

FÁTIMA HELENA COSTA DIAS

e-mail institucional: fhelena@educacao.rj.gov.br

MATEMÁTICA NA ESCOLA, 2ª SÉRIE, 1º BIMESTRE

Tutor: Daiana da Silva Leite

Grupo: 02

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste Plano de Trabalho é construir com o aluno o conceito de Função Logarítmica, suas aplicabilidades com pré-requisito de Logaritmo, proporcionando ao mesmo aprendizagem significativa no campo da matemática e ao mesmo tempo cultural em outras áreas. O começo do trabalho conta com a história de JOHN NAPIER. Segue com as aplicabilidades deste conteúdo em outras áreas da ciência.

1.1 John Napier, a história dos Logaritmos

Napier fez uma contribuição direta a computação ao inventar os logaritmos (chamados de Nap log), com suas tábuas de logaritmos multiplicações e divisões de números fracionários com extensa quantidade de casas decimais eram efetuadas muito mais rápido, sendo de grande proveito para cientistas e astrônomos da época, porque havia enorme demanda de cálculos relacionados a funções trigonométricas.

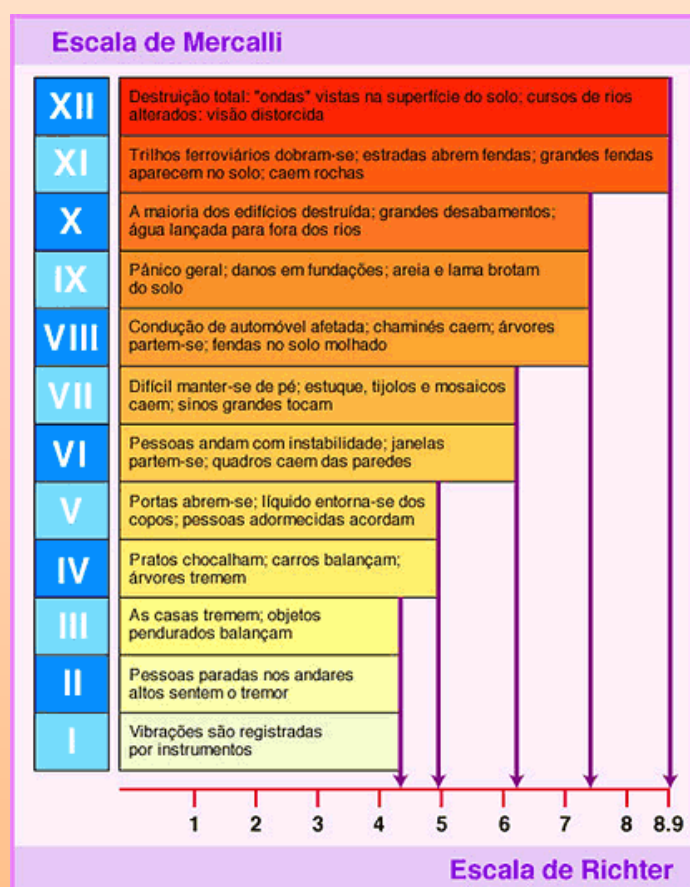
1.2 Situação problema:



A Lei 11705, de 2008, do Código de Trânsito Brasileiro, tem como objetivo proibir que motoristas dirijam alcoolizados. Aqueles que fizerem o teste de alcoolemia (bafômetro) e forem flagrados com 0,2 grama de álcool por litro de sangue, ou mais, terão que pagar uma multa, receberão 7 pontos na carteira de habilitação, perderão o direito de dirigir por um ano e ainda terão o veículo apreendido. Suponha que uma pessoa tenha em determinado momento 1,6 g/L de álcool no sangue e que esse valor decresça de acordo com a função $f(x) = 1,6 \cdot 2^{\left(\frac{-x}{2}\right)}$, em que t é o tempo em horas. Após parar de beber, quantas horas no mínimo são necessárias para que essa pessoa tenha 0,1 g/L de álcool no sangue?

Curiosidade:

Quando há a ocorrência de um terremoto em nosso planeta, utilizamos a função logarítmica para medir seu grau de tremor.



