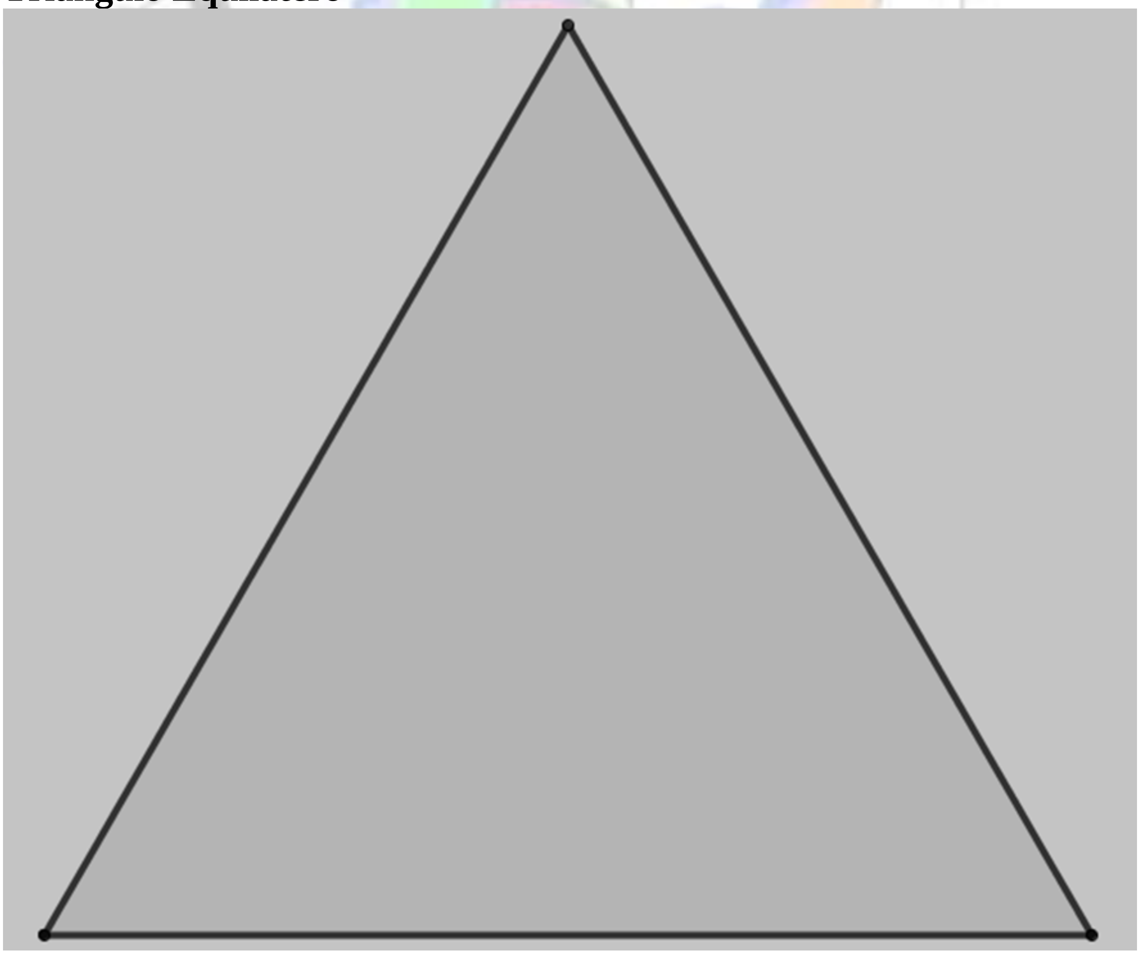
Dados dois números reais positivos a e b **, com a ≠1** se $b = a^c$**, então o expoente c chama-se logaritmo de b** na base a **.**

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Folha de atividades contendo exercícios sobre logaritmos

ANEXO 1

Triângulo Equilátero



ATIVIDADE 2

Função logarítmica

Habilidade Relacionada:

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo
H59 – Resolver problemas envolvendo função logarítmica

Pré- Requisitos: Conceito de logaritmo e função exponencial

Tempo de Duração: 160 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: Data-show na apresentação de uma situação-problema e folha de atividades

Organização da Turma: Duplas

Objetivos: Estimular o raciocínio na interpretação de problemas e generalizações de situações para resolver problemas envolvendo logaritmo.

Metodologia Adotada: Exemplos de situações do dia-a-dia para efetuar os cálculos envolvendo logaritmos

Problema 1

Uma pessoa deposita um determinado capital na caderneta de poupança. A taxa de capitalização mensal da caderneta é de 0,5% a.m. Supondo que a taxa de capitalização permaneça constante, depois de quanto tempo o montante será o dobro do capital inicial investido na caderneta de poupança?
Vamos tentar resolver o problema, pensando inicialmente em algumas questões?

