Cursista; Barbara B dos Santos
Tutor:Paulo Alexandre Alves de Carvalho

Introdução

Este plano de trabalho terá duas etapas: a primeira contemplará as atividades manuais (de construção) com fractais e uso de software, já a segunda contemplará atividades com representação algébrica e geométrica dos logaritmos.

A elaboração se dará com o intuito de fazer com que o aluno consiga construir o conhecimento sobre logaritmos, bem como possa perceber a aplicação destes na solução de situações do seu dia-a-dia.

Diante das dificuldades de compreensão sobre logaritmos, se faz necessário situar os alunos em um contexto histórico, apresentar-lhes através de vídeos situações que os envolvam na solução e ainda, com uso de software propor análise e construção de regularidades e generalizações para enfim, chegar à construção dos conceitos estudados e sanar tais dificuldades.

Desenvolvimento

Etapa 1

- **Duração prevista**: 150 minutos
- **Assunto**: Função Logarítmica
- **Objetivos:**

-Realizar construções de cartões fractais para perceber regularidades que levem à formalização da ideia da tábua de logaritmos;

- Fazer uso do software Illuminations para verificar a construção de diferentes fractais com agilidade e perceber regularidades;

- Conhecer o aspecto histórico da função logarítmica;
- Apresentação do conceito de logaritmo.

- **Pré-requisitos:**

- Conhecimento prévio da organização de dados matemáticos em tabelas;
- Operações elementares com números reais e propriedades das potenciações.

- **Recursos utilizados:**

- Vídeo : A aparição;
- Material de recorte e montagem de cartões fractais;
- Software de criação de fractais;
- Registro das situações no caderno e solução dos problemas através das operações com tábuas de logaritmos;

- **O rganização da classe:** Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo e permitir o uso do laboratório de informática da escola.

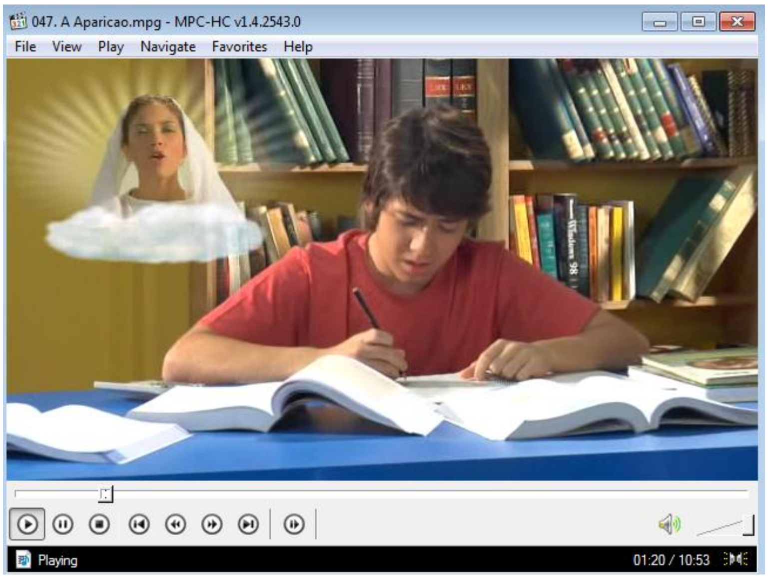
- **Descritores associados:**

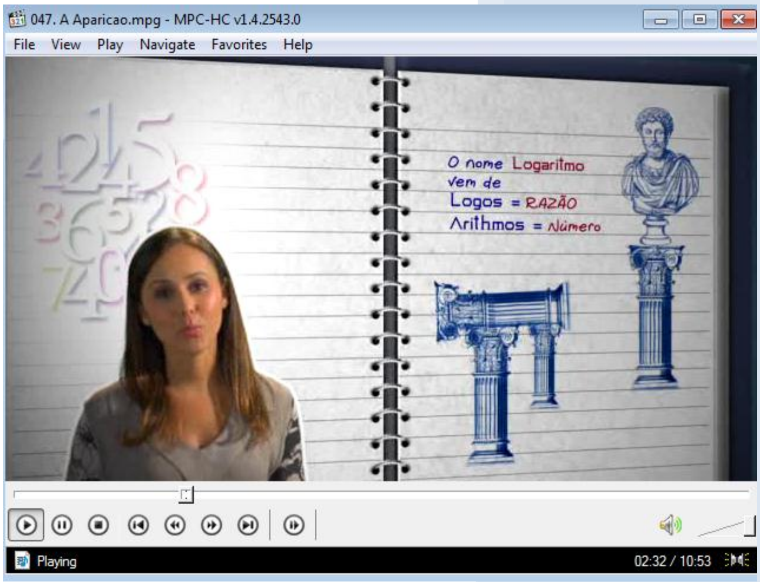
H34 - Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

Distribuição das atividades da Etapa 1

Duração : 100 minutos

Para iniciar a aula, a professora irá propor que os alunos assistam o vídeo : A aparição. Este vídeo trata do aspecto histórico da função logarítmica de forma simples e envolvente. Apresenta Napier e a tábua de logaritmos.