2. DESENVOLVIMENTO

Dispostos em dois planos de aula, cada um com 120 minutos.

2.1 Logaritmos

- Duração Prevista: 120 minutos
- Área de conhecimento: Matemática
- Assunto: Logaritmo
- Objetivo: Apresentação do conceito de logaritmo e suas propriedades operatórias
- Distratores: Potenciação
- Material necessário: Notebook do professor, projetor multimídia, caderno e caneta para anotações, folha de atividades.
- Organização da classe: Disposta em grupos de dois de forma a propiciar um trabalho cooperativo
- Descritores: H34 - efetuar operações utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos

Quando se diz que 3 é o logaritmo de 8 na base 2, é o mesmo que dizer que $2^3 = 8$, ou seja,

$$\log_2 8 = 3 \Rightarrow 8 = 2^3$$

Assim, o logaritmo de um número real e positivo N, na base b, positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar b para se obter N.

$$\log_b N = x \Rightarrow N = b^x$$

x – logaritmo de N na base b

Pela definição de logaritmo, infere-se que somente os números reais positivos possuem logaritmo. Os logaritmos decimais (base 10) normalmente são números decimais onde a parte inteira é denominada característica e a parte decimal é denominada mantissa.

A característica dos logaritmos decimais de números entre 1 e 10 é 0 (zero); para números entre 10 e 100 é 1 (um); para números entre 100 e 1000 é 2 (dois) e assim sucessivamente.

$$1 = 10^0$$

$$10 = 10^1$$

$$100 = 10^2$$

$$1000 = 10^3$$

As mantissas dos logaritmos decimais são tabeladas.

2.1.1 Propriedades dos Logaritmos

As seguintes propriedades decorrem da própria definição de logaritmo:

- Propriedade 1: O logaritmo da unidade em qualquer base é nulo, ou seja:

$$\log_b 1 = 0, \text{ porque } b^0 = 1.$$

- Propriedade 2: O logaritmo da própria base é sempre igual a 1, ou seja:

$$\log_b b = 1, \text{ porque } b^1 = b.$$

- Propriedade 3: O logaritmo da própria base elevada a uma potência é igual ao valor dessa potência, ou seja,

$$\log_b b^k = k, \text{ porque } b^k = b^k$$

- Propriedade 4: Se logaritmos na mesma base de dois números reais são iguais, esses números são também iguais, ou seja:

$$\text{Se } \log_b M = \log_b N \text{ então } M = N.$$

- Propriedade 5: Quando o valor da base, b , é elevado ao logaritmo de M na base b , o resultado é igual a M .

$$b^{\log_b M} = M$$

2.1.2 Propriedades Operatórias dos Logaritmos

- Propriedade 1 - Logaritmo de um Produto: é igual à soma dos logaritmos dos fatores, ou seja:

$$\log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$$

Exemplo: $\log 20 = \log(2.10) = \log 2 + \log 10 = 0,3010 + 1 = 1,3010$.

Observe que como a base não foi especificada, é estipulado que ela seja igual a 10.

- Propriedade 2 - Logaritmo de um Quociente: é igual a diferença entre os logaritmos do numerador da fração e do denominador, ou seja:

$$\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N$$

Exemplo: $\log 0,02 = \log (2/100) = \log 2 - \log 100 = 0,3010 - 2,0000 = -1,6990$.

Do exposto anteriormente, podemos concluir que, sendo $\log 0,02 = -1,6990$, então $10^{-1,6990} = 0,02$.

- Propriedade 3 - Logaritmo de uma Potencia: pode facilmente ser demonstrável como sendo:

$$\log_b M^k = k \cdot \log_b M$$

uma vez que $M^k = M.M.M.....k$ vezes, e o logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos dos fatores.

