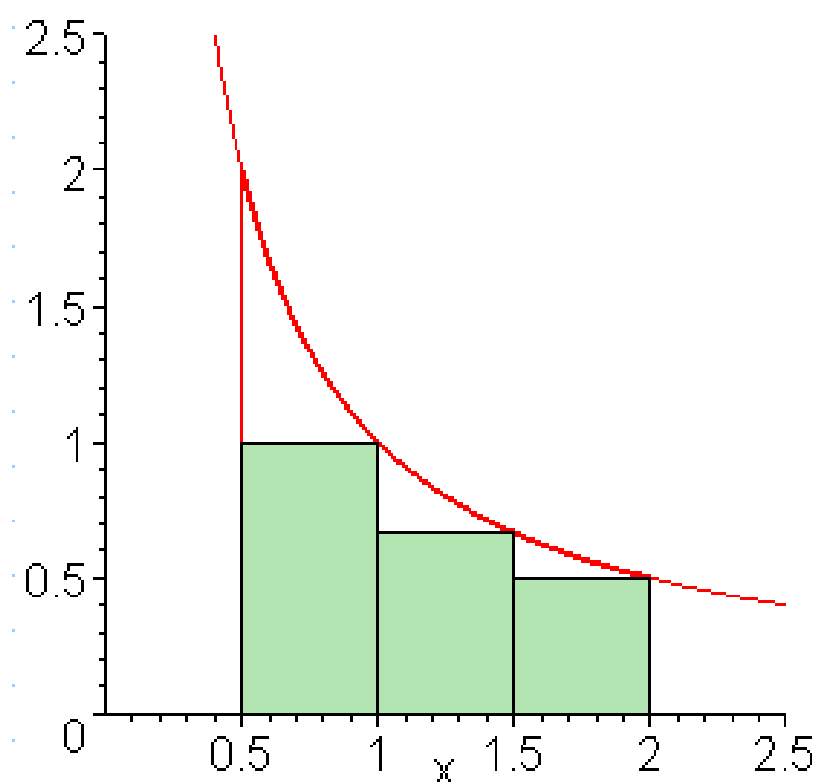


Formação Continuada Em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 1º Bimestre / 2013



Plano de Trabalho

Função Logarítmica

Tarefa 1

Cursista: Eunice Augusta da Silva

Série: 2º Ano Ensino Médio

Grupo: 5

Tutor: Paulo Alexandre

SUMARIO

INTRODUÇÃO.....	3
DESENVOLVIMENTO.....	4
Aula 1 e 2.....	4
Aula 3:	8
Aula 4 e 5.....	10
Aula 6 e 7.....	13
AVALIAÇÃO	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	15

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem o objetivo de orientar aos discentes quanto ao conteúdo Função Logarítmica de forma diferenciada através da utilização de imagens visuais, vídeos, situações cotidianas e interdisciplinaridade. Seu desenvolvimento tem o objetivo de esclarecer e fixar o conteúdo através de suas aplicabilidades. Serão propostas atividades práticas e lúdicas construídas e desenvolvidas com a participação e percepção dos discentes da abrangência e importância do assunto.

A Função Logarítmica é utilizada em aplicações na matemática financeira, em desintegração radioativa, no método do carbono 14 para determinar idades de objetos antigos, no resfriamento de um corpo, entre outros. Diariamente em diversas situações cotidianas e por este motivo é essencial que o discente consiga compreender e associar as resoluções apresentadas na matemática associando sua aplicabilidade em diversos assuntos.

Serão abordadas situações-problemas e exemplos que estimulem a descoberta pelo próprio discente do conceito. Serão propostas atividades que levem o discente a criar sua própria visão para cálculo de função logarítmica. Além de sugerir a utilização de recursos visuais, serão realizadas atividades manuais. Serão necessários sete tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos, mais um tempo para realização de avaliação escrita e/ou realização de um jogo relacionado com o tema.

DESENVOLVIMENTO

Aula 1 e 2

HABILIDADE RELACIONADA: H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

PRÉ-REQUISITOS: - Potenciação

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Projetor, Micro Computador, Quadro Branco, Folha Branca, Régua, tesoura, Lápis de Cor.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: De forma individual e em equipes de 4 pessoas

OBJETIVOS:

Revisar o conceito de potencia e apresentar a história do logaritmo.