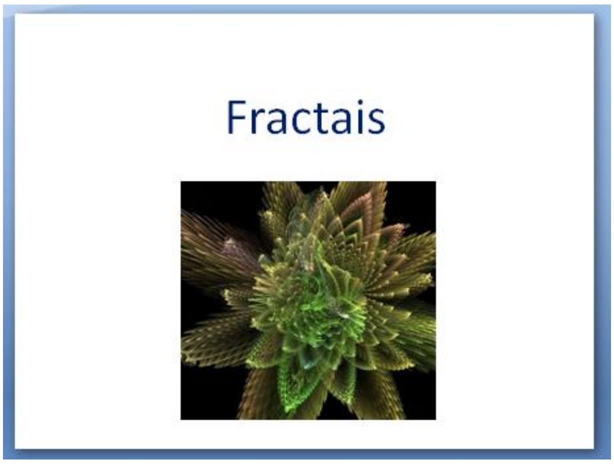


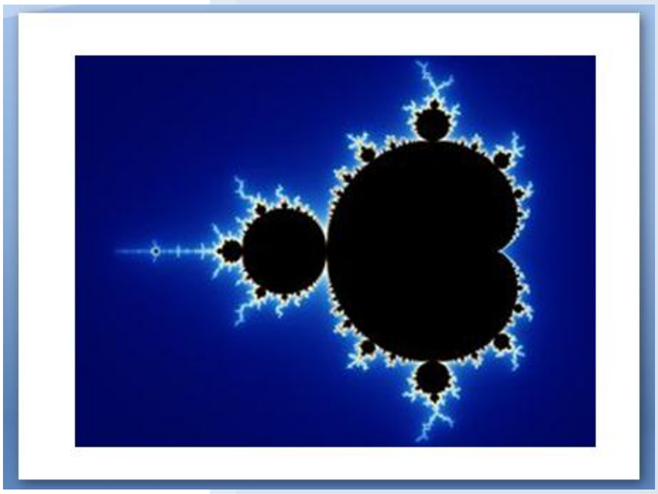


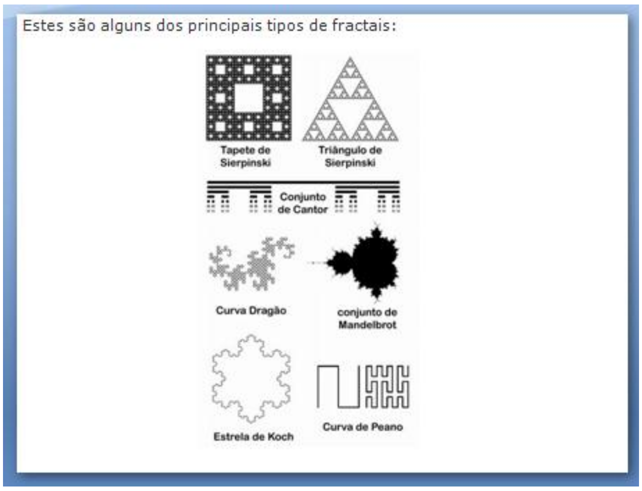
Após o vídeo algumas considerações serão feitas, em especial sobre a utilidade dos logaritmos nas projeções realizadas na Escala Richter, na verificação da idade de um objeto através do método do carbono radioativo, dos fractais, entre outros.

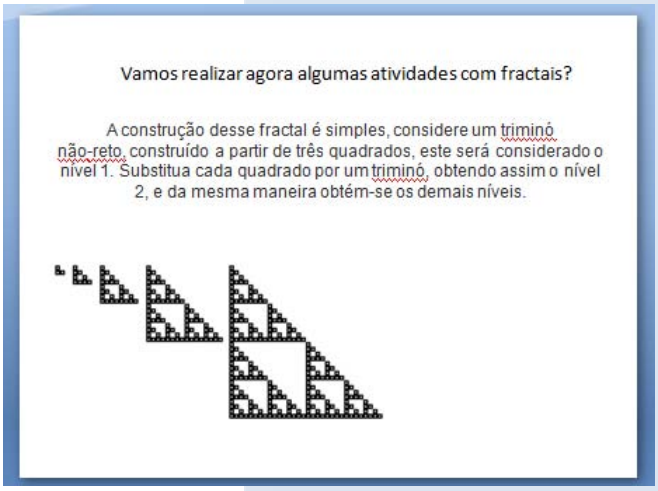
A professora apresentará slides de algumas imagens de fractais no PowerPoint e falará sobre eles, solicitando dos alunos pesquisas futuras sobre o assunto e postagem no fórum a ser proposto no site da professora.

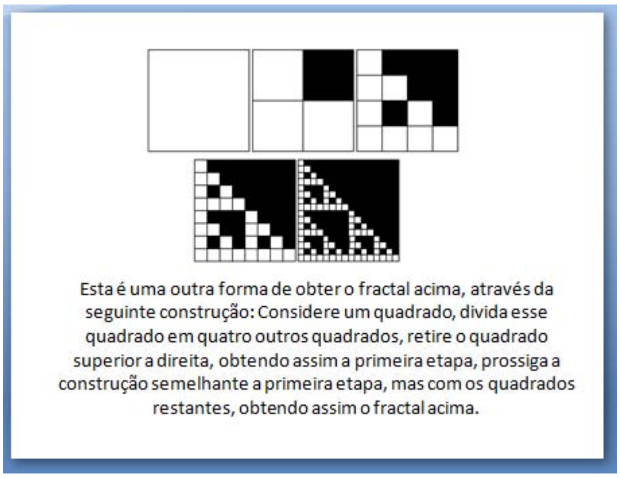
Estes serão os slides usados:

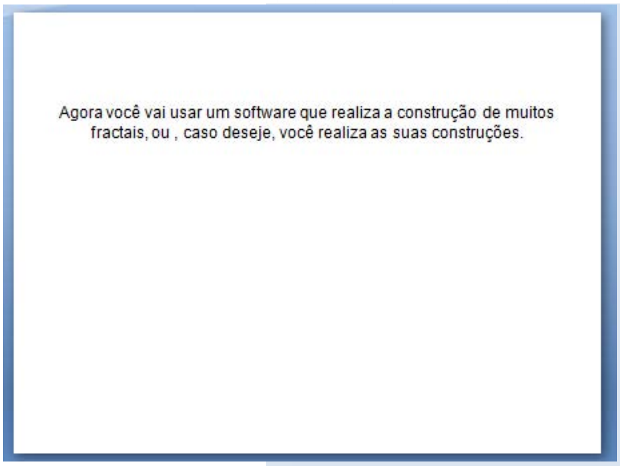












Para acessar o site basta usar o endereço: profbarbara.webnode.pt

Enquanto analisam os slides a professora irá propor a construção de alguns fractais e cartões fractais para que comecem a compreender a ideia de logaritmos.

Modelo de um cartão logaritmo a ser construído.