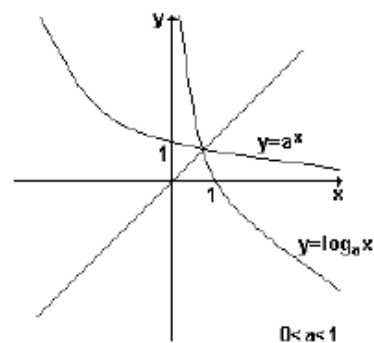
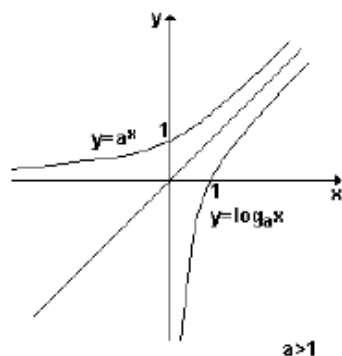
Exemplo: $\log 3^4 = \log (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 + \log 3 + \log 3 = \log 3 \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 4 \cdot \log 3$

- Propriedade 4 - Mudança de Base: às vezes, para a solução de problemas, temos necessidade de mudar a base de um sistema de logaritmos, ou seja, conhecemos o logaritmo de N na base b e desejamos obter o logaritmo de N numa base a.

$$\log_a N = \log_b N / \log_b a$$

Exemplo: $\log_2 3 = \log 3 / \log 2 = 0,4771 / 0,3010 = 1,5850$

O logaritmo é a função inversa da função exponencial.



Os gráficos acima mostram que para $a > 1$, as funções exponencial e logarítmica são crescentes e para $0 < a < 1$, são decrescentes.

2.2.3 Exercícios avaliativos

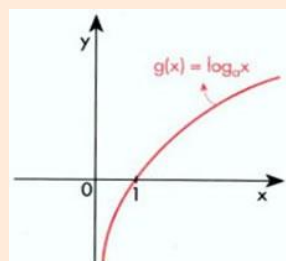
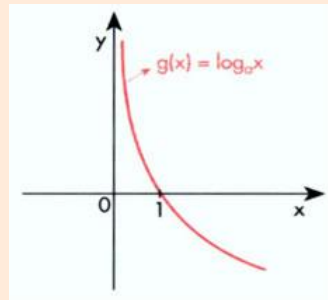
- 1. (PUC) Se $\log_{2\sqrt{2}} 512 = x$, então x vale:
 - a) 6
 - b) $3/2$
 - c) 9
 - d) 3
 - e) $2/3$

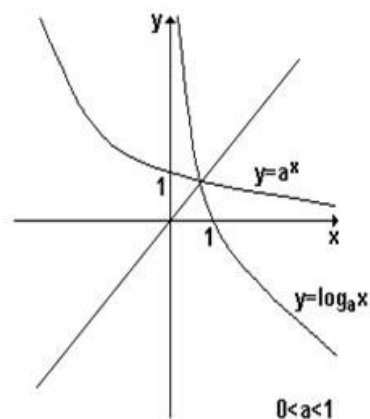
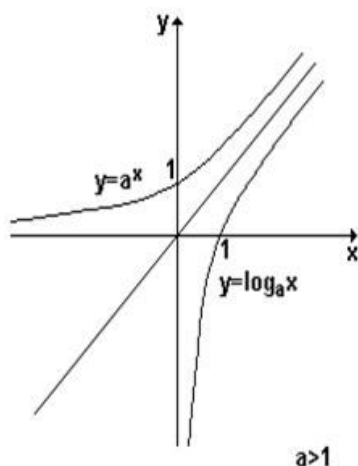
- 2. (FESP) A expressão $\log_2 16 - \log_4 32$ é igual a:
 - a) $\frac{1}{2}$
 - b) $\frac{3}{2}$
 - c) 1
 - d) 2
 - e) $\frac{2}{3}$
- 3. A solução da equação $\log_8 x \times \log_8 (3x-2) = 1$ é igual a:
 - a) $-\frac{4}{3}$
 - b) $\frac{1}{2}$
 - c) -2
 - d) 2
 - e) $\frac{4}{3}$
- 4. Se $\log_2 x = a$, então \log_{8x} é igual a:
 - a) $\frac{a}{3}$.
 - b) $\frac{a}{4}$
 - c) $2a$.
 - d) $3a$.
 - e) $4a$.

