

Plano de aula

Função

logarítmica

ALUNO: Flávia Borges Ferraz Pitz Alves

SÉRIE: 2º ANO

GRUPO: 5

TUTOR: PAULO ALEXANDRE ALVES DE CARVALHO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
Desenvolvimentos	3
Objetivos	4
Pré-requisitos	4
Recursos didáticos	4
Metodologia	4
Métodos de avaliação	4
1ª aula : Problematização	5
1. Função Logarítmica	5
1.1 Definição	6
1.2 Consequências diretas da definição	7
2. Propriedades dos Logarítmicos	7
3. Atividade: Almas Gêmeas	8
2ª Aula: Função Logarítmica	11
2. Principais Características	12
3.1 Exemplos de aplicações da Função Logarítmica	13
3ª Aula: Função exponencial, utilizando o Winplot como auxílio didático	14
3. A contribuição do Winplot nas aulas sobre função logarítmica.	19
Exercícios	20
Avaliação do plano de curso	21
Referências bibliográficas	22

1- Introdução:

A função logarítmica constitui uma importante ferramenta matemática, o aparecimento do logaritmo ocorreu quando os matemáticos sentiram necessidade de facilitar os cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação. A idéia básica era substituir operações complicadas, como multiplicação e divisão por operações mais simples, como adição e subtração. Os logaritmos estão presentes em alguns fenômenos da vida real e do corpo humano, tais como: cálculos financeiros, cálculos de ruídos muito intensos, estudo do crescimento e decrescimento de uma população, PH de substâncias, etc...

O contexto permitirá que o aluno compreenda a realidade em que a função logarítmica está inserida, desenvolvendo assim suas capacidades cognitivas e sua confiança para resolver desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo "Ensino -Aprendizagem".

Serão apresentados conceitos, necessários para esse novo estudo e definições relacionadas a funções logarítmicas.

Por fim será feito um trabalho em grupo para que os alunos possam esclarecer dúvidas entre si e para que aperfeiçoe a socialização de todos os participantes.

2 - Desenvolvimento:

O trabalho será dividido em três aulas, onde cada aula terá 2 tempos de 50 minutos, será apresentada as definições sobre o tema proposto.

As tarefas serão destinadas a colaborar com o aprendizado do aluno, auxiliando e fixando a matéria, utilizando a informática, material lúdico e o método tradicional quando forem usados os exercícios do livro didático.

A última aula será a realizada em grupo, utilizando programa Winplot na comparação dos gráficos, essa tarefa fará com que o aluno desenvolva o raciocínio e compreenda melhor as definições estudadas.

3 -Objetivos:

- Reconhecer uma função logarítmica
- Reconhecer situações cujas informações estão relacionadas ao conceito de logaritmo e de função logarítmica.
- Resolver problemas que envolvam o conceito de função logarítmica relacionadas a outras áreas.

4 -Pré-requisito

- Conhecimento sobre propriedades das potências
- Conhecimentos sobre função exponencial

5- Metodologia: Aulas expositivas com revisão sobre os pré-requisitos.

6- Recursos didáticos: Quadro, giz, livros didáticos, caderno.

7- Método de avaliação: Atividades e trabalhos, podendo ser em forma de lista de exercícios . Valor total 2,0 pontos na média

1º Aula: Função Logarítmica

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: Sala de aula e sala

Procedimentos:

- Iniciar a com alguns pré-requisitos importantes para o entendimento da matéria.

Iniciar a matéria.

1. Problematização

Iniciar a aula organizando a turma em duplas para introduzir o conteúdo e pedir que leiam o exemplo apresentado e anote no caderno as dúvidas que por ventura surgirem.

Há situações em que estudamos fenômenos de comportamento exponencial, e inúmeras outras situações em que estamos interessados no estudo da inversa da função exponencial, que chamamos de **Função Logarítmica**.

O estudo biológico da multiplicação de uma célula por divisões sucessivas é uma situação concreta que revela a importância do conhecimento dos logaritmos.

Exemplo proposto para as duplas .

- 1- A tabela abaixo representa o crescimento do número n de células em função da quantidade t de dias, sendo que se convencionou $t = 0$ para observação inicial, correspondente a $n = 1$.

Tempo(t)	0	1	2	3	4
Nº de células (n)	1	2	4	8	16

Explicita uma função exponencial que relacione o número de células à variável tempo.

$$N = 2^t$$

2- Calcule o total de dias para que se chegue a uma população de 16.384 células.

14 dias

Nota-se que, para responder a pergunta é preciso resolver a equação exponencial obtida.

Em caso como esses, utilizamos os **logarítmos** , que veremos agora.

1.1 Definição

A ideia que concebeu o **logarítmo** é muito simples, ou seja, pode-se associar o termo *Logarítmo*, como sendo uma denominação para expoente. Dessa forma defini-se formalmente logarítmos, da seguinte maneira:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b, \text{ sendo } b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Destacamos os seguintes elementos:

- **a** = Base do logarítmo;
- **b** = logarimando
- **x** = logarítmo

1.2 Consequências diretas da definição

A partir da definição de logaritmo pode-se, compreender alguns resultados, que comumente denominamos de consequências da definição.

Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e m um número real qualquer, tem-se a seguir algumas consequências da definição de logaritmo:

$$1^{\text{a)}} \log_a 1 = 0$$

$$4^{\text{a)}} \log_a a = 1$$

$$2^{\text{a)}} a^{\log_a b} = b$$

$$5^{\text{a)}} a^{\log_a b} = b$$

$$3^{\text{a)}} \log_a a^m = m$$

$$6^{\text{a)}} \log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

2. Propriedades dos Logarítmos

2.1 Logaritmo do produto.

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

2.2- Logaritmo do quociente.