Primeiramente, distribua uma folha de papel A4 para cada aluno. Acompanhe o processo:

1) Dobre a folha ao meio;

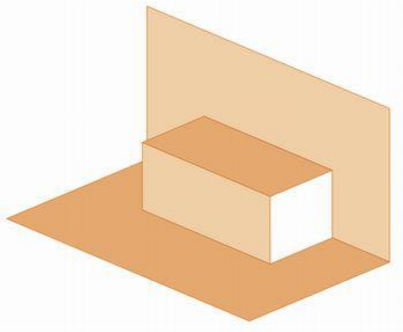
2) Faça dois cortes como na figura;

3) A linha tracejada representa onde será feita uma dobra;

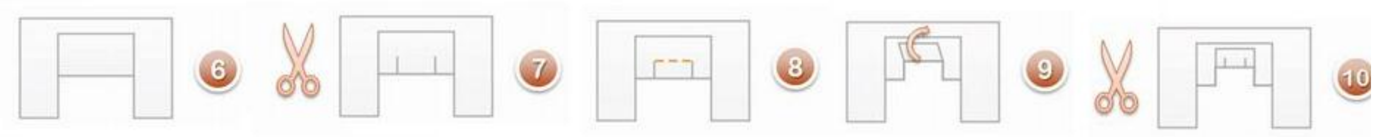
4) Dobre conforme a figura;

5) Esta é a primeira iteração do fractal.

Abra as dobras de maneira que fique como no desenho abaixo



Vamos agora fazer outras iterações:

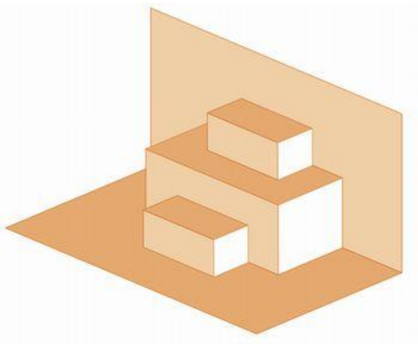


6) Dobre novamente como no último passo da sequência anterior;

7) Faça novamente dois corte como na figura;

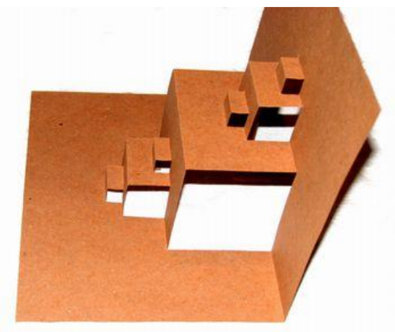
8) Marca da dobra;

9) Dobre conforma a figura (está pronta a segunda iteração);



10) Voltando à dobra anterior pode se fazer o corte para a terceira iteração;

Veja o resultado na foto seguinte



As atividades realizadas são as seguintes:

Colégio Estadual Rio de Areia

Matemática 1° Bimestre	Data: / / 2013
Professor(a): Barbara B S de Andrade	Série 2º ano E.M.

Nome:	N°:	Turma:

Fractais e Logaritmo

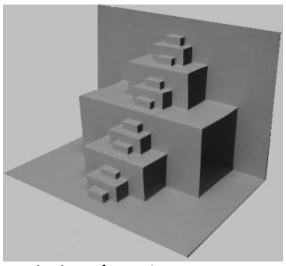
Fractais (do latim *fractus*, fração, quebrado) são figuras de uma geometria, elaborada pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, diferente da que estudamos convencionalmente nas escolas (a Geometria Euclidiana). Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais com a presença de características semelhantes ao objeto original. Os mais conhecidos são auto-similares, independem de escala e podem ser gerados por um padrão matemático repetido n vezes.

A geometria fractal é usada para descrever muitas situações onde a Geometria Euclidiana "encontra" dificuldades por conta da complexidade a ser considerada. O contorno dos litorais, nuvens, relevo, montanhas, turbulências, árvores, crescimento de populações, vasos sangüíneos, brônquios e bronquíolos podem ser descritos utilizando as propriedades dos fractais.

<u>Atividades</u>

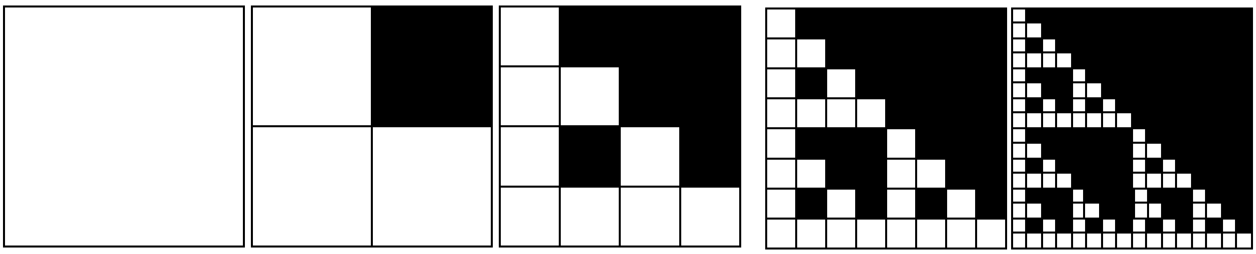
1) Após a construção do cartão fractal, vamos fazer uma pequena investigação e descobrir o número de paralelepípedos a cada iteração. Para tal, preencha a tabela abaixo:

Iteração	0	1	2	3	4	5	6
Nº de paralelepípedos novos	1	2	4				



2) Você seria capaz de escrever uma fórmula que relacione o número de paralelepípedos na n-ésima iteração?

3) Considere um quadrado, divida esse quadrado em quatro outros quadrados, retire o quadrado superior a direita, obtendo assim a primeira etapa, prossiga a construção semelhante a primeira etapa, mas com os quadrados restantes, obtendo assim o fractal abaixo:



Agora é sua vez, no quadrado a seguir construa este fractal, mas não é necessário fazer todas as etapas separadas, faça tudo num quadrado só, mas vá completando a tabela.

Iteração	0	1	2	3	4	5	6
Nº de quadrados novos	1	3					

Agora, escreva a fórmula que relacione o número de quadrados na n-ésima iteração.