2.2 Função Logarítmica

- Duração Prevista: 120 minutos
- Área de conhecimento: Matemática
- Assunto: Função Logarítmica
- Objetivo: apresentar Função Logarítmica e seu gráfico, com respectivos intervalos de crescimento e decrescimento
- Pré-requisito: Marcação de pontos no Plano cartesiano, definição de logaritmo
- Material necessário: Notebook do professor, projetor multimídia, caderno e caneta para anotações, folha de atividades.
- Organização da classe: Disposta em grupos de dois de forma a propiciar um trabalho cooperativo
- Descritores: H65 – identificar representação algébrica e gráfica da função exponencial; H59 – resolver problemas envolvendo função logarítmica

Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$ é denominada função logarítmica de base **a**. Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.





Podemos notar que (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y,x) está na função exponencial de mesma base.

Ficha Resumo

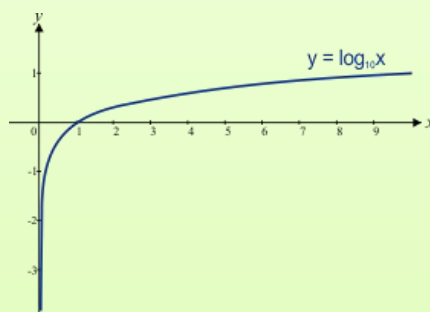
Esta ficha resumo será distribuída para cada aluno como material de consulta assim como os exercícios que serão acompanhados pelo professor. Além deste será distribuído aos alunos como fonte avaliadora uma série de exercícios, enumerados de 01 a 10, a qual será pontuada entre 0 e 2,0 como medidor de conhecimento e preparador para a prova do Saerjinho

FICHA RESUMO

Em seus estudos anteriores, você já deve ter aprendido a trabalhar um pouco com logaritmos do tipo $\log_{10} x$. Esse logaritmo é definido como

$$\log_{10} x = b \text{ se, e somente se, } 10^b = x$$

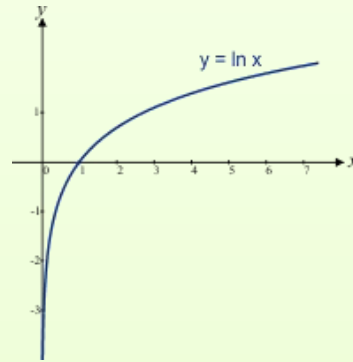
onde o número 10 é denominado **base do logaritmo**. A figura abaixo mostra o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_{10} x$.



No estudo do Cálculo, a base mais utilizada para logaritmos é o número e . Nesse caso, o logaritmo $\log_e x = \ln x$ é denominado "logaritmo natural de x " e definido como

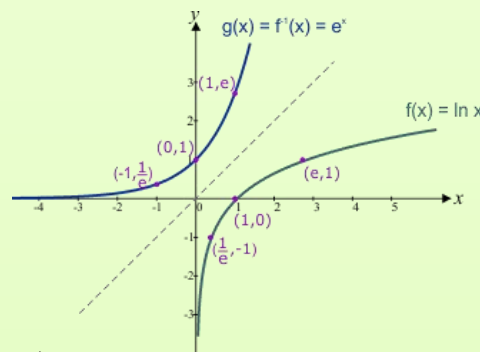
$$\ln x = \log_e x = b \text{ se, e somente se, } e^b = x$$

A figura abaixo mostra o gráfico da função logarítmica natural $f(x) = \ln x$.



Observe que:

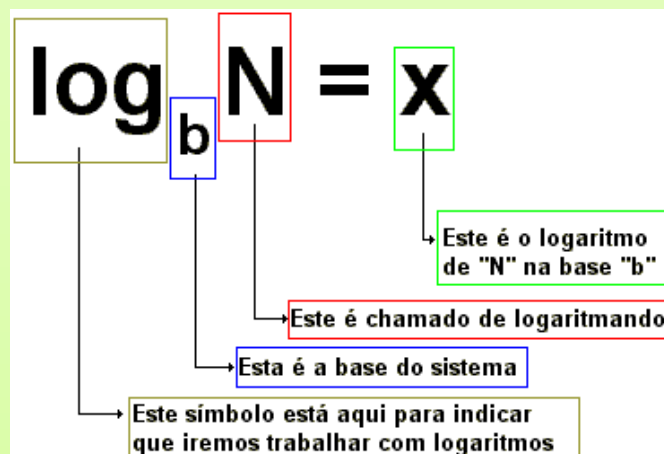
- Se $x > 0$, então $\ln x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base e para se obter o valor de x .
- A definição de função logarítmica mostra que a função logarítmica natural $f(x) = \ln x$ e a função exponencial natural $g(x) = e^x$ são funções inversas uma da outra. Isso significa que seus gráficos são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$.



