Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/CEDERJ

Matemática – 2º ano – 1º Bimestre/2013
PLANO DE TRABALHO 1

# FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Tarefa 3
Cursista: Aline Gabry Santos
Tutor: Melicia Cortat Ribeiro

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Geralmente, quando um professor entra na sala de aula, pela primeira vez, e anuncia que a aula é de matemática, a maioria dos alunos “torce o nariz”, reclama, faz cara feia e outras coisas mais. Existe uma tradição muito grande de que matemática é para “loucos” ou “pessoas muito inteligentes”. Como então introduzir um conceito, como função logarítmica, sabendo que além deste problema une-se o fato de ser um conceito dificilmente associado ao mundo prático.

Quando questiono alunos de séries seguintes sobre o que aprenderam sobre logaritmos, geralmente, a resposta é uma só: “Ah, eu nunca tive isso”.

Como professor temos todos enfrentado diversos problemas em nossa prática diária, porém o maior deles diz respeito a conseguir a atenção dos alunos para o conteúdo abordado.

Aquela “velha” aula do conteúdo aos exercícios já não é mais suficiente para atrair a atenção dos alunos (ou nunca foi). Podemos perceber que a cada ano que passa menos alunos têm interesse por esse tipo de aula. Por isso proponho este plano de estudo, cujo objetivo é facilitar o acesso aos alunos e, consequentemente, uma melhor aquisição e construção do conhecimento por parte deles.

Para a aplicação deste plano, serão necessários 10 tempos de cinqüenta minutos para o desenvolvimento do conteúdo e execução dos exercícios, e outros 2 tempos para avaliação da aprendizagem.

Vale ressaltar que todos os comentários formatados em verde são para a orientação do professor durante a aula.

# DESENVOVIMENTO

## Atividade 1

**HABILIDADE RELACIONADA:**

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

.

**PRÉ-REQUISITO:**.Potenciação.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e régua.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em grupos de 2 ou 3 alunos, de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

**OBJETIVOS:** Conceituar o logaritmo.

**METODOLOGIA:**

**Distribuir para os alunos a atividade abaixo e seguir o roteiro.**

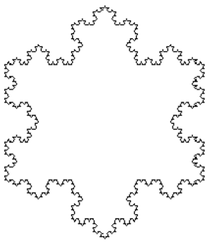
**FRACTAIS**

O que poderia haver em comum entre uma samambaia, uma árvore, nuvens, cristais, formas geométricas, ou ainda, a computação gráfica?

O matemático Benoit Mandelbrot percebeu que vários objetos presentes na natureza possuem características bastante especiais e que podem ser associados com formas geométricas abstratas.

A principal característica de um fractal é a autos semelhança, ou seja, cada parte de um objeto carrega em si a mesma estrutura do objeto inteiro, de maneira que podemos obter o objeto inteiro a partir da ampliação de uma de suas partes.

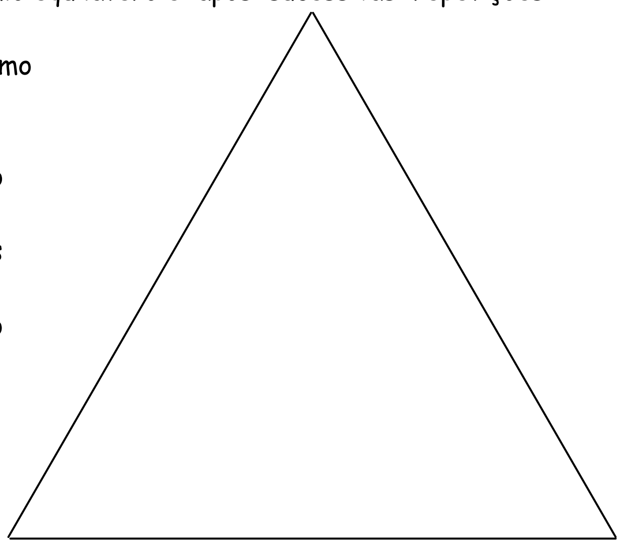
Um belo exemplo que poderia expressar a ideia de autos semelhança é o de uma samambaia. Observe a estrutura de uma folha de samambaia na figura ao lado.



O desenho ao lado mostra um fractal conhecido como a Curva de Koch, ou fractal do Floco de Neve, que foi pesquisado inicialmente pelo matemático sueco Helge von Koch em 1904, e recebeu este nome por sua semelhança com um floco de neve.

Um fractal bastante conhecido é o Triângulo de Sierpinsky. Ele é obtido a partir de um triângulo equilátero e após sucessivas repetições dos passos descritos abaixo.

Use o triângulo ao lado e faça você mesmo o seu Triângulo de Sierpinsky.



1) Marque no triângulo equilátero acima o ponto médio de cada um dos seus lados.
2) Trace segmentos de reta unindo os pontos médios, obtendo quatro triângulos equiláteros.
3) Usando um lápis de cor, ou o seu próprio lápis de escrever, pinte o triângulo central.

**Daqui em diante, oriente os alunos a preencher a tabela da questão 5 ao mesmo tempo em que pintam os triângulos, a fim de que não se percam nas contagens.**

4) Note que, ao pintarmos o triângulo central, temos agora apenas três triângulos em branco. Repita os passos anteriores com os triângulos restantes e obtenha o Triângulo de Sierpinsky em vários estágios e vejamos como fica. Compare com seu colega o seu resultado.

**Neste momento é importante acompanhar os alunos para saber se eles estão conseguindo traçar os pontos médios com exatidão, para que assim obtenham um bom resultado.**

5) Agora é com você! Preencha a tabela abaixo com o número de triângulos no Triângulo de Sierpinsky a cada iteração.

| Interação | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de $\Delta$ | 1 | 3 | 9 | | | | |

6) Você seria capaz de escrever uma fórmula que relacione o número de triângulos na n-ésima iteração?