4) A brilhante ideia de Stifel consiste na organização de uma tabela que associa duas sequências numéricas. Vamos utilizar a tabela, que construímos juntos, para entender melhor como podemos obter o resultado das multiplicações.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323

Efetue as seguintes operações e veja se você percebe algum padrão, observando a tabela:

a) 2 187 X 27 =
b) 6 561 X 243 =
c) 177 147 ÷ 6 561 =

Como você deve ter percebido, a segunda sequência de nossa tabela é formada pelas potências de 3 e a primeira sequência formada pelos respectivos expoentes.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323

Como, em nosso exemplo, a base das potências é 3, dizemos que:

- 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja, $\log_3 9 = 2$
- 5 é o logaritmo de 243 na base 3, ou seja, $\log_3 243 = 5$
- 10 é o logaritmo de 59049 na base 3, ou seja, $\log_3 59\,049 = 10$
- 13 é o logaritmo de 1594323 na base 3, ou seja, $\log_3 1\,594\,323 = 13$

A partir dessas informações, preencha a seguinte tabela:

$\log_3 531\,441 =$ __________	O logaritmo de 81 na base 3 é ____
O logaritmo de 177 147 na base 3 é ____	$\log_3 6\,561 =$ __________
$\log_3 729 =$ __________	O logaritmo de 3 na base 3 é ____

Complete a tabela logarítmica abaixo com as potências de base 2 e responda às seguintes questões:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	4											

a) O logaritmo de 256 na base 2 é _______

b) $512 \times 16 =$ _______

c) $\log_2 1\,024 =$ __________

d) $32 \times 256 =$ ______

e) O logaritmo de 2 048 na base 2 é _______

f) $\log_2 4\,096 =$ __________

g) $4\,096 \div 256 =$ ________

5) Faça uso de todos os conhecimentos adquiridos sobre logaritmos e calcule: $\text{Log}_5 625 + \text{Log}\, 100 - \text{Log}_3 27$.

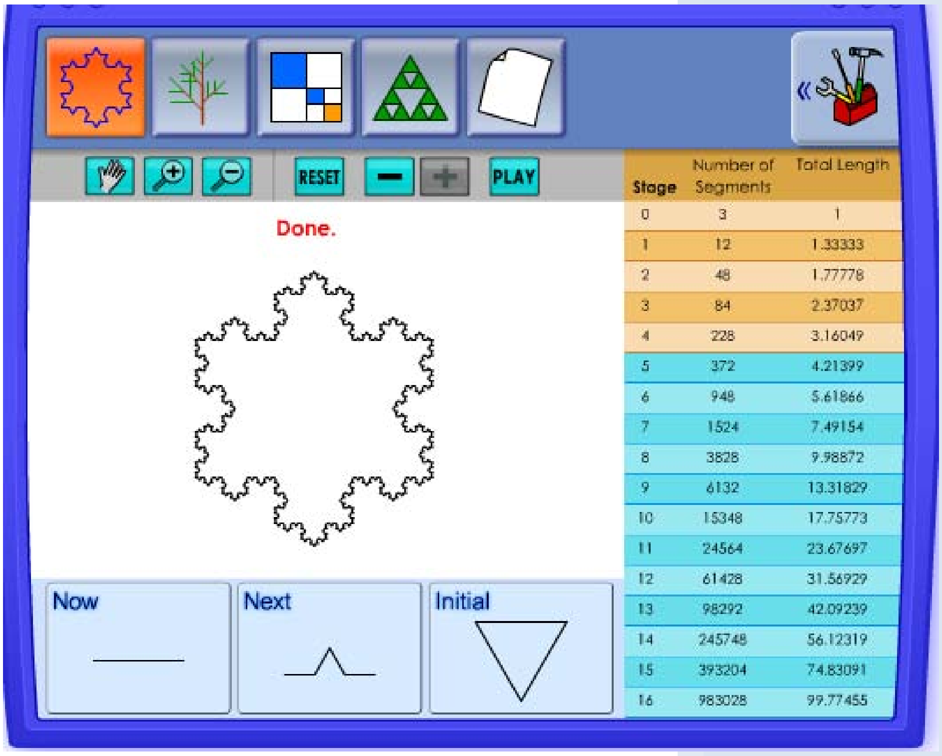
6) Qual o valor da expressão $\log_5 25 + \log_3 81$?

7) **(FESP)** A expressão $\log_2 16 - \log_4 32$ é igual a:

a) ½
b) 3/2
c) 1
d) 2
e) 2/3

Diante da proposta do exercício a professora explorará a construção da tabela de logaritmos que já foi iniciada durante as atividades propostas. Algumas observações, tais como mostrar que uma multiplicação pode ser transformada numa adição, será analisada na tábua de logaritmos e nos exercícios propostos acima.

Depois de tais atividades, faremos uso do software ILLUMINATION no laboratório de informática da escola para treinar as construções de fractais e perceber regularidades com a construção das tabelas e ainda se divertir dando asas à imaginação.



Avaliação

Diferentes formas de avaliação serão adotadas:

- Análise da participação efetiva do aluno durante a apresentação do assunto e durante a realização das atividades.
- Verificação das postagens realizadas no fórum.
- Análise das construções dos fractais bem como dos cartões e das regularidades observadas.
- Observação do desempenho na utilização do software e da tabela gerada na atividade.

Desenvolvimento

Etapa 2

- **Duração prevista**: 200 minutos
- **Assunto**: Função Logarítmica
- **Objetivos:**

- Dedução das principais propriedades de logaritmo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.
- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica.
- Resolver problemas significativos utilizando a função logarítmica.

- **Pré-requisitos:**

- Conhecimento prévio da organização de dados matemáticos em tabelas;
- Operações elementares com números reais e propriedades das potenciações.
- Conhecimento do que é logaritmo.

- **Recursos utilizados:**

- Problemas geradores;
- Software Geogebra;
- Registro das situações no caderno e solução dos problemas através das operações com tábuas de logaritmos;

- **O**

rganização da classe: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo e permitir o uso do laboratório de informática da escola.

- **Descritores associados:**

H34 - Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

H59- Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

H64 - *I*dentificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica.

H65- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

Distribuição das atividades da Etapa 2

Duração : 350 minutos

Para iniciar esta etapa, a professora irá propor que os alunos tentem solucionar a situação a seguir:

Uma pessoa deposita um determinado capital C na caderneta de poupança. A taxa de capitalização mensal da caderneta é de 0,5% a.m. Supondo que a taxa de capitalização permaneça constante, depois de quanto tempo o montante será o dobro do capital inicial investido na caderneta de poupança?

?

Vamos tentar resolver o problema, pensando inicialmente em algumas questões?

1) Se eu tenho um determinado capital C, por quanto devo multiplicar esse capital para obter o capital acrescido de 30%?