- O domínio da função logarítmica natural $y = f(x) = \ln x$ é o conjunto dos números reais positivos, ou seja, o valor de y só pode ser calculado para valores de $x > 0$.
- Como as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^x$ são inversas uma da outra, então o domínio de $f(x) = \ln x$ é igual a imagem de $g(x) = e^x$ e a imagem de $f(x) = \ln x$ é igual ao domínio de $g(x) = e^x$.

Condições de existência dos Logaritmos

1) Conceito



Logaritmo de um número N, na base b, é o número x ao qual devemos elevar a base b para obtermos N.

1ª condição de existência: ologaritmando deve ser um número positivo.

2ª condição de existência: a base deve ser um número positivo diferente de 1.

Note que é dito que a base deve ser um número positivo, ou seja, não pode ser ZERO também.

Equivalência Fundamental: $\log_b N = x \leftrightarrow N = b^x$

Note que temos, na expressão acima, exatamente as duas maneiras de mostrar a pergunta feita no início do estudo de logaritmos: "Qual o expoente x que devemos elevar a base b para resultar N".

Consequências da Definição:

1º Conseqüência: $\log_b 1 = 0$

2º Conseqüência: $\log_b b = 1$

3º Conseqüência: $\log_a (a^m) = m$

4º Conseqüência: $a^{\log_a b} = b$

5º Conseqüência: $\log_a b = \log_a c \leftrightarrow b = c$

Propriedades dos Logaritmos

1º Propriedade: $\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

2º Propriedade: $\log_b \left(\frac{A}{B} \right) = \log_b A - \log_b C$

3º Propriedade: $\log_b (A^n) = n \cdot \log_b A$

Mudança de base

Em algumas questões, pode ser apresentado um logaritmo que possui uma base não muito boa para a resolução da questão. Nestas situações é necessário que troquemos a base do logaritmo!

Mudança de Base

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Ou seja, se tivermos um logaritmo na base b , podemos transformar em uma fração de logaritmos em uma outra base qualquer c .

a base nova "c", pode ser qualquer número que satisfaça a condição de existência da base, ou seja, $c > 0$ e $c \neq 1$.

Consequências da mudança de base:

A mudança de base nos dá mais algumas ferramentas para utilizar calculando expressões que envolvam logaritmos.

- 1) Essa consequência diz que, ao invertermos um logaritmo, devemos trocar a base e o logaritmando de lugar. Por exemplo, o inverso de $\log_7 27 = a$, e, por essa consequência, podemos escrever $\log_3 7 = \frac{3}{a}$.

Veja como pode cair no vestibular esta propriedade através do exemplo abaixo:

(CAJU) Sendo $\log_7 27 = a$ calcule o valor de $\log_3 7$.

Podemos reescrever a informação $\log_7 27 = a$ como sendo $\log_7 (3^3) = a$ e aplicar a 3ª Propriedade Operatória:

$$3 \log_7 3 = a$$

Veja que agora temos um logaritmo que é exatamente o inverso do logaritmo pedido no enunciado. Portanto, podemos modificar a expressão acima para:

$$3 \cdot \frac{1}{\log_3 7} = a$$

E agora isolar o valor solicitado no enunciado:

$$\log_3 7 = \frac{3}{a}$$

Esta é a resposta final

$$2) \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Quando temos uma multiplicação de dois logaritmos em que um deles possui a base igual ao logaritmando do outro, podemos cortar estes dois e transformar em um logaritmo só.

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Veja como pode cair no vestibular.

(CAJU) Calcule o valor da expressão $\log_5 8 \cdot \log_6 7 \cdot \log_8 36 \cdot \log_7 5$.