METODOLOGIA ADOTADA:

Levar o discente a conceituar e compreender o cálculo do logaritmo através de apresentação visual e atividade manual, utilizando recursos como Projetor , Micro Computador e folha avulsa para atividade individual.

INTRODUÇÃO

O professor deve iniciar a aula questionando aos discentes sobre “Logaritmo” . Questionar aos alunos sobre o que ouviram a respeito desta palavra. Aproveitar para esclarecer a origem do nome explicar um pouco da estória.

Expor através de cartaz a junção das palavras gregas:

LÓGOS – razão e ARITHMÓS – número.

Inserir o contexto, neste momento um resumo da estória do início do logaritmo.

Nem sempre foi tão fácil fazer contas como é hoje, ao se utilizar uma calculadora. Aonde chegamos hoje é parte de nossa história como civilização e essa história merece ser contada e valorizada.

Com a expansão do comércio e a busca de novas terras no século XV, iniciou-se o período das grandes navegações, o que exigiu cálculos mais rápidos e precisos. A falta de instrumentos de cálculo compatível com o volume das contas freava o progresso científico da época. Logo, esta necessidade chamou a atenção de um lorde escocês que se propôs a simplificar a vida dos astrônomos e outros cientistas aplicados. O nobre escocês em questão era John Napier (1550-1617) que em 1614 publicou a sua obra “Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos”.

ATIVIDADE PROPOSTA

Expor aos discentes exemplos de aplicações de logaritmos e quais foram as vantagens com do surgimento.

O logaritmo surgiu como um importante instrumento de cálculo, instrumento este que facilitava os cálculos multiplicativos e trigonométricos através de adições sucessivas. Neste momento, apresentar o vídeo <http://www.youtube.com/watch?v=8fR5iOFtY2c>



Figura 1: Lorde John Napier

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier

Apresentar aos discentes o método utilizado por Napier

Apesar de Napier pensar os logaritmos de forma geométrica, ele construiu suas tábuas numericamente. Napier chamava de tábua de logaritmos a uma tabela com duas linhas, uma em progressão geométrica e a outra em progressão aritmética.

Apresentar com o auxílio de projetor o exemplo a seguir:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P.G. De razão 2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Com esta tabela podemos multiplicar, por exemplo, os números 256 e 64, fazendo uma soma. Para fazer este cálculo, procuramos na tabela os números correspondentes a 256 e 64, que são, respectivamente, 8 e 6. Somando-os, obtemos 14. Ao localizar o número 16384 correspondente ao 14 na tabela, efetuamos a multiplicação 256×64 . Os alunos vão achar incrível, não? Mas para fazer isso precisamos de uma tabela. O que está por trás deste processo? Ao olharmos mais atentamente para a tabela acima, percebemos que, para $a=2$, temos uma tabela de potências de a :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

E assim, conseguimos fazer as multiplicações rapidamente, pois utilizamos a conhecida lei da potenciação.

A grande percepção dos inventores foi a observação de que o trabalho com o expoente dos números, quando escritos na forma de potência, se torna bastante simples.