2) E se eu quiser o meu capital inicial C acrescido de 7%, por quanto devo multiplicar o capital inicial para obter o acréscimo desejado?

3) Imaginemos agora que todo mês o meu capital sofra um acréscimo de 20% sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de 1 mês? E de 2 meses ? E de 3 meses? E se forem n meses?

4) E se, de forma genérica, o meu acréscimo fosse de i% sobre o montante encontrado no mês anterior. Qual será o montante final depois de n meses?

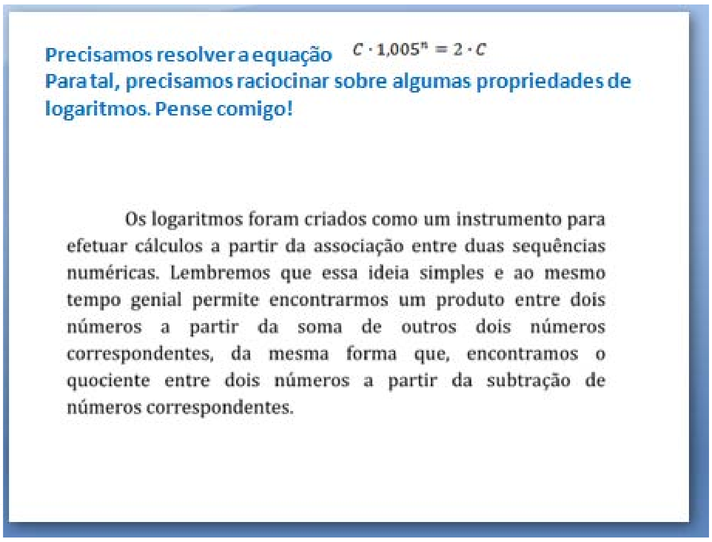
Depois de fazer com que os alunos racionem sobre a questão e busquem uma fórmula que corresponda à solução da situação, a professora recorrerá à tábua de logaritmos para mostrar aos alunos que dependemos de algumas propriedades dos logaritmos para resolver nossa questão.

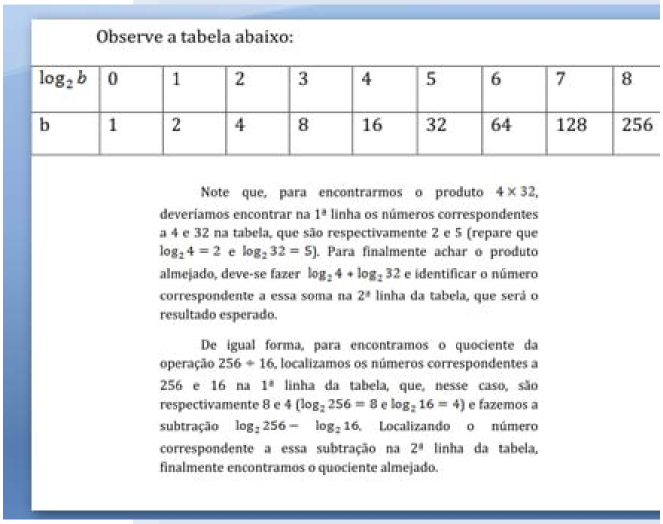
Neste momento a professora recapitulará as propriedades da potenciação e outros conceitos que podem dificultar a compreensão dos posteriores.

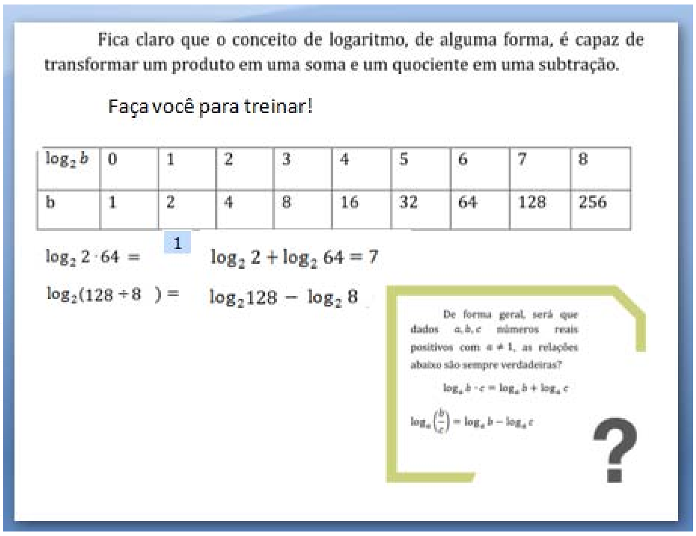
Através de slides do PowerPoint com animações (baseados no roteiro de ação 2) , a professora irá apresentando os questionamentos, os alunos buscarão soluções e só depois, sob o efeito de animações a resposta será mostrada. Desta forma os alunos verificarão se o raciocínio usado foi o correto ou o complementarão quando necessário.

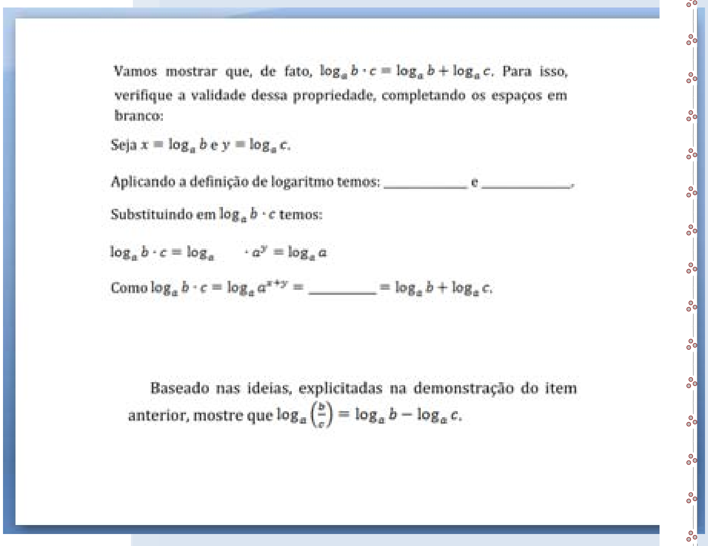
O uso dos slides facilita a apresentação, permite discussões em grupo, evita o gasto excessivo de material que muitas vezes o aluno não guarda para futuras pesquisas.