Começamos somente reagrupando os fatores de maneira a nos facilitar os cortes. Vamos colocar o quarto logaritmo do lado do segundo:

$$\log_5 8 \cdot \log_7 5 \cdot \log_6 7 \cdot \log_8 36$$

Agora veja que os fatores grifados acima podem ser unidos em um só ao cortar a base 5 do da esquerda com o logaritmando 5 do da direita:

$$\log_7 8 \cdot \log_6 7 \cdot \log_8 36$$

Estes novos termos grifados acima podem ser unidos também ao cortar a base 7 com o logaritmando 7:

$$\log_6 8 \cdot \log_8 36$$

Estes dois logaritmos que sobraram podem ser unidos ao cortar a base 8:

$$\log_6 36$$

Agora para descobrir o valor deste logaritmo, aplicamos a equivalência fundamental:

$$\log_6 36 = x$$

$$36 = 6^x$$

$$6^2 = 6^x$$

$$x = 2 \text{ Esta é a resposta final do exercício.}$$

Exercícios Avaliativos

1) Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_{16} 64$

b) $\log_5 (0,000064)$

2) Calcule o valor da incógnita "N" em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_5 N = 3$

b) $\log_{\sqrt{3}} N = 2$

3) Calcule o valor da incógnita "a" em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_a 81 = 4$

b) $\log_{9a} \sqrt{27} = \frac{1}{2}$

4) O número real x, tal que $\log_x \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{1}{2}$, é

(A) $\frac{81}{16}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $-\frac{81}{16}$

$$b^{\log_b a} = b^{-2}$$

$$a = \frac{1}{b^2}$$

$$b = a^2$$

$$a = b^2$$

$$b^2 = -a$$

Atividade Avaliativa

Escola: _____

Data: _____

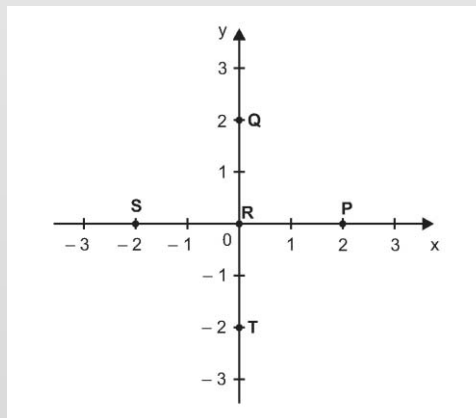
Aluno : _____

Turma/Série: _____

Disciplina : Matemática/ Revisão de conteúdos

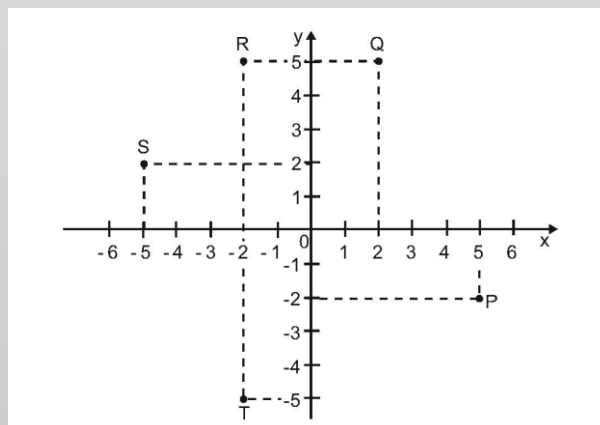
Professor: FÁTIMA HELENA COSTA DIAS

- 1) No plano cartesiano abaixo foram marcados 5 pontos.



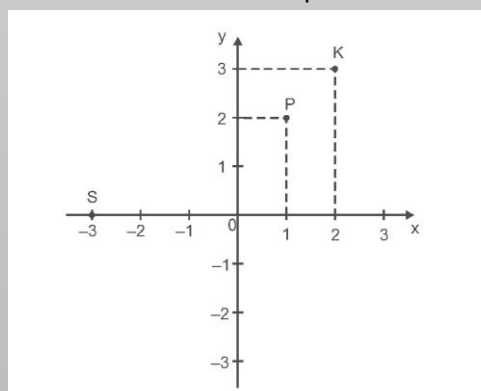
O ponto que possui abscissa 2 e ordenada zero é:

- a) P b) Q c) R d) S e) t
- 2) Veja o plano cartesiano desenhado abaixo:



Qual é o ponto que representa a coordenada (-5,2)?