**É possível que os alunos tenham dificuldades para preencher a tabela acima, desta forma, fique atento ao melhor momento para intervir de forma que o aluno perceba que o número de triângulos é expresso por uma sequência de potências de 3.**

**Dessa forma, espera-se que o aluno relacione o número de triângulos com a interação n por meio da expressão Nº de $\Delta = 3^n$.**

No século XVI, o matemático alemão Michael Stifel utilizou uma tabela como essa para efetuar multiplicações. Nessa época, das grandes navegações e do pleno desenvolvimento da Astronomia, o uso da trigonometria para o estudo da Astronomia exigia uma necessidade de precisão de cálculo com números bastante grandes com oito ou mais casas decimais. Isso certamente dava muito trabalho, pois era preciso multiplicar, dividir e extrair raiz quadrada desses números.

A brilhante ideia de Stifel consiste na organização de uma tabela que associa duas sequências numéricas. Vamos utilizar a tabela, que construímos juntos, para entender melhor como podemos obter o resultado das multiplicações.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 | 177147 | 531441 | 1594323 |

7) Efetue as seguintes operações e veja se você percebe algum padrão, observando a tabela:

a) 2187 X 27 =

b) 6561 X 243 =

c) 177147 ÷ 6561 =

**Neste momento é importante verificar se os alunos estão identificando os números da primeira linha da tabela como os expoentes, quando os números correspondentes na segunda linha são escritos como potência de 3.**

**Os alunos deverão encontrar 59049 como produto de 2 187 por 27 e observar, na tabela, que os números da 1ª linha correspondentes a 2 187 e 27são, respectivamente 7 e 3 e que o número correspondente a 59049 é 10 e, ainda, que 3 + 7 = 10.**

**Resumindo, deverão perceber que:**

$3^3 x 3^7 = 3^{3+7} = 3^{10}$

$3^{11} \div 3^8 = 3^{11-8} = 3^3$

**Talvez seja preciso revisar com os alunos as propriedades das potências usadas acima.**

8) Agora, lembrando do que você aprendeu, utilize a tabela para efetuar as seguintes multiplicações e divisões:

a) 59049 ÷ 6561 =

b) 243 x 729 =

c) 2187 x 81 =

d) 531541 ÷ 19683 =

As ideias de Stifel certamente influenciaram o matemático e teólogo escocês John Napier (1550-1617) na criação dos logaritmos.

O termo logaritmos também foi inventado por Napier e é a combinação de duas palavras gregas – logos e arithmos – a primeira significa razão e a segunda significa número.

A grande percepção de Stifel e Napier foi a observação de que o trabalho com o expoente dos números, quando escritos na forma de potência, se torna bastante simples.

Assim,

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $3^0$ | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ | $3^7$ | $3^8$ | $3^9$ | $3^{10}$ | $3^{11}$ | $3^{12}$ | $3^{13}$ |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 | 177147 | 531441 | 1594323 |

Como, em nosso exemplo, a base das potências é 3, dizemos que:

- ✓ 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja, $\log_3 9 = 2$;
- ✓ 5 é o logaritmo de 243 na base 3, ou seja, $\log_3 243 = 5$;
- ✓ 10 é o logaritmo de 59049 na base 3, ou seja, $\log_3 59049 = 10$;
- ✓ 13 é o logaritmo de 1594323 na base 3, ou seja, $\log_3 1594323 = 13$.

9) A partir dessas informações, preencha a seguinte tabela:

| | |
|---|---|
| $\log_3 531441 =$ ______ | O logaritmo de 81 na base 3 é _________ |
| O logaritmo de 177147 na base 3 é _________ | $\log_3 6561 =$ ______ |
| $\log_3 729 =$ ______ | O logaritmo de 3 na base 3 é _________ |

10) Complete a tabela logarítmica abaixo com as potências de base 2 e responda às seguintes questões:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 2 | 4 | | | | | | | | | | | |

a) O logaritmo de 256 na base 2 é _________

b) 512 x 16 = _________

c) $\log_2 1024 =$ ________

d) 32 x 256 = ________

e) O logaritmo de 2048 na base 2 é _________

f) $\log_2 4096$ = _______

g) 4096 ÷ 256 = ___________

**Fique atento se os alunos conseguem responder às questões com base nas explicações já realizadas até aqui.**

11) E se fizermos uma tabela logarítmica com as potências de base 1? Complete a tabela abaixo e veja o que acontece:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |

12) Qual é o valor de $\log_1 1024$ ? O que você conclui? Converse com seu colega.

**Espera-se que o aluno perceba que não há $\log_1 1024$, pois não é possível escrever 1024 como potência de 1, e que isso se aplica a qualquer número diferente de 1, pois 1 elevado a qualquer expoente é igual a 1. E, assim, conclua que, dentro da construção do conceito de logaritmo realizada, não faz sentido trabalhar com logaritmo na base 1.**

**Generalizando, temos que:**

Dados dois números reais positivos *a* e *b*, com a ≠ 1 se b = $a^c$, então o expoente *c* chama-se logaritmo de *b* na base *a*.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com *a* e *b* positivos e a ≠ 1.

Desta forma, podemos calcular logaritmos de qualquer número real positivo em qualquer base real positiva diferente de um.

Temos, por exemplo, que $\log_5 25 = 2$ pois $5^2 = 25$, ou o logaritmo de 64 na base 4 é 3 pois $4^3 = 64$.

## Exercícios de fixação do livro didático para explorar o conceito de logaritmo.

# Atividade 2

**HABILIDADE RELACIONADA:**

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

**PRÉ-REQUISITO:** Conceito de logaritmo.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em dupla, de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

**OBJETIVOS:** Conhecer e operacionalizar as propriedades do logaritmo.

**METODOLOGIA:**

**Distribuir para os alunos a atividade abaixo e seguir o roteiro.**

Já vimos que os logaritmos foram criados para solucionar problemas de cálculos com números que possuem muitas casas decimais. Com o advento da tecnologia e mais especificamente dos computadores, os problemas em efetuar esses cálculos já estão satisfatoriamente solucionados.

No entanto, se nos dias de hoje, os logaritmos não são mais usados para a realização de cálculos outrora tão trabalhosos, são utilizados na resolução de diversos problemas nas mais diferentes áreas do conhecimento, desde Economia e Finanças até Geologia, Física e Química.