Seguem abaixo alguns dos slides usados:









Para melhor fixar as abordagens realizadas, a professora fez uso de dois jogos: Jogo da Memória com Logaritmos e Jogo das Fichas e depois de alguns exercícios.

No jogo da memória o aluno precisa apenas associar o valor do log às suas respectivas soluções.

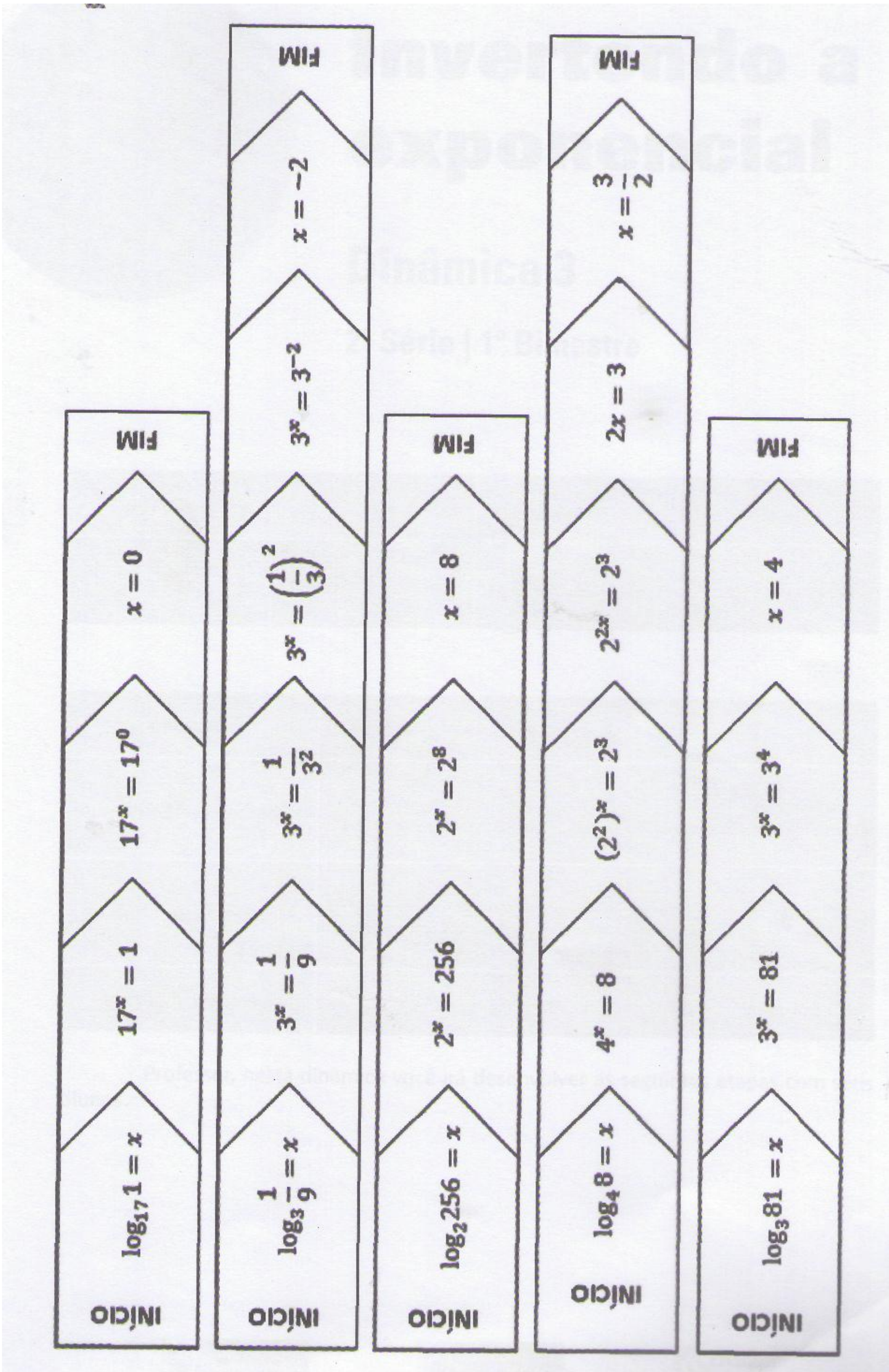
Já no jogo das fichas foi necessário pensar nas propriedades envolvidas e no raciocínio usado para montagem correta.

Se faz necessário recortar com antecedência cada uma das tiras de fichas, bem como o jogo da memória.

Jogo da Memória

$\log_2 32$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 64$
$\log_2 1$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \frac{1}{25}$
$\log_{171} 171$	$\log_{10} 10000$	$\log_4 8$
5	**0**	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	**-4**	**-2**
3	**1**	**4**

Jogo das fichas



Colégio Estadual Rio de Areia

Matemática 1° Bimestre	Data: / / 2013
Professor(a):	Série ano E.M.
Nome:	N°: Turma:

Depois de realizar deduções e pensar sobre a solução de uma situação cotidiana, nada melhor que <u>treinar</u> o que você aprendeu.

1) Sabendo que log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcule:

a) log 6 b) log 5 c) log 2,5

d) log 7,2 e) log $\sqrt{3}$ f) $\log_2 6$

2) Calcule:

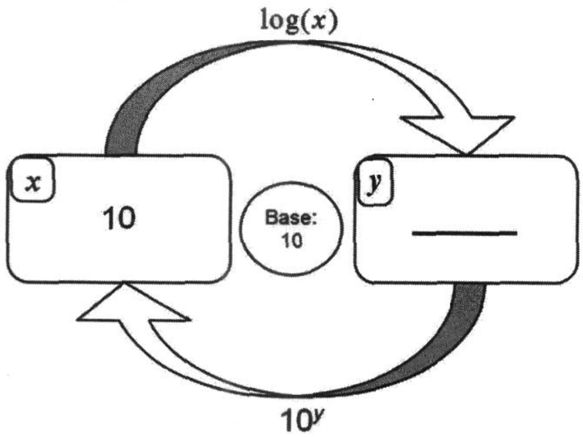
a) $\log_3 27$ b) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ c) $\log_4 \sqrt{32}$ d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