1) Se eu tenho um determinado capital , por quanto devo multiplicar esse capital C para obter o capital acrescido de 30%?

2) E se eu quiser o meu capital C inicial acrescido de 7%, por quanto devo multiplicar o capital inicial para obter o acréscimo desejado?

3) Imaginemos agora que todo mês o meu capital sofra um acréscimo de 20% sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de 1 mês? E de 2 meses ? E de 3 meses? E se forem n meses?

4) E se, de forma genérica, o meu acréscimo fosse de % sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de n meses?

Nesse raciocínio, de forma geral, um acréscimo de % sobre o Capital Inicial C será dado por (i +1).C.

Dessa maneira, de forma geral, em sucessivos acréscimos de i% sobre o montante capitalizado, gera o montante final $C.(1+i)^n$

5) Tente escrever a equação que modela o nosso problema. Se necessário, releia-o.
Esperamos que, após a realização dessas atividades e releitura do problema, o estudante chegue a seguinte equação:

$C.1{,}005^n = 2C$

Você deve ter observado que para resolvermos nosso problema devemos resolver a equação . Repare ainda que a incógnita encontra-se no expoente, o que dificulta a resolução.
Contudo, com a utilização dos logaritmos podemos resolver esse problema. Basta lembrar que o logaritmo na base a de um número real positivo é o **expoente** da potência a que se deve elevar a para obter esse número real.

Para resolvermos o problema será necessário deduzirmos e utilizarmos algumas propriedades operatórias com os logaritmos.
Vamos então construir e entender essas propriedades? Mãos a obra!
Os logaritmos foram criados como um instrumento para efetuar cálculos a partir da associação entre duas sequências numéricas. Lembremos que essa ideia simples e ao mesmo tempo genial permite encontrarmos um produto entre dois números a partir da soma de outros dois números correspondentes, da mesma forma que, encontramos o quociente entre dois números a partir da subtração de números correspondentes.

Observe a tabela abaixo:

$\log_2 b$	0	1	2	3	4	5	6	7
b	1	2	4	8	16	32	64	256

Note que, para encontrarmos o produto 4 x 32 , deveríamos encontrar na 1ª linha os números correspondentes a 4 e 32 na tabela, que são respectivamente 2 e 5 (repare que $\log_2 4 = 2$ e $\log_2 32 = 5$). Para finalmente achar o produto almejado, deve-se fazer $\log_2 4 + \log_2 32$ e identificar o número correspondente a essa soma na 2ª linha da tabela, que será o resultado esperado.
De igual forma, para encontramos o quociente da operação 256 : 16, localizamos os números correspondentes a 256 e 16 na 1ª linha da tabela, que, nesse caso, são respectivamente 8 e 4 ($\log_2 256 = 8$ e $\log_2 16 = 4$) e fazemos a subtração $\log_2 256 - \log_2 16$. Localizando o número correspondente a essa subtração na 2ª linha da tabela, finalmente encontramos o quociente almejado.

Repare que a ideia de Stifel permite encontrarmos um produto apenas efetuando uma soma e, analogamente, encontramos um quociente efetuando uma subtração.
Fica claro que o conceito de logaritmo, de alguma forma, é capaz de transformar um produto em uma soma e um quociente em uma subtração.

Nos exemplos acima, temos:

$\log_2 4 .32=7$ e $\log_2 4_+ \log_2 32 = 7$

$\log_2 (256:16) = 4$ e $\log_2 256 - \log_2 16 = 7$

Isso nos leva a conjecturar que:

$\log_2 4 .32 = \log_2 4 + \log_2 32$

$\log_2 (256:16) = \log_2 256 - \log_2 16$

De forma geral, será que dados *a,b,c* números reais positivos com $a \neq 1$

$\log_a b.c = \log_a b + \log_a c$

$\log_a (b.c) = \log_a b - \log_a c$

Outra propriedade importantíssima para os cálculos com logaritmo se refere ao logaritmo de uma potência.

1) Dados números reais positivos a e b, com $a \neq 1$ e $n \in R$. Temos:
   $\log_a b^n = n.\log_a b$

Demonstre essa propriedade, completando os espaços em branco.

Seja $x = \log_a b$

Aplicando a definição de logaritmo, temos __________.

Substituindo em $\log_a b^n$ segue que:

$\log_a b^n = \log_a (a^x)^n = \log_a a = x.n = n.x = n.\log_a b$

O que conclui a demonstração.

De posse dessas propriedades podemos resolver o nosso problema. A equação abaixo modela o problema proposto, não é mesmo?