Vamos pensar no seguinte problema e entender como o conceito de logaritmo pode ser importante para a resolução de problemas atuais.

Uma pessoa deposita um determinado capital na caderneta de poupança. A taxa de capitalização mensal da caderneta é de 0,5% a.m. Supondo que a taxa de capitalização permaneça constante, depois de quanto tempo o montante será o dobro do capital inicial investido na caderneta de poupança?

**Os alunos podem aplicar a ideia de juros simples para resolver essa situação, dividindo 100% por 0,5% e encontrando a resposta incorreta de 200 meses. Fique atento para essa situação e oriente os alunos, lembrando-os de que esse caso é trabalhado no sistema financeiro dentro da estrutura de juros.**

**Conhecendo a dificuldade que os alunos têm para resolver um problema como esses, será interessante que você oriente os alunos a seguir o roteiro abaixo:**

Vamos tentar resolver o problema, pensando inicialmente em algumas questões?

1) Se eu tenho um determinado capital *C*, por quanto devo multiplicar esse capital para obter o capital acrescido de 30%?

2) E se eu quiser o meu capital inicial *C* acrescido de 7%, por quanto devo multiplicar o capital inicial para obter o acréscimo desejado?

3) Imaginemos agora que todo mês o meu capital sofra um acréscimo de 20% sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de 1 mês? E de 2 meses ? E de 3 meses? E se forem *n* meses?

4) E se, de forma genérica, o meu acréscimo fosse de i% sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de *n* meses?

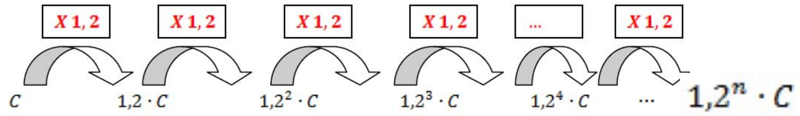
**É possível que o aluno tenha dificuldades para responder às questões acima. Por isso, será necessário intermediar.**

**Espera-se que o aluno entenda que, se queremos que um capital C seja acrescido de 30%, então, o que precisamos calcular é 130% de C (C acrescido de 30% de C). Como $130\% = \frac{130}{100}$, temos que a resposta será 1,30 . C.**

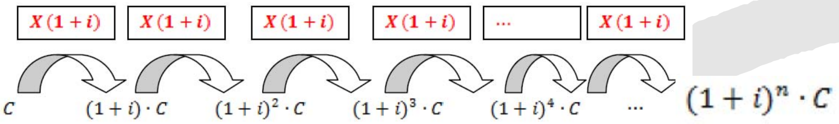
**Similarmente, um acréscimo de 7% sobre o capital inicial C será dado por 1,07 . C.**

**Nesse raciocínio, de forma geral, um acréscimo de i% sobre o Capital Inicial C será dado por (1 + i) . C.**

**Por outro lado, seguidos acréscimos de 20% sobre o montante imediatamente capitalizado pode ser entendido por meio do seguinte esquema:**




**Dessa maneira, de forma geral, em sucessivos acréscimos de i% sobre o montante capitalizado, gera o montante final C . $(1 + i)^n$, conforme o esquema abaixo:**




5) Tente escrever a equação que modela o nosso problema. Se necessário, releia-o.

**Espera-se que, após a realização dessas atividades e releitura do problema, o aluno chegue a seguinte equação: C . $1{,}005^n$ = 2 . C**

Você deve ter observado que para resolvermos nosso problema devemos resolver a equação $C.1{,}005^n = 2.C$ . Repare ainda que a incógnita encontra-se no expoente, o que dificulta a resolução.

Contudo, com a utilização dos logaritmos podemos resolver esse problema. Para isso, vamos juntos fazer algumas deduções:

Os logaritmos foram criados como um instrumento para efetuar cálculos a partir da associação entre duas sequências numéricas. Lembremos que essa ideia simples e ao mesmo tempo genial permite encontrarmos um produto entre dois números a partir da soma de outros dois números correspondentes, da mesma forma que, encontramos o quociente entre dois números a partir da subtração de números correspondentes.

Observe a tabela abaixo:

| $\log_2 b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

Note que, para encontrarmos o produto 4 x 32, deveríamos encontrar na 1ª linha os números correspondentes a 4 e 32 na tabela, que são respectivamente _**2**__ e _**5**__.

OBS: ___$\log_2 4 = 2$____ e ___$\log_2 32 = 5$____.

Para finalmente achar o produto almejado, deve-se fazer ___$\log_2 4$____ + ___$\log_2 32$____ e identificar o número correspondente a essa soma na 2ª linha da tabela, que será o resultado esperado.

De igual forma, para encontramos o quociente da operação 256 ÷ 16, localizamos os números correspondentes a 256 e 16 na 1ª linha da tabela, que, nesse caso, são respectivamente _**8**__ e _**4**__.

OBS: ___$\log_2 256 = 8$____ e ___$\log_2 16 = 4$____.

Para finalmente achar o quociente almejado, deve-se fazer ___$\log_2 256$____ - ___$\log_2 16$____ e identificar o número correspondente a essa subtração na 2ª linha da tabela, que será o resultado esperado.

Fica claro que o conceito de logaritmo, de alguma forma, é capaz de transformar um produto em uma soma e um quociente em uma subtração.

Nos exemplos acima, temos:

$\log_2(4\,.\,32) = 7$ e $\log_2 4 + \log_2 32 = 7$

$\log_2(256 \div 16) = 4$ e $\log_2 256 - \log_2 16 = 4$

Isso nos leva a conjecturar que:

$\log_2(4\,.\,32) = \log_2 4 + \log_2 32$

$\log_2(256 \div 16) = \log_2 256 - \log_2 16$

De forma geral, dados a, b, c números reais positivos com a ≠ 1, temos que:

$$\boxed{\log_a(b\,.\,c) = \log_a b + \log_a c} \text{ e } \boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Outra propriedade importantíssima para os cálculos com logaritmo se refere ao logaritmo de uma potência. Dados a, b números reais positivos, com a ≠ 1 e n ∈ R, temos:

$\log_a b^n = n.\log_a b$

Assim sendo, podemos resolver o nosso problema.