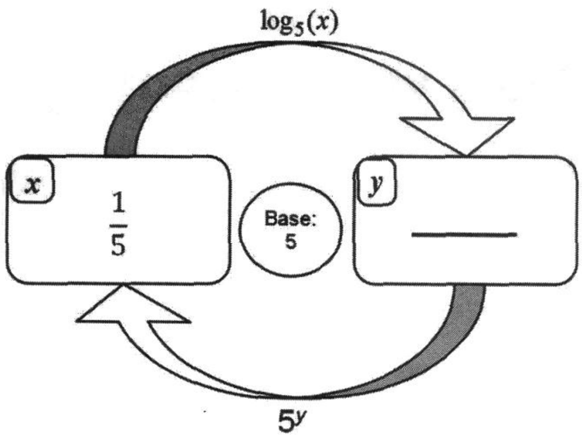
3) Determine o valor de x:

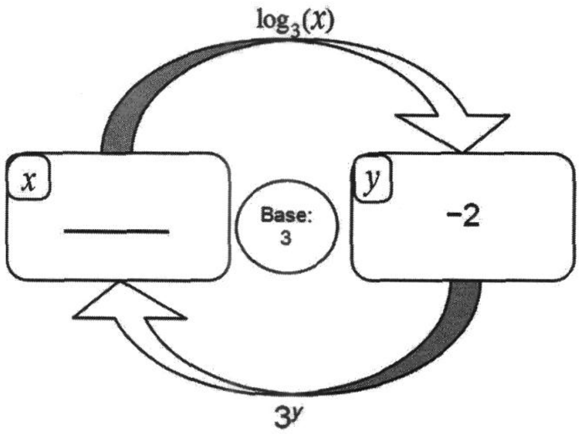
a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_9 27 = x$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$

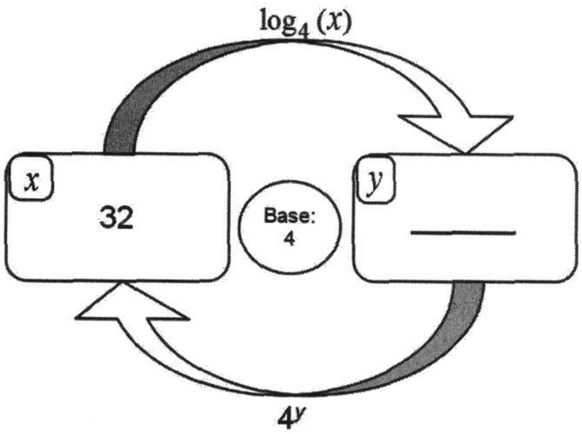
Antes de fazer uso do Geogebra a Professora instigou a descoberta da relação entre as duas funções através das seguintes atividades: Ciclo de valores e suas funções.

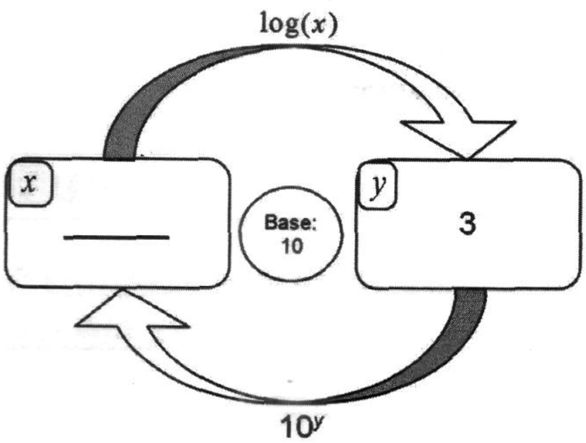
1) Preencha os ciclos a seguir e relacione as funções log e exponencial:

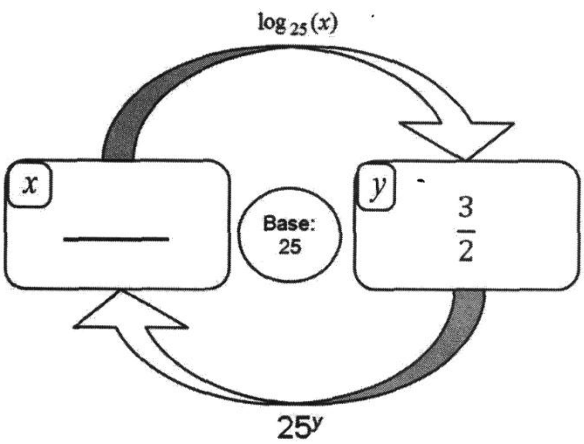




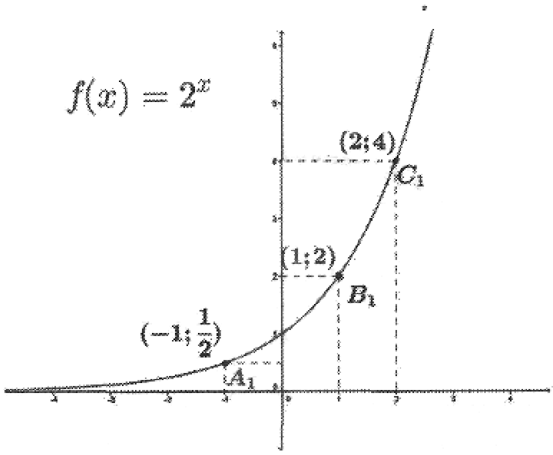


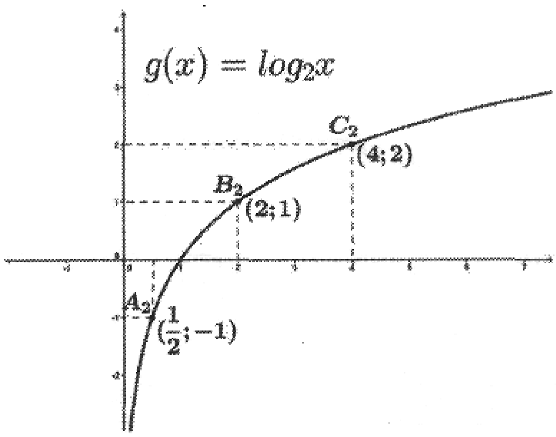






A seguir, estão representadas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = log_2 x$.