$C.1,005^n = 2C$

Como C > 0, podemos dividir por C ambos os lados da igualdade acima, o que gera:

$1,005^n = 2$

Uma vez que já estudamos a respeito das principais propriedades do logaritmo poderíamos usar o fato de que, como $1,005^n = 2$, o logaritmo de $1,005^n$ seria igual ao logaritmo de 2.

Mas algumas questões surgem:

a) Sobre qual base devemos considerar o logaritmo?

b) Na minha calculadora só existe o logaritmo de base 10 e de base, sobre qual dessas bases posso calcular o logaritmo?

Essas perguntas podem ser respondidas quando conhecemos a seguinte propriedade:

Mudança de Base

Sejam números reais positivos a,b,c com $a,c \neq 1$ então $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Voltando a resolução do nosso problema, sendo $1,005^n = 2$ podemos considerar que, para qualquer base positiva real diferente de 1, temos:

$\log_a 1,005^n = \log_a 2$

Utilizando a propriedade de logaritmo da potência, tem-se que:

$n. \log_a 1,005 = \log_a 2$

Daí:

$$n = \frac{\log_a 2}{\log_a 1{,}005}$$

Repare que esse valor é o mesmo para qualquer positivo e diferente de 1. Para resolvermos nosso problema, consideremos a=10 . Assim:

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}005}$$

Em matemática, convencionou-se que, por exemplo, quando está escrito log x devemos considerar que a base é 10.
Logo,

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}005} = \frac{\log\ 2}{\log\ 1{,}005} \sim 138{,}9$$

Portanto, nas condições dadas no problema, após 139 meses teremos como montante o dobro do capital inicial investido.

Folha de atividades com exercícios sobre propriedades dos logaritmos.

ATIVIDADE 3

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Habilidade Relacionada:

H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial

Pré- Requisitos: Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, Definição de Logaritmo, Função Exponencial.

Tempo de Duração: 120 minutos
Recursos Educacionais Utilizados: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica, computador com software Geogebra instalado.

Organização da Turma: Duplas

Objetivos: Possibilitar que os alunos entendam que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, bem como ter clareza de suas principais propriedades e características

Metodologia Adotada : Utilizaremos o data-show com o resumo com apresentação do software Geogebra, e a seguir trabalhemos com papel quadriculado e régua para traçar os gráficos da função logarítmica

Vamos trabalhar com o gráfico $f(x) = \log_a x$ no lap top do professor projetado no data-show e descobrir suas principais características.
1) Abra o arquivo do Geogebra "Gráfico_função_log.ggb", disponibilizado pelo professor.
2) Varie os valores de no seletor e verifique o aspecto da função logarítmica.
3) Para quais valores de o aspecto da função logarítmica é o mesmo?
4) Movimentando os valores de , você saberia dizer em que instante a função muda de aspecto?

Você deve ter percebido que quando o comportamento da função logarítmica permanece o mesmo.

5) Movimente o ponto A e, em seguida, preencha a tabela abaixo.

x	$f(x) = \log_2 x$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

6) O que está acontecendo com os valores de x ? E com os valores de f(x) ?

7) A função é crescente ou decrescente? Converse com seu colega e veja se chegaram a mesma conclusão. Explicite um argumento que justifique a sua resposta.

8) Movimentando os valores de x e f(x) mantendo a> 0 , você chegaria a mesma conclusão? O que podemos afirmar sobre o comportamento da função $f(x) = \log_a x$ quando a> 0 ?

9) Vamos manipular novamente o software e preencher a tabela abaixo.

x	$f(x)= (½)^x$
0,1	
0,2	
0,3	
0,4	
0,5	
0,6	
0,7	

10) O que está acontecendo com os valores de x ? E com os valores de f(x) ?

11) A função é crescente ou decrescente? Converse com seu colega e veja se chegaram à mesma conclusão. Explicite um argumento que justifique a sua resposta.

12) Movimentando os valores de x e f(x)mantendo 0<a<1 , você chegaria a mesma conclusão?

13) O que podemos afirmar sobre o comportamento da função $f(x) = \log_a x$ quando $0<a<1$?

Folha de atividades contendo gráficos de funções logarítmicas

ATIVIDADE 4 (Problemas do SAERJ/Saerjinho)

Habilidade Relacionada:

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo
H59 – Resolver problemas envolvendo função logarítmica
H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial

Pré- Requisitos: Função exponencial e função logarítmica

Tempo de Duração: 80 minutos

Recursos Educacionais Utilizados: Folha de Atividades

Organização da Turma: Duplas

Objetivos: Revisão e fixação através de atividades de avaliação externas anteriores.

Metodologia Adotada

Apresentação de questões diversificadas envolvendo os conceitos aprendidos sobre logaritmo.