Já que a equação $C.1{,}005^n = 2.C$ , com $C > 0$, modela o problema proposto, podemos dividir ambos os lados da igualdade, o que gera:

$$1{,}005^n = 2$$

Mas algumas questões surgem:

a) Sobre qual base devemos considerar o logaritmo?

b) Nas calculadoras científicas só existem o logaritmo de base 10 e de base ***e***, sobre qual dessas bases posso calcular o logaritmo?

Vamos escolher os valores: $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 1{,}005 = 0{,}0021$.

Como proceder, então?

Essas perguntas podem ser respondidas quando conhecemos a seguinte propriedade:

> Mudança de Base: sejam a, b, c números reais positivos com a, c ≠ 1 então $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

Agora, vamos juntos concluir a resolução do problema:

$1{,}005^n = 2$

$\log_a 1{,}005^n = \log_a 2$

$n.\log_a 1{,}005 = \log_a 2$

$$n = \frac{\log_a 2}{\log_a 1{,}005}$$

**Fazendo a = 10, temos:** $n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}005}$ **, ou seja,** $n = \frac{\log 2}{\log 1{,}005} \cong \frac{0{,}3010}{0{,}0021} \cong 143{,}33$

**Portanto, nas condições dadas no problema, após 144 meses teremos como montante o dobro do capital inicial investido.**

## <u>Exercícios de fixação do livro didático para explorar as propriedades dos logaritmos.</u>

# Atividade 3

**HABILIDADE RELACIONADA:**
H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

**PRÉ-REQUISITO:** Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, Definição de Logaritmo, Função Exponencial.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em duplas, de forma a propiciar um trabalho colaborativo .

**OBJETIVOS:** Reconhecer a função logarítmica como a inversa da exponencial.

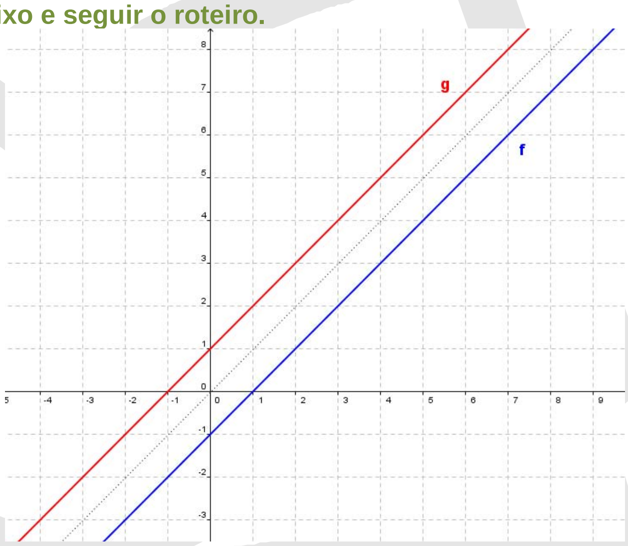
**METODOLOGIA:**
**Distribuir para os alunos a atividade abaixo e seguir o roteiro.**

1) Observe os gráficos das funções *f* e *g* na figura ao lado:

2) Preencha as tabelas abaixo com as coordenadas de alguns pontos das funções *f* e *g*.

| x | y = f(x) |
|---|---|
| -1 | -2 |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

| x | y = g(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |




3) Compare as coordenadas dos pontos das funções *f* e *g*. O que você percebe com relação a f(2) e g(1)? E com relação a f(3) e g(2)? De forma geral, se f(a) = b, qual seria o valor de g(b)?

**Espera-se que o aluno perceba a relação inversa entre as coordenadas dessas funções. Assim, se (a,b) pertence ao gráfico de então pertence ao gráfico de f então (b,a) pertence ao gráfico de g. É preciso intermediar nesse processo, analisando outros pontos em *f* e *g* para ajudar os alunos.**

**Outro fator importante nessa atividade é que ela servirá de diagnóstico para conhecer as dificuldades dos alunos na interpretação desses gráficos. Auxilie-os chamando a atenção deles para as principais relações existentes entre eles.**

Você deve ter percebido que, em nosso exemplo, se (b,c) pertence ao gráfico de *f*, então (c,b) pertence ao gráfico de *g*. Sabemos que, se isso acontece sempre dentro de determinadas condições, as funções *f* e *g* são chamadas funções inversas. Assim, se f(b) = c, então g(c) = b.

4) Agora, preencha as tabelas abaixo com as coordenadas das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ .

| x | $y = f(x) = 2^x$ | | x | $y = g(x) = \log_2 x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | 1 | 0 |
| 1 | | | 2 | |
| 2 | | | 4 | |
| 3 | | | 8 | |
| 4 | | | 16 | |
| 5 | | | 32 | |
| 6 | | | 64 | |