1. Verifique que o ponto B_1=(1 , 2) pertence ao gráfico da função f.

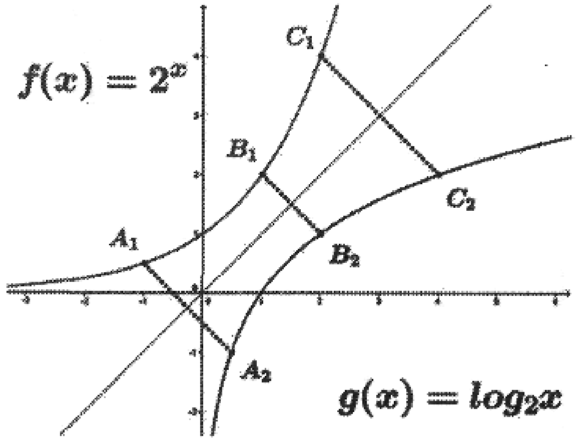
2. Verifique que o ponto C_2=(4 , 2) pertence ao gráfico da função g.

3. Observe as coordenadas dos pontos e . Qual a relação entre elas?

4. Agora, observe as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 e depois dos pontos C_1 e C_2. As coordenadas dos pares de pontos apresentam a mesma relação que a dos pontos A_1 e A_2?

5. Imagine um ponto D_1 no gráfico da função f(x) cuja abcissa vale 3. Mantendo-se a mesma relação observada nos itens 3 e 4, quais são as coordenadas do ponto D_2 sobre o gráfico da função g(x)? Explique como você pensou.

6. Observe os gráficos das funções f e g representados num mesmo plano cartesiano, juntamente com a reta pontilhada y = x.



Pense numa maneira de obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função f, levando-se em consideração a reta y = x.

____

____

Fazendo uso do Geogebra com o auxílio do data-show (pois no laboratório da escola há grande dificuldade de instalação do software), a professora seguirá as propostas do roteiro de ação 3 e fará com que os alunos percebam o que é uma função inversa, como se comporta o gráfico dela e ainda de que forma isto acontece com os logaritmos.

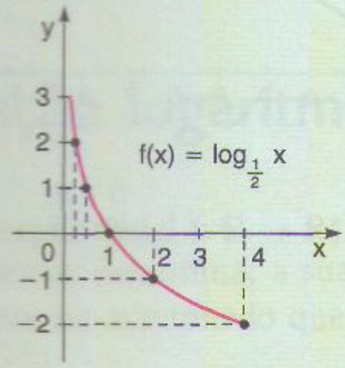
Utilizando os applets propostos, a professorá levará os alunos a construírem a idéia do que é crescimento e decrescimento de uma função. Completando as tabelas propostas, haverá busca por regularidades para enfim construir o conceito de uma função logarítmica e como ela se comporta no plano cartesiano.

Depois de realizar várias atividades no Geogebra, a professora proporá a construção de alguns gráficos e análise de outros como o da curva arquitetônica da Torre Eiffel.

Torre Eiffel, uma função bem resolvida

Se o professor pedisse a você que construísse o gráfico da função logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, para x igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4, conseguiríamos identificar uma das prováveis fórmulas que delineou o perfil do cartão-postal francês, a Torre Eiffel.

Veja:



Como vimos, a parte da curva em que $y \geq 0$ respeita a arquitetura da torre mais famosa do mundo.

Exercícios no caderno:

1) Construa num mesmo sistema de eixos, os gráficos de:

a) $g(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2 x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Agora responda

a) Movimente o ponto A e, em seguida, preencha a tabela abaixo

x	$f(x) = \log_2 x$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

O que está acontecendo com os valores de x? E com os valores de $f(x)$?

A função $f(x) = \log_2 x$ é crescente ou decrescente? Converse com seu colega e veja se chegaram a mesma conclusão. Explicite um argumento que justifique a sua resposta.

Movimentando os valores de a e mantendo $a > 1$, você chegaria a mesma conclusão? O que podemos afirmar sobre o comportamento da função $f(x) = \log_a x$ quando $a > 1$?

Aplicando o que aprendeu:

Com o intuito de levar o aluno a perceber em quais momentos da vida ele pode fazer uso dos logaritmos, variadas aplicações serão apresentadas a ele como a variação da Escala Richter, a Matemática financeira, entre outros, já possivelmente citados no fórum de pesquisa.

Exercícios no caderno:

(UFG) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, le dois terremotos estão relacionadas pela órmula: $R_2 - R_1 = \log_{10}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$, onde M_1 e M_2 nedem as energias liberadas pelos respectivos erremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando que ocorreram dois terremotos, um correspondente a $R_1 = 6$ e outro correspondente a $R_2 = 4$, determine a razão entre as energias liberadas pelos nesmos.

Suponha que o preço de um carro sofra uma desvalorização de 20% ao ano. Depois de quanto tempo, aproximadamente, seu preço cairá para cerca da metade do preço de um carro novo? Use $\log_{10} 2 = 0,30$.

COMPLEMENTANDO AS ATIVIDADES

- Os alunos realizarão exercícios do livro didático para desenvolver habilidades de interpretação de informações bem como raciocínio sobre o tema.

AVALIAÇÃO

- A avaliação da aprendizagem será realizada através da observação do desenvolvimento e compreensão de cada aluno durante as atividades propostas sendo estas registradas para futura análise e verificação dos progressos do aluno;
- Para os alunos que ainda apresentarem dificuldade a respeito do tema, novas atividades serão desenvolvidas posteriormente.

Bibliografia

Portal do Professor . Dsponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28533: acessado em 10 de fevereiro de 2013

Software online sobre FRACTAIS. Disponível em http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=17 Acessado em 09de fevereiro de 2013

Texto de apoio e pesquisa sobre fractais. Disponível em : http://www.ebah.com.br/content/ABAAABmIQAF/texto-construindo-fractais, acessado em 10 de fevereiro de 2013

NUNES Walace – Fundação Cecierj – Formação Continuada – Matemática 2ª série - Roteiros de ação . Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br - último acesso em 13 de fevereiro de 2013.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. Editora FTD – Volume 1