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

2.3- Logaritmo da potência.

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e α , então $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$

Exemplo de aplicação:

Se $\text{Log } 9 = x$, então $\text{Log } 6$ é:

Solução:

Sabendo que $9 = 3^2$, então podem-se reescrever $\text{Log } 9 = \text{Log } 3^2 = 2 \cdot \text{Log } 3 = x$, portanto,

$$\text{Log } 3 = x/2.$$

Por outra lado percebe que $6 = 2 \cdot 3$, então, temos:

$\text{Log } 6 = \text{Log } (2 \cdot 3)$ pela propriedade 3.1, pode-se [escrever](#):

$$\text{Log } (2 \cdot 3) = \text{Log } 2 + \text{Log } 3$$

$$\text{Log}(2.3) = \text{Log } 2 + x/2.$$

Resposta: $\text{Log } 6 = \text{Log } 2 + x/2$

Utilizar alguns exercícios do livro didático da turma.

Resolver e retirar dúvidas que possam surgir no decorrer da tarefa.

3- ATIVIDADE- Procurando a alma gêmea.

Essa atividade foi retirada do material : “ Reforço Escolar”, projeto realizado pela Seeduc-rj, para as escolas Estaduais.

Objetivo: Aplicar a definição de logaritmo e reconhecer algumas de suas propriedades imediatas.

Descrição da Atividade: esta atividade visa trabalhar a definição de logaritmo. Por meio de um jogo da memória com 18 cartões, como ilustrado abaixo.

$\log_2 32$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 64$
$\log_2 1$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \frac{1}{25}$
$\log_{171} 171$	$\log_{10} 10000$	$\log_4 8$
5	0	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	-4	-2
3	1	4

Observe as regras do jogo e as questões propostas para os alunos.

Grupos de 3 a 4 alunos, mas os registros são feitos individual.

Tempo necessário: de 25 a 35 minutos.

Iniciar o jogo:

- Descida com seu grupo quem é o primeiro jogador e uma ordem para as jogadas.
- Embaralhe os cartões sobre a mesa, virados para baixo.
- Na sua vez, vire dois cartões. Se os cartões virados forem equivalentes, retire da mesa. Caso contrário, vire para baixo e passe a vez.
- Os demais alunos no grupo farão o mesmo procedimento.
- O jogo acaba quando todos os pares estiverem formados e o aluno que possuir a maior quantidade de pares no grupo é o vencedor do jogo.
- Por exemplo, se o primeiro cartão virado for $\log_2 8$, o cartão equivalente a este será 3. Se os cartões virados não forem um par desse tipo, os cartões deverão voltar à posição inicial.

Agora responda:

1- Complete a tabela ao lado com os valores dos logaritmos.

$\log_2 32$	5
$\log_5 \sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$
$\log_4 64$	3
$\log_2 1$	0
$\log_2 \frac{1}{16}$	-4
$\log_5 \frac{1}{25}$	-2
$\log_{171} 171$	1
$\log_{10} 10000$	4
$\log_4 8$	$\frac{3}{2}$

2- Baseado no que você observou anteriormente, complete as igualdades.

(a é um número real positivo e $a \neq 1$)

a. $\text{Log}_a a^m =$

b. $\text{Log}_a a =$

c. $\text{Log}_a 1 =$

Após as atividades, sinalizar aos alunos que pode-se calcular logaritmo, observando o expoente do logaritmoando, sempre que podemos escrevê-lo como potência da base. Quase todos os logaritmos do jogo podem ser calculados dessa maneira, como é o caso, por exemplo, do $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

Com isso, não é necessário resolver equações para a maioria dos cálculos e preceber as três primeiras propriedades da segunda questão: $\log_a a^m = m$, $\log_a a^0 = 0$ e $\log_a a^1 = 1$.

A avaliação da turma será feita através das atitudes tomada pela turma durante a execução da tarefa.

Currículo mínimo.

- **Calcular o logaritmo de um número real positivo.**
- **Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.**
- **Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.**

2º Aula: Função Logarítmica -

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: Sala de aula

2. Função logarítmica

O conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e em toda a sua obra sobre [logaritmos](#).

Falar um pouco sobre Napier, para que os alunos conheçam e entendam porque os logaritmos foram criados.

O conceito de logaritmo foi introduzido pelo matemático escocês John Napier (1550-1617) e aperfeiçoado pelo inglês Henry Briggs (1561-1630). A descoberta dos logaritmos deveu-se, sobretudo à grande necessidade de simplificar os cálculos excessivamente trabalhosos para a época, principalmente na área da astronomia, entre outras. Através dos logaritmos, pode-se transformar as operações de multiplicação em soma, de divisão em subtração, entre outras transformações possíveis, facilitando sobremaneira os cálculos. Na verdade, a idéia de logaritmo é muito simples, e pode-se dizer que o nome logaritmo é uma nova denominação para expoente, conforme veremos a seguir.

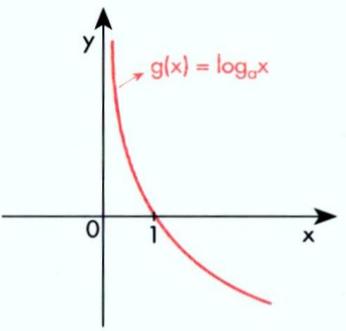