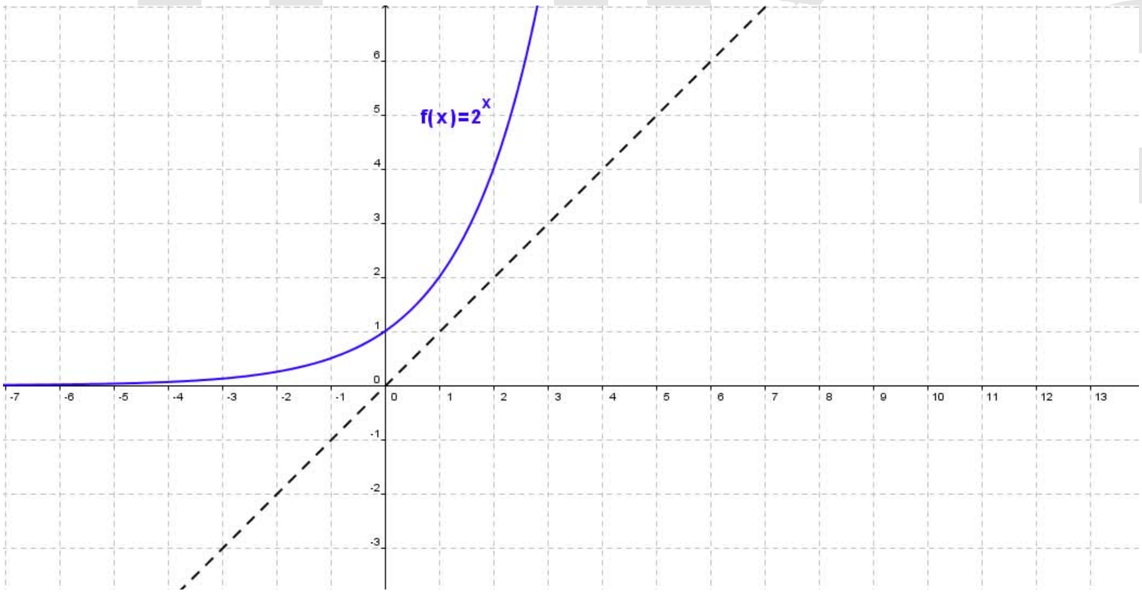
5) Observe os resultados nas tabelas. O que você percebe em relação às coordenadas dos pontos de funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$ ?

**Espera-se que até aqui o aluno tenha condições de perceber a relação inversa existente entre a função exponencial e a logarítmica.**

Considerando *a*, *b* e *c* números reais positivos, com a $\neq$ 1 e com base no que foi visto até agora, já podemos definir que $f(x) = a^x$ **e** $g(x) = \log_a x$ **são funções inversas**.

Agora, vamos construir o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial?

6) Observe o gráfico abaixo. Nele estão plotados os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $y = x$. Lembrando-se da simetria existente entre o gráfico de duas funções inversas, faça um esboço do gráfico da função inversa de $f(x) = 2^x$, nesse mesmo plano cartesiano.




**Exercícios de fixação do livro didático para explorar o conceito de funções inversas com logaritmo e exponencial.**

# Atividade 4

**HABILIDADE RELACIONADA:**

H64 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica

**PRÉ-REQUISITO:** Função Logarítmica.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica, computador com software Geogebra instalado e data-show.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Turma disposta em duplas, de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

**OBJETIVOS:** Interpretar, e representar, o gráfico da Função Logarítmica, seus intervalos de crescimento e decrescimento.

.

**METODOLOGIA:**

**Distribuir para os alunos a atividade abaixo e seguir o roteiro. Será necessário o uso do software Geogebra, com arquivo Geogebra "Gráfico_função_log.ggb" e o data-show.**

Nesta atividade iremos explorar o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ e descobrir suas principais características.

**Usando o data-show, abra o arquivo Geogebra "Gráfico_função_log.ggb".**

1) Qual o aspecto da função logarítmica quando o professor varia os valores de *a* no seletor?

2) Para quais valores de *a* o aspecto da função logarítmica é o mesmo? Movimentando os valores de a, em que instante a função muda de aspecto?

**Espera-se que os alunos percebam que o gráfico da função logarítmica tem o mesmo comportamento quando a > 1 e que o comportamento da função muda completamente quando os valores de estão entre 0 e 1, ou seja, 0 < a < 1.**

**Peça a eles que registrem por escrito essa observação, ou seja, que quando a > 1 o comportamento da função logarítmica permanece o mesmo e que, quando 0 < a < 1, o seu comportamento muda.**

3) O professor irá selecionar a = 2. Em seguida ele irá movimentar o ponto A até x = 1, x = 2, x = 3 e assim por diante. Preencha a tabela ao lado.

| x | $f(x) = \log_2 x$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |

4) O que está acontecendo com os valores de x? E com os valores de f(x)?

**Se os alunos tiverem dificuldades para preencher a tabela, faça a intermediação, lembrando-os de olhar as coordenadas do ponto P. Espera-se aqui que visualizem que à medida que os valores de aumentam, os valores de f(x) aumentam também.**

5) A função $f(x) = \log_2 x$ é crescente ou decrescente? Converse com seu colega e veja se chegaram a mesma conclusão. Explicite um argumento que justifique a sua resposta.

6) Se o professor escolher outro valor para *a*, mantendo a > 1, você chegaria a mesma conclusão? O que podemos então afirmar sobre o comportamento da função $f(x) = \log_a x$, quando a > 1?

**Movimente o seletor *a*, aumentando e diminuindo gradativamente seu valor para que os alunos possam responder essa questão.**

**Caso seja necessário, revise com os alunos sobre o que seria uma função crescente.**

**Dessa forma, espera-se que o aluno conclua que a função $f(x) = \log_a x$ é crescente quando a > 1.**

7) Vamos preencher essa outra tabela, agora fazendo 0 < a < 1. Para isso o professor irá usar $a = \frac{1}{2}$ . Em seguida ele irá movimentar o ponto A até x = 0,1, x = 0,2, x = 0,3 e assim por diante.

| x | $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ |
|---|---|
| 0,1 | |
| 0,2 | |
| 0,3 | |
| 0,4 | |
| 0,5 | |
| 0,6 | |
| 0,7 | |

8) O que está acontecendo com os valores de x? E com os valores de f(x)?

9) A função $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ é crescente ou decrescente? Converse com seu colega e veja se chegaram a mesma conclusão. Explicite um argumento que justifique a sua resposta.

10) Se o professor escolher outro valor para *a*, mantendo 0 < a < 1, você chegaria a mesma conclusão? O que podemos então afirmar sobre o comportamento da função $f(x) = \log_a x$, quando 0 < a < 1?