- a) P b) Q c) R d) S e) T
- 3) No plano cartesiano abaixo foram marcados 3 pontos



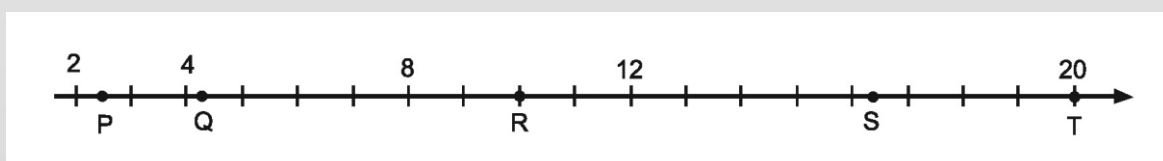
As coordenadas dos pontos S, P e Q são, respectivamente:

- a) $(-3,0)$ $(1,2)$ $(2,3)$
- b) $(-3,0)$ $(1,2)$ $(3,2)$
- c) $(-3,0)$ $(2,1)$ $(2,3)$
- d) $(0,-3)$ $(1,2)$ $(3,2)$
- e) $(0,-3)$ $(2,1)$ $(2,3)$

4) Os pontos P $(-2, -3)$ e Q $(4,-5)$ estão localizados no plano cartesiano, respectivamente, nos quadrantes:

- a) 1° e 2°
- b) 2° e 1°
- c) 3° e 2°
- d) 3° e 4°
- e) 4° e 3°

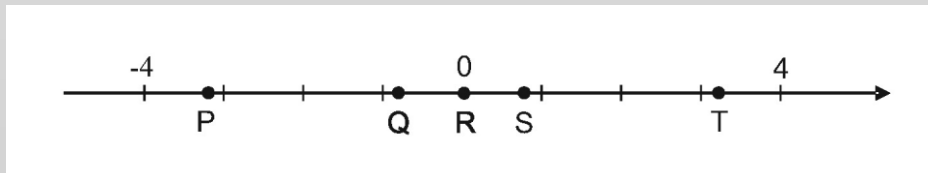
5) Cinco pontos foram marcados na reta real representada abaixo:



O número $\sqrt{20}$ corresponde ao ponto:

- a) P
- b) Q
- c) R
- d) S
- e) T

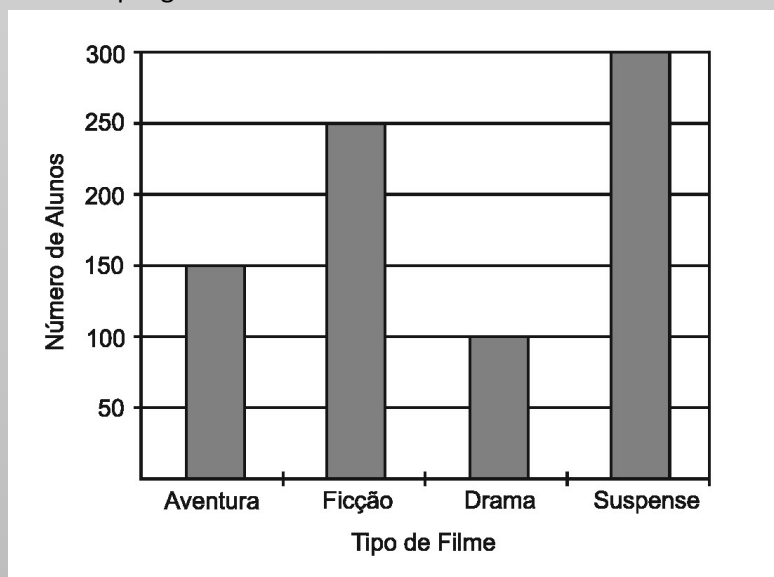
6) Veja a reta numérica abaixo:



O ponto associado ao número $-\pi$ é:

- a) P
- b) Q
- c) R
- d) S
- e) T

7) O gráfico abaixo mostra o resultado de uma pesquisa feita com os alunos de uma escola sobre o tipo de filme que gostam de assistir:



O quadro que representa essas informações é:

- a)

Tipo de Filme	Nº de Alunos
Aventura	100
Ficção	150
Drama	250
Suspense	300
- b)

Tipo de Filme	Nº de Alunos
Aventura	150
Ficção	250
Drama	300
Suspense	100
- c)

Tipo de Filme	Nº de Alunos
Aventura	100
Ficção	250
Drama	150
Suspense	300
- d)

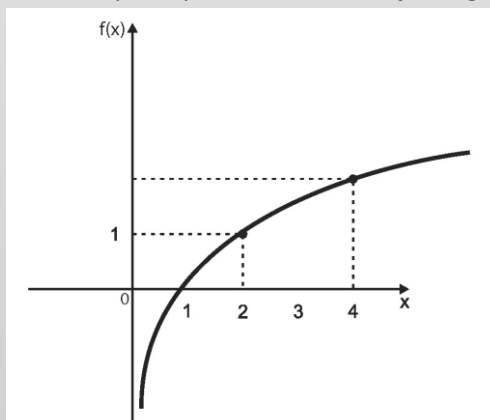
Tipo de Filme	Nº de Alunos
Aventura	150
Ficção	250
Drama	100
Suspense	300
- e)

Tipo de Filme	Nº de Alunos
Aventura	150
Ficção	100
Drama	250
Suspense	300

8) Dados $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, qual é o valor de $\log 12$?

- a) 0,043 b) 0,287 c) 0,567 d) 1,079 e) 2,778

9) Observe o gráfico abaixo que representa uma função logarítmica de base 2



Qual é o valor de $f(x)$ para $x = 4$?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

10) A quantidade de produtos fabricados em uma indústria em função do tempo t , em anos de funcionamento é dada por $P(t) = 10.000 \times (3)^{t-1}$. Qual é a quantidade de produtos fabricados por essa indústria em 4 anos de funcionamento?

- a) 30.000 b) 90.000 c) 120.000 d) 270.000 e) 810.000

3. Avaliação

Será feita mais de uma avaliação, sendo uma delas no decorrer da explanação do conteúdo e serão embasadas nos seguintes tópicos:

- O aluno colaborou na atenção?
- O aluno foi participativo, observador, questionador e houve interação com o professor?

Será avaliado também quanto a parte do professor. Farei uma auto-crítica:

- Se o professor conseguiu transmitir de maneira clara e objetiva o conteúdo
- O material utilizado foi adequado e houve domínio do manuseio.
- Por fim, serão propostas atividades escrita com duração de 50 minutos, objetivando o maior número possíveis de acertos.

Observação importante:

Preparada ficha resumo, como apostila com distribuição individual para cada aluno contendo o resumo do conteúdo e mais uma folha de atividades para o aluno . Esta folha de atividades será avaliada pelo professor, dependendo da quantidade de acertos por questão.

Preparada também uma atividade avaliativa contendo questões do conteúdo trabalhado mais questões para preparação do aluno para a prova do SARJINHO, onde à medida do possível serão sanadas as dúvidas.

Obs.: à medida da compreensão e interesse do aluno e tempo disponível serão acrescentadas outras curiosidades pertinentes e outros tópicos se necessário.

4. Referências Bibliográficas

XAVIER, A. M. Logaritmo e Exponencial. Comissão Nacional de Energia Nuclear. Conteúdo disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/funcao-logaritmica.htm>> Acesso em: 14/02/2013.

AMORIM, K. S. Nap Log Faculdade de Tecnologia Termomecânica. Conteúdo disponível em: <<http://ubuntuone.com/18FjRoKXOfuff6nnwdgqWT>> Acesso em: 14/02/2013

Supletivo Unicanto, Editora Extra. Conteúdo disponível em: <http://www.supletivounicanto.com.br/supletivo/material/mat/2ano/logaritmos.pdf> Acesso em: 14/02/2013

Tutor Brasil **Logaritmos** Conteúdo disponível em: <http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/logaritmos/index.html> Acesso em: 18/03/2013

Saerjinho**Prova** Conteúdo disponível em:

<<http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/paginas/protegidas/prova/configurarProva.faces>> Acesso em: 18/03/2013