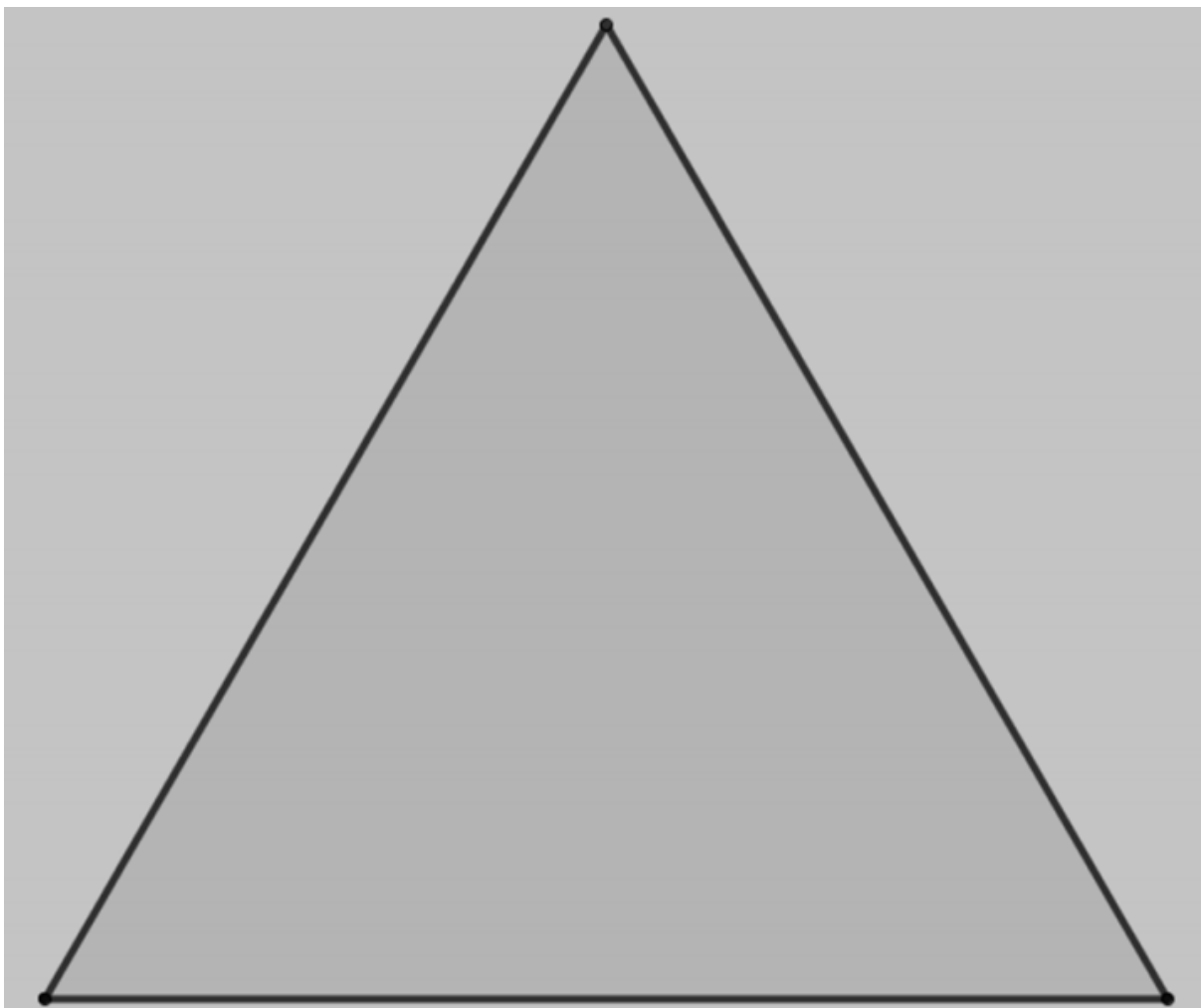
ATIVIDADE PROPOSTA

Explicar o que é Geometria Fractal.

A principal característica de um fractal é a autos semelhança, ou seja, cada parte de um objeto carrega em si a mesma estrutura do objeto inteiro, de maneira que podemos obter o objeto inteiro a partir da ampliação de uma de suas partes.

Um fractal bastante conhecido é o Triângulo de Sierpinsky. Ele é obtido a partir de um triângulo equilátero. Copiar a seguinte figura, entregando uma cópia para cada aluno.

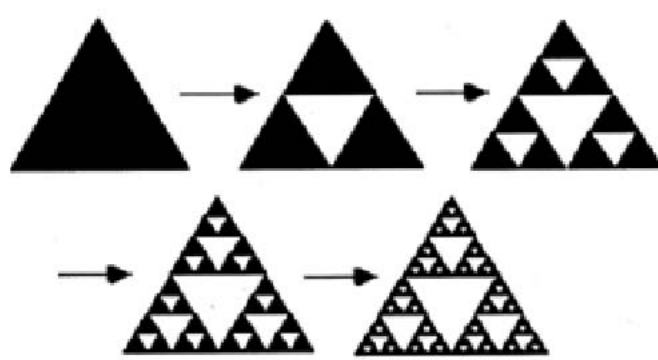
Triângulo Equilátero



Passar as seguintes instruções aos discentes:

- Obtenha o ponto médio de cada um dos lados do triângulo equilátero disponibilizado pelo seu professor.

- Trace segmentos de reta unindo os pontos médios, obtendo quatro triângulos equiláteros.
- Com o auxílio da tesoura, recorte o triângulo central.
- Note que, ao retirarmos o triângulo central, temos agora três novos triângulos. Repita os passos anteriores com os triângulos restantes e obtenha o Triângulo de Sierpinsky em vários estágios.
- Realizar sucessivas repetições das instruções acima.