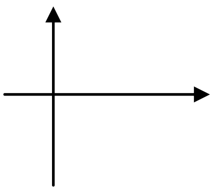
**Verifique se os alunos reconhecem e definem uma função decrescente. Caso isso não aconteça, revise esse conteúdo com eles:**

**Uma função *f* é decrescente, se à medida que $x_0 > x_1$ sempre tivermos $f(x_0) < f(x_1)$.**

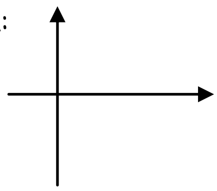
**Dessa forma, esperamos que o aluno conclua que a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente quando 0 < a < 1.**

11) Para resumirmos o que aprendemos, preencha os espaços em branco nas afirmações a seguir:

- ✓ Quando a > 1, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ será ________________ e terá a forma:



- ✓ Quando 0 < a < 1, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ será ________________ e terá a forma:



**Exercícios de fixação do livro didático para explorar o conceito de funções inversas com logaritmo e exponencial.**

# Atividade 5

**HABILIDADES RELACIONADAS:**

H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

H59 - Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

H64 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica

H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

**PRÉ-REQUISITOS:** Função Logarítmica, Função Exponencial.

**TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Folha de atividades, caneta, lápis e borracha.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em dupla.

**OBJETIVOS:** Resolver problemas significativos utilizando Função Logarítmica, inclusive questão antigas do Saerjinho.

**METODOLOGIA:**

**Distribuir para os alunos as atividades abaixo.**

Questão 1)


A Lei 12.760/12, sancionada pela presidenta Dilma Rousseff no fim de dezembro, ampliou a gama de dispositivos de fiscalização e regulamentou penas mais severas a quem mistura direção e bebida alcoólica.

A medida diminuiu a tolerância para o resultado do teste do etilômetro, que "deve ser priorizado" em fiscalizações de "procedimento operacional rotineiro dos órgãos de trânsito", segundo indicação do Contran.

O limite para que o motorista seja liberado sem enfrentar pena administrativa – punida com pagamento de multa de R$ 1.915,40, perda de sete pontos na carteira de habilitação, retenção do veículo até a apresentação de um condutor habilitado e suspensão do direito de dirigir por até 12 meses – caiu de 0,1 mg/L de álcool no ar expelido para 0,05 mg/L.

Quem estiver guiando com concentração acima de 0,34 mg/L comete crime de trânsito, e além das medidas administrativas, são punidos com detenção de seis meses a três anos. A nova norma também regulamentou que motoristas que forem submetidos a exame de sangue não poderão conter qualquer concentração de álcool, e que esse teste passa a ser obrigatório para vítimas fatais de acidentes. Segundo o ministro, a política de "tolerância zero" vai ajudar a trazer mais segurança nas ruas e estradas do país.

Fonte: http://www.operacaoleisecarj.rj.gov.br/contran-normatiza-regras-da-nova-lei-seca/

Suponha que uma pessoa tenha em determinado momento 2,5 g/L de álcool no sangue e que esse valor decresça de acordo com a função $f(x) = 2{,}5 \, . \, 2^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$, em que t é o tempo em horas. Após parar de beber, quantas horas no mínimo são necessárias para que essa pessoa tenha 0,05 g/L de álcool no sangue?

**Solução:**

$$2{,}5 \, . \, 2^{\left(-\frac{t}{2}\right)} = 0{,}05 \Rightarrow 2^{\left(-\frac{t}{2}\right)} = 0{,}02 \Rightarrow 2^{\left(-\frac{t}{2}\right)} = 2^{-10} \Rightarrow -\frac{t}{2} = -10 \Rightarrow t = 20\text{ h}$$

Questão 2) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$, com h(t) em metros e t em anos.

Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, qual foi o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

**Solução:**

$1,5 + \log_3(t+1) = 3,5 \Rightarrow \log_3(t+1) = 2 \Rightarrow 3^2 = t + 1 \Rightarrow t = 9 - 1 \Rightarrow t = 8 \text{ anos}$

Questão 3) Paulo aplicou R$ 800,00 num investimento que rende 3% a.m., a juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o saldo será de R$ 1.200,00?

Dados: $M = C\,(1 + i)^t$ , $\log 1{,}5 = 0{,}1761$ e $\log 1{,}03 = 0{,}0128$ .

**Solução:**

Temos que: $M = 1200$, $C = 800$, $i = 3\% = 0{,}03$

$M = C(1+i)^t \Rightarrow 1200 = 800(1+0,03)^t \Rightarrow 1,5 = 1,03^t \Rightarrow \log 1,5 = \log 1,03^t \Rightarrow \log 1,5 =$
$t \, . \log 1,03 \Rightarrow t = \frac{\log 1,5}{\log 1,03} \Rightarrow t \cong 13,75 \text{ meses}$

Resposta: O saldo será de R$ 1200,00 após 13 meses e 22 dias, aproximadamente.

Questão 4)

Os recordes que a Apple bate ano após ano na venda de seus produtos como o iPod significam também que cada dia mais pessoas estão conectadas a seus fones de ouvido.

Entretanto, a popularização desse acessório preocupa especialistas que afirmam que o uso excessivo do fone pode resultar em perda auditiva leve ou, em casos mais graves, em surdez.

O uso do fone de ouvido é prejudicial quando ele ultrapassa os níveis saudáveis para o aparelho auditivo. Quando a medida de som – o decibel – vai além dos 80 é hora de começar a ficar alerta, como explica o otorrinolaringologista Salomão Caruí.

A altura recomendada é a metade do volume máximo emitido pelo aparelho. Uma dica prática é perguntar às pessoas próximas se estão escutando o som que sai pelo seu fone de ouvido. Se sim, é melhor baixar o volume.

Segundo a sociedade Brasileira de Otologia, a 85 decibéis, o tempo máximo de exposição por dia é de oito horas. Conforme o volume aumenta, o tempo de exposição tem de ser reduzido. A 115 decibéis, por exemplo, que seria ficar na balada perto da caixa de som, a exposição não deve ultrapassar os sete minutos.