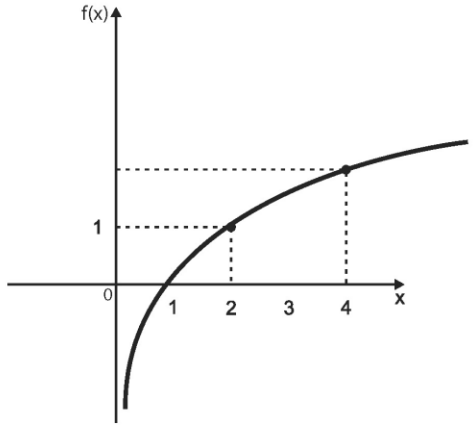
1ª questão

(M120459B1) Dados *log* 2 = 0,301 e *log* 3 = 0,477, qual é o valor do *log* 12?

A) 0,043
B) 0,287
C) 0,567
D) 1,079
E) 2,778

2ª questão

(M110056B1) Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2.



Qual é o valor de f(x) para x igual 4?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

3ª questão

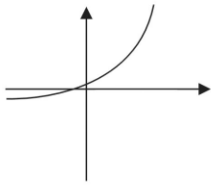
(PAMA11097AC) A função inversa da função exponencial definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

A) $y = 2^x$
B) $y = \log_2 x$
C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
D) $y = 2x$
E) $y = x^{\frac{1}{2}}$

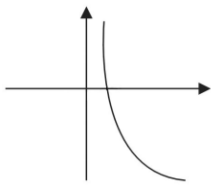
4ª Questão

(M120037A9) Sendo $f(x) = a^x$, com $a > 0$, o gráfico que melhor representa a função $f^{-1}(x)$ é

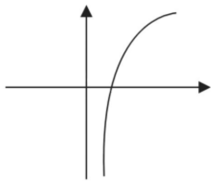
A)



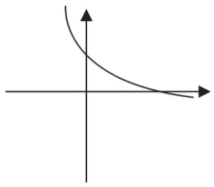
B)



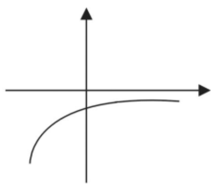
C)



D)

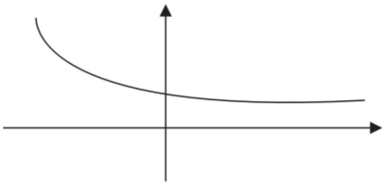


E)



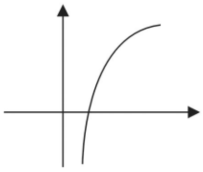
5ª questão

(PAMA11096AC) O gráfico abaixo representa a função exponencial $y = b^x$, onde b é uma constante.

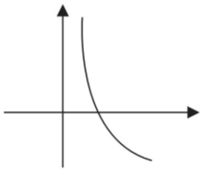


Dentre os esboços abaixo, o que melhor representa o gráfico da função $y = \log_b x$ é

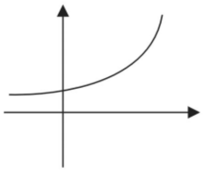
A)



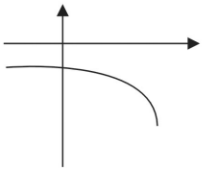
B)



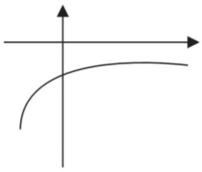
C)



D)



E)



Avaliação

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre como está se realizando o processo de ensino- aprendizagem como um todo – tanto para o professor conhecer e verificar os resultados de seu trabalho quanto para o aluno verificar seu desempenho. Além disso, ela deve ser um meio para que possamos reavaliar o processo de ensino, sanando as dificuldades e aperfeiçoando os métodos.

A folha de atividades a ser realizada em duplas será uma forma de avaliação através dela poderemos verificar as competências e habilidades aprendidas, então ela será pontuada.

E a outra forma de avaliação será as questões do SAERJ/SAERJINHO, onde verificaremos os acertos e dificuldades para que possamos identificar as dificuldades e programar atividades diversificadas de recuperação.

Será aplicada uma avaliação escrita individual para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano envolvendo logaritmos.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para as turmas do 2º ano/ EJA com 4 aulas semanais e o grau de conhecimento dos alunos. As atividades que envolvem computador vou apresentar apenas no data-show, pois a escola está em obras e a sala de informática está temporariamente desativada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE ACAO – Logaritmos –
Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º bimestre/2013 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/

Matemática Contexto & Aplicações – volume 2- Dante – 1ª Edição (2011) – Editora Ática

Matemática Ciência e Aplicações – Volume 2-Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Nilze de Almeida – 6ª Edição (2010) – Editora Saraiva