Fonte:

<http://www.cap.ufrgs.br/matweb/abordagem%20fractais.htm>

Solicitar que os alunos preencham a tabela a seguir conforme o numero de iterações.

Iterações	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	3^0	3^1												
Nº de Triângulos	1	3	9	27	81	243	729							

Depois da tabela preenchida, solicitar aos discentes que utilizando a tabela para realizar o cálculo do seguinte produto: $2\ 187 \times 27 = ???$

Aproveitar este momento e relembrar as propriedades das potências, vistas em séries anteriores

Agora, utilize a tabela para efetuar as seguintes multiplicações e divisões:

- $59049 / 6561 =$
- $243 \times 729 =$
- $2187 \times 81 =$
- $531541 / 19683 =$

Como a base das potências é 3, dizemos:

- 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja, $\log_3 9 = 2$
- 5 é o logaritmo de 243 na base 3, ou seja, $\log_3 243 = 5$
- 10 é o logaritmo de 59049 na base 3, ou seja, $\log_3 59\,049 = 10$
- 13 é o logaritmo de 1594323 na base 3, ou seja, $\log_3 1\,594\,323 = 13$

A partir dessas informações, solicitar que os discentes preencham a tabela a seguir:

$\log_3 531\,441 = \underline{\hspace{2cm}}$	O logaritmo de 81 na base 3 é $\underline{\hspace{2cm}}$
O logaritmo de 177 147 na base 3 é $\underline{\hspace{2cm}}$	$\log_3 6\,561 = \underline{\hspace{2cm}}$
$\log_3 729 = \underline{\hspace{2cm}}$	O logaritmo de 3 na base 3 é $\underline{\hspace{2cm}}$

DEFINIÇÃO:

Dados dois números reais positivos a e b , com $a \neq 1$ se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo** de b na base a .

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1$$

De posse dessa definição, podemos calcular logaritmos de qualquer número real positivo em qualquer base real positiva diferente de um.

Temos, por exemplo, que $\log_5 25 = 2$ pois $5^2 = 25$, ou o logaritmo de 64 na base 4 é 3 pois $4^3 = 64$.

Aula 3:

HABILIDADE RELACIONADA: H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

PRÉ-REQUISITOS: - Potenciação

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de Atividades, Quadro Branco

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: De forma individual

OBJETIVOS:

Resolver exercícios sobre logaritmo como fixação do conteúdo.

METODOLOGIA ADOTADA:

Levar o discente a conceituar e compreender o cálculo do logaritmo através de resolução de exercícios.

INTRODUÇÃO

O professor deve iniciar a aula questionando a respeito do conteúdo visto na aula anterior.

Concluir apresentando as conseqüências da definição, utilizando a régua criada na aula anterior.

Sendo $1 \neq a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e m um número real qualquer, temos, a seguir, algumas conseqüências da definição de logaritmo:

1º) $\log_a 1 = 0$

De fato, $\log_a 1 = 0 = x$ tal que $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Exemplo:

$\log_2 1 = 0$, $\log_5 5 = 0$

2º) $\log_a a = 1$

De fato, $\log_a a = 1 = x$ tal que $a^x = a \Rightarrow x = 1$

Exemplo:

$\log_2 2 = 1$, $\log_5 5 = 1$

3º) $\log_a a^m = m$

De fato, $\log_a a^m = x$ tal que $a^x = a^m \Rightarrow x = m$

Exemplo:

$\log_2 2^3 = 3$, $\log_4 4^5 = 5$

4º) $\log_a b = \log_a c$ tal que $b = c$

De fato, $\log_a b = \log_a c$ tal que $a^x = a^m \Rightarrow x = m$

Exemplo:

$\log_2 x = \log_2 (2x-3) \Rightarrow x = 2x-3 \Rightarrow x = 3$

5º) $a^{\log_a b} = b$

De fato, $a^{\log_a b} = b = x$ tal que $\log_a x = \log_a b \Rightarrow x = b$

Exemplo:

$3^{\log_3 5} = 5$

ATIVIDADE PROPOSTA

O professor deve entregar folha avulsa para cada discente para o desenvolvimento das questões.

Sugestões de Atividades:

Revisando Potencias:
1) Calcule 4^{-2} .
2) Calcule menos seis elevado à quarta potência.
3) Calcule $8^5 - (-5)^2 + 3^1 + 4^0 + 2^{-1}$.
4) Calcule 4^{32} e $(4^3)^2$.
5) Quais os resultados de $7^{13} : 7^{11}$ e de $2^{-4} \cdot 2^5$?