**Níveis de Ruído em Decibels**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Conforto Acústico | Muito baixo | 0 dB | | Limiar do som | |
| | | 5 dB | Passarinho | | |
| | | 10 dB | Cochicho | | |
| | | 15 dB | Torneira | | |
| | | 20 dB | Conversa | | |
| | Baixo | 25 dB | Relógio | | |
| | | 30 dB | Biblioteca | Limite para o sono | |
| | | 35 dB | Enfermaria | | |
| | | 40 dB | | | |
| | Moderado | 45 dB | | | |
| | | 50 dB | Aspirador de pó | | |
| | Moderado | 55 dB | Bebê chorando | Irritação | |
| | Moderado Alto | 60 dB | | Irritação aumenta consideravelmente | |
| Riscos de Danos à Saúde | Moderado Alto | 65 dB | Cachorro latindo | | |
| | | 70 dB | | | |
| | | 75 dB | Sala de aula | | |
| | | 80 dB | Piano | | |
| | Alto | 85 dB | Telefone tocando | Tolerâncias diárias de exposição | 8 h |
| | | 90 dB | Secador de cabelos | | 4 h |
| | | 95 dB | Moto | | 2 h |
| | | 100 dB | Cortador de grama | | 1 h |
| | Muito alto | 105 dB | Caminhão | | 30 min |
| | | 110 dB | Pátio no intervalo das aulas | | 15 min |
| | | 115 dB | Banda tocando | | 7 min |
| | | 120 dB | Tiro | | |
| | | 125 dB | Auto-falante | | |
| | | 130 dB | Britadeira | | |
| | | 135 dB | Avião | | |
| | | 140 dB | | | |

Um dos mitos em relação ao fone de ouvido é que o fone de inserção (pequeno colocado dentro da orelha) seria pior que o de oclusão (externo). Na verdade os dois são prejudiciais, como acrescenta Salomão.

Os menores, por estarem em contato direto com o canal auditivo, podem agredir mais, mas tudo depende da equação formada pelo tempo de exposição e a altura do som, se a soma for negativa, ambos farão mal.

Um dos primeiros sintomas de que algo não vai bem com o aparelho auditivo é o tinnitus, o conhecido — e chato — zunido. Se você tem problemas para escutar o que alguém diz, em um tom normal de voz, estando em um ambiente com pouco ruído, é aconselhável procurar um fonoaudiólogo e diminuir imediatamente a intensidade do uso do fone.

Felizmente, o uso do fone de ouvido não é somente prejudicial. Desde que utilizado na medida certa, ele pode trazer diversos benefícios para a saúde e o bem-estar. O fone é um excelente aliado para te ajudar a relaxar em momentos de estresse no trabalho ou para aumentar seu pique na hora da malhação.

Fonte: [http://noticias.r7.com/saude/cuidado-com-fones-de-ouvido-voce-pode-ficar-surdo-10092012](http://noticias.r7.com/saude/cuidado-com-fones-de-ouvido-voce-pode-ficar-surdo-10092012)

O ouvido humano pode perceber uma extensa faixa de intensidades de ondas sonoras (som), desde cerca $10^{-12}$ w/m$^2$ ( que se toma usualmente como o limiar de audição) até cerca de 1 w/m$^2$ (que provoca a sensação de dor na maioria das pessoas). Usa-se uma escala logarítmica para descrever o nível de intensidade de uma onda sonora. O nível de intensidade $G$ medido em decibéis (db) se define por $G = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ , onde I é a intensidade do som.

a) Calcule nessa escala, o limiar de audição.

b) Calcule nessa escala, o limiar de audição dolorosa.

**Solução:**

**a) No limiar da audição a intensidade do som (em w/m$^2$) é I = $10^{-12}$ . Então, o nível (em db) é :**

$G = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10\log 1$. **Como log 1 = 0 segue que G = 0 decibéis.**

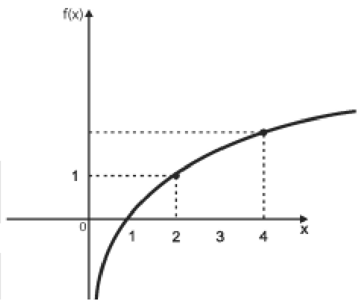
**b) No limiar da dor a intensidade do som (em w/m$^2$) é I = 1, Assim,** $G = 10\log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 10\log 10^{12}$. **Como** $\log a^b = b\,.\log a$ **e** $\log 10 = 1$, **vem que** $G = 120\log 10 = 120$ **decibéis.**

Questão 5)

(M110056B1) Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2.

Qual é o valor de f(x) para x igual 4?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6



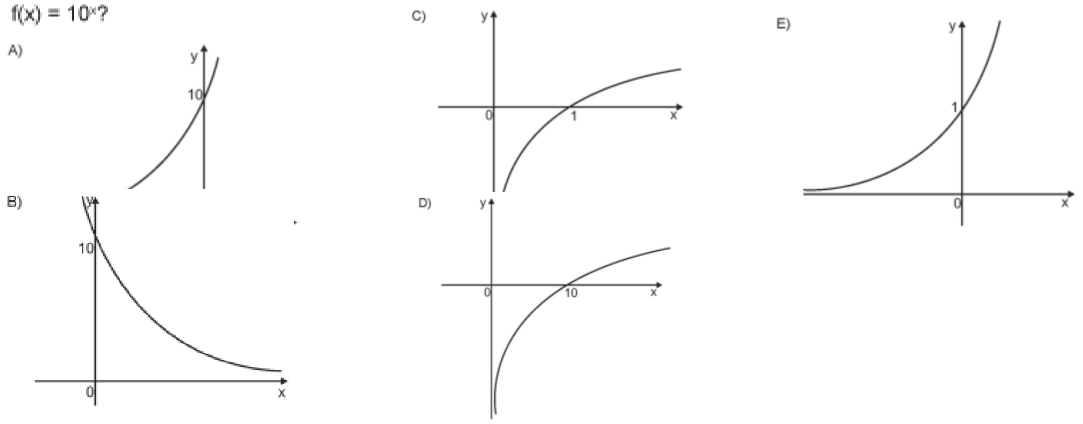

Questão 6)

(M120459B1) Dados *log* 2 = 0,301 e *log* 3 = 0,477, qual é o valor do *log* 12?