Logaritmos
1) Calcule o valor $S = \log_2 32 + \log_4 0,0625 - \log_2 \sqrt{3}$ 144 Resposta: S = -1
2) Calcule o valor da base a, sabendo que $\log_a 128 = 7$

Resposta: $a= 2$
3) Calcule o valor de x , sabendo que $\log_{0,4} x=4$ Resposta: $x= 0,0256$
4) Calcule o valor da soma S : a) $S = \log_2 16 + \log_2 243$ b) $S = \log_8 1024 + \log_{0,1} 0,01$
5) Aplicando a definição de logaritmo, calcule: a) $\log \sqrt{2} 8$ b) $\log_4 16$ c) $\log_5 625$ d) $\log_{125} \sqrt{5}$

Professor, neste ponto, você poderá avaliar a necessidade de alguma atividade complementar de acordo com o nível de conhecimento de sua classe e do tempo disponível.

Aula 4 e 5

HABILIDADE RELACIONADA:

H65 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

PRÉ-REQUISITOS: Marcação de Pontos no Plano Cartesiano, Definição de Logaritmo, Função Exponencial.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folhas de Atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica, quadro branco, computador com a ferramenta Geogebra instalado.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS:

Apresentar a Função Logarítmica como inversa da Função Exponencial.

METODOLOGIA ADOTADA:

Levar o discente a compreender a relação inversa entre a função logarítmica e a função exponencial recursos visuais e computacionais.

INTRODUÇÃO

O professor deverá iniciar a aula apresentando gráficos retirados de jornais e revistas que representam funções exponenciais de forma que os discentes percebam a existência e aplicabilidade da uma função.

ATIVIDADE PROPOSTA:

Utilizando um computador e um projetor, deve apresentar aos alunos a seguinte figura:

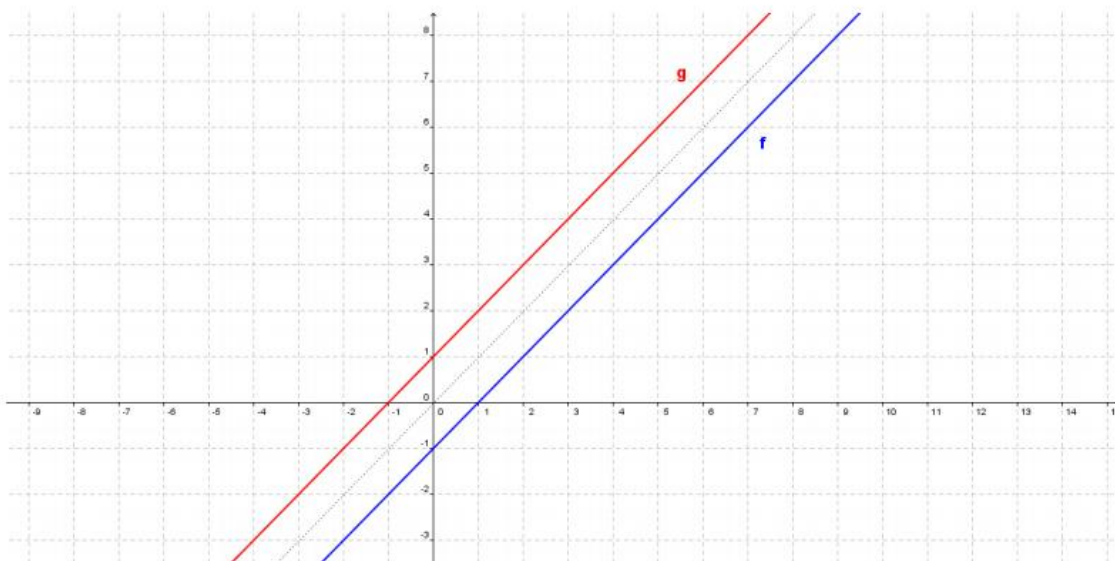


Figura 1

Solicitar aos discentes que observem as funções g e f

Solicitar aos discentes que preencham as coordenadas de alguns pontos das funções f e g.

Realizar este preenchimento no caderno.

x	y = f(x)
-1	-2
0	
1	
2	
3	
4	
5	

x	y = g(x)
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Solicitar que os discentes comparem as coordenadas dos pontos das funções f e g.

O que você percebe com relação a $f(2)$ e $g(1)$? E com relação a $f(3)$ e $g(2)$? De forma geral, se $f(a) = b$, qual seria o valor $g(b)$?

Desta forma espera-se que o aluno perceba a relação inversa entre as coordenadas dessas funções. Assim, se (a, b) pertence ao gráfico de f então (b, a) pertence ao gráfico de g. O professor deve intermediar e esclarecer qualquer dúvida, de forma que certifique que o aluno compreendeu que, no caso de duas funções inversas, se $f(a) = b$ então $g(b) = a$.

Agora solicitar aos alunos que preencham as tabelas com as coordenadas das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

x	$y = f(x) = 2^x$
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	

x	$y = g(x) = \log_2 x$
1	0
2	
4	
8	
16	
32	
64	

Agora observe os resultados nas tabelas. Questione aos discentes o quê perceberam em relação as coordenadas das duas funções.

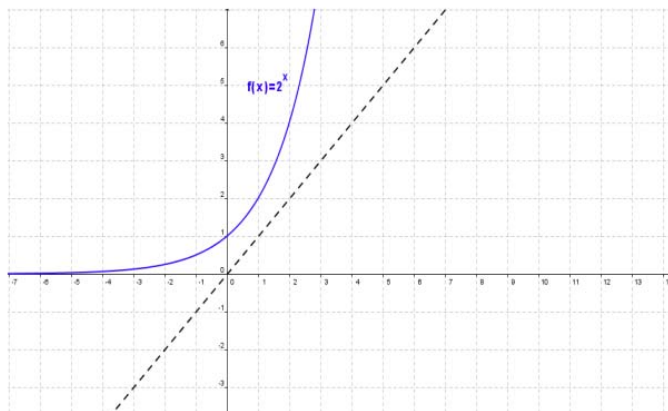
De forma geral, se a e b são números reais positivos com $a \neq 1$, então $f(b) = a^b$ e $g(a^b) = \log_a a^b = b$.

Assim, visto que $f(b) = a^b$ e $g(a^b) = \log_a a^b = b$, e $g(f(b)) = b$ para qualquer número real positivo b , fica evidente que as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ são funções inversas.

Professor, apresentar a figura a seguir utilizando o computador e o projetor. Nela estão projetados gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $y = x$.

Questionar aos alunos; Qual é a função inversa de $f(x) = 2^x$?

2) Lembrando da simetria existente entre o gráfico de duas funções inversas, solicitar aos discentes que façam um esboço do gráfico da função inversa de $f(x) = 2^x$, no plano cartesiano.



3) Abra o arquivo do Geogebra “Graficos_log_e_exp.ggb”. Nele estão plotados os gráficos de $f(x) = a^x$ (vermelho) e $f^{-1}(x) = \log_a x$ (azul). Permita que alguns alunos naveguem.

Aula 6 e 7

HABILIDADE RELACIONADA:

H59 – Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

PRÉ-REQUISITOS: Função Logarítmica, Função Exponencial

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas.

OBJETIVOS:

Resolver problemas significativos utilizando Função Logarítmica.

METODOLOGIA ADOTADA:

Levar o discente a compreender e analisar soluções para problemas envolvendo funções logarítmicas, através da resolução de problemas.

INTRODUÇÃO

O professor deverá iniciar a aula relembrando todas as aulas vistas anteriormente e esclarecer aos alunos que a aula de hoje será para que os conceitos sejam aplicados na solução de problemas.

ATIVIDADE PROPOSTA:

O professor deve entregar para cada dupla, uma folha contendo situações problemas, que podem ser resolvidos através do desenvolvimento da função logarítmica.

O professor deve deixar que os alunos raciocinem em cima de cada questão e auxiliar a cada dupla que tiver dificuldade.

Seguem algumas sugestões:

Nome: _____

Nº _____

1) **(PUC-SP)** - Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996? (Dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$)

- a) 1998
- b) 1999
- c) 2000
- d) 2001
- e) 2002

2) Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a seguinte expressão:

$Q = Q_0 * e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

3) (FUVEST-2010) - A magnitude de um terremoto na escala Richter é proporcional ao logaritmo, na base 10, da energia liberada pelo abalo sísmico. Analogamente, o pH de uma solução aquosa é dado pelo logaritmo, na base 10, do inverso da concentração de íons H^+ . Considere as seguintes afirmações:

I) O uso do logaritmo nas escalas mencionadas justificasse pelas variações exponenciais das grandezas envolvidas.