A) 0,043
B) 0,287
C) 0,567
D) 1,079
E) 2,778

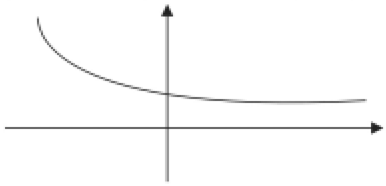
Questão 7)

(M110057B1) Qual é o gráfico que melhor representa a função inversa da função f : IR → IR$^*_+$, definida por f(x) = $10^x$?



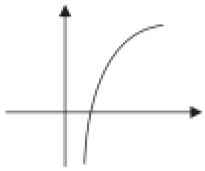
Questão 8)

(PAMA11096AC) O gráfico abaixo representa a função exponencial $y = b^x$, onde b é uma constante.

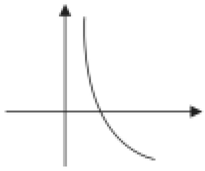


Dentre os esboços abaixo, o que melhor representa o gráfico da função $y = \log_b{}^x$ é

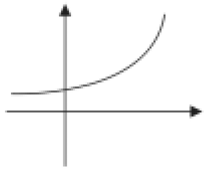
A)



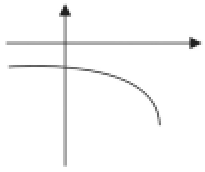
B)



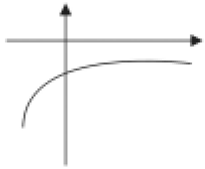
C)



D)



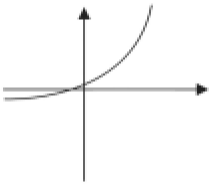
E)



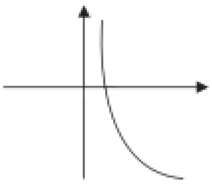
Questão 9)

(M120037A9) Sendo $f(x) = a^x$, com $a > 0$, o gráfico que melhor representa a função $f^{-1}(x)$ é

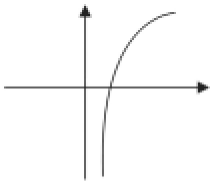
A)



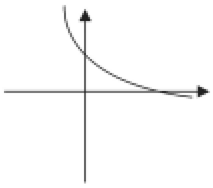
B)



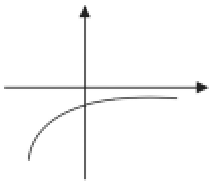
C)



D)



E)



Questão 10)

(PAMA11097AC) A função inversa da função exponencial definida por $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

A) $y = 2^x$

B) $y = \log_2 x$

C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

D) $y = 2x$

E) $y = x^{\frac{1}{2}}$

**GABARITO: 5 – B; 6 – D; 7 – C; 8 – B; 9 – C ; 10 - C**

# AVALIAÇÃO

O processo de avaliação é um dos momentos mais importantes no processo de ensino-aprendizagem, pois é neste momento que o professor tem condições de detectar os problemas que os alunos vêm enfrentando e, assim, poder ajudá-los.

Por isso é de extrema importância que a avaliação se dê a todo o momento. Tanto na hora da explicação do conteúdo, com a participação do aluno, através de questionamentos à turma, inclusive nominalmente quando for preciso, quanto indo de mesa em mesa, observando as dificuldades que eles enfrentam na realização dos exercícios, orientando-os.

Com a Atividade 1 (pg 4 a 7), durante os questionamentos feitos pelo professor, é possível detectar se os alunos estão entendendo os conceitos abordados. O professor também pode escolher, nominalmente, alguns alunos que menos participam, fazendo alguns questionamentos que constem no roteiro apresentado, a fim de perceber se estão entendo ou se têm alguma dúvida.

A Atividade 3 (pg 11 e 12) é um ótimo momento para o professor revisar com os alunos sobre as funções inversas e salientar alguns pontos importantes como crescimento e decrescimento de uma função qualquer, raízes da equação, relação entre ordenada e abscissa, e outros.

A atividade 5 (pg 15) faz-se necessária para detectar as dificuldades dos alunos na resolução de exercícios e problemas envolvendo pirâmides e cones. Quando o professor for corrigir a avaliação, é importante não fazer a correção dos erros diretamente na folha de atividades. Isto precisa ser feito em um novo momento, juntamente com a turma, onde cada aluno poderá ver seu próprio erro e corrigi-lo. O professor precisa pontuar no quadro, além dos erros mais freqüentes, aqueles que também achar de maior relevância.

Outro instrumento capaz de complementar esta avaliação é o Saerjinho. É interessante separar um dia para a correção das suas questões junto com a turma, a fim de que todos possam observar onde estão errando.

# BIBLIOGRAFIA


DOMINGUES, Pâmela. Cuidado com fones de ouvido, você pode ficar surdo! Disponível em: http://noticias.r7.com/saude/cuidado-com-fones-de-ouvido-voce-pode-ficar-surdo-10092012. Acesso em: 12 fev 2013.

FILHO, Sérgio Luiz Marques. A curva de Koch (Fractal Floco de Neve). Disponível em: http://www.batebyte.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1575. Acesso em: 11 fev 2013.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e Aplicações. Ensino Médio - 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 1 v.

OPERAÇÃO LEI SECA. Contran normaliza regras da nova Lei Seca. Disponível em: http://www.operacaoleisecarj.rj.gov.br/contran-normatiza-regras-da-nova-lei-seca/. Acesso em: 14 fev 2013.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática**: Ciência, Linguagem e Tecnologia. Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2011. 1 v.

ROTEIROS DE AÇÃO: Campo Conceitual 1: Função Logarítmica. Projeto Seeduc: Formação Continuada, 2012. Disponível em: www.profetoseeduc.cecierj.edu.br . Acesso em: fev. 2013.

SAERJ: Saerjinho. Disponível em: www.saerjinho.caedufjf/diagnostica/ . Acesso em: 14 fev. 2013.

SOUZA, Joaquim. Coleção Novo Olhar: Matemática. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2012. 1 v.