II) A concentração de íons H^+ de solução ácida com pH 4 é 10 mil vezes maior do que uma solução alcalina de pH 8.

III) Um abalo sísmico de magnitude 6 na escala Richter libera duas vezes mais energia que outro, de magnitude 3.

Está correto o que se afirma somente em:

A) I

B) II

C) III

D) I e II

E) I e III

4) Em um determinado experimento observou-se que a população de bactérias se modifica a cada instante T obedecendo a uma lei matemática e, além disso, que se pode estimar o tempo T após a primeira observação sendo dada a quantidade N de bactérias. Seja $T = T(N)$ a função que associa o número de bactérias N ao tempo T que elas levam para se proliferar. Neste experimento, verificou-se que para uma população de 4 bactérias o tempo decorrido para sua proliferação foi de 2 minutos. Percebeu-se ainda que quando a população atingiu 16384 indivíduos o tempo para sua proliferação foi de 14 minutos. De acordo com os dados observados no experimento elabore o gráfico desta função:

5) A produção de uma Indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a Lei $y = 1000 \cdot (0,9)^n$. Em que ano foi produzido 180 peças ?

AValiação

Avaliar o conteúdo desenvolvido.

AValiação	DESCRIÇÃO	VALOR
Participação	A presença do aluno e execução das atividades em pelo menos 90%	1.0
Exercícios de Fixação	Atividade complementar que deverá somar ponto ao aluno, ainda que não realização com 100% de acerto	3.0
Presença em Sala de aula	100% de frequência nas aulas	1.0
Avaliação Escrita (Em dupla)	A avaliação escrita é composta de 5 questões, cada uma com valor 1.0	5.0

AVALIAÇÃO PROPOSTA

Nome:	Turma:
Leia atentamente cada questão e resolva:	
<p>1. (FUNESP) - O acidente do reator nuclear de Chernobil, em 1986, lançou na atmosfera uma grande quantidade de ^{90}Sr radioativo cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser esse isótopo a única contaminação e sabendo que o local será considerado seguro quando a quantidade se reduzir a $1/16$ da quantidade original, o local poderá ser habitado a partir do ano de:</p> <p>a) 2014 b) 2098 c) 2266 d) 2986</p> <p>2. Um laboratório iniciou a produção de certo tipo de vacina com um lote de x doses. Se o planejado é que o número de doses produzidas dobre a cada ano, de acordo com a função $N(t) = N_0 2^t$, após quanto tempo esse número passará a ser igual a 10 vezes o inicial? (Use \log de 2 = 0,30)</p> <p>3. Andreia tinha sete bolsas. Em cada Bolsa havia sete estojos. Em cada estojo havia sete canetas. Andreia tinha quantas canetas no total?</p> <p>4. Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcule quantas bactérias existirão depois de:</p> <p>a) 3 horas b) 10 horas</p> <p>5. A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina a produção de madeira, evolui, desde quando é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1,5 + \log_3(t+1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos. se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, qual o tempo em (anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?</p>	

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Razões Trigonométricas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2o ano do Ensino Médio – 1o bimestre/2013. Disponíveis em: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br>. Acessado em 17/02/2013.

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, Volume 2/Gelson IEZZI, Osvaldo DOLCE, David DEGENSZAJN, Roberto PERIGO, Nilze DE ALMEIDA – Ed. Saraiva – 6ª Edição - São Paulo: FTD, 2010.

IMAGEM DA CAPA, disponível em

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/func/img/LOG16.GIF&imgrefurl=http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/func/loglog.htm&usg=__RKSfAjaUzKkO1hbbbVst5TGl_DU=&h=281&w=281&sz=3&hl=pt&start=31&zoom=1&tbnid=Z3K4C57JU0wT_M:&tbnh=114&tbnw=114&ei=KzchUfW0Iiy0QGQmICoBw&prev=/search%3Fq%3Dfun%25C3%25A7%25C3%25A3o%2Blogaritmica%2Bimagem%26start%3D20%26hl%3Dpt%26sa%3DN%26gbv%3D2%26tbn%3Disch%26prmd%3Divns&itbs=1&sa=X&ved=0CDwQrQMwCjgU
Acessado em 17/02/2013

VIDEO, disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=8fR5iOfY2c>.

Acessado em 15/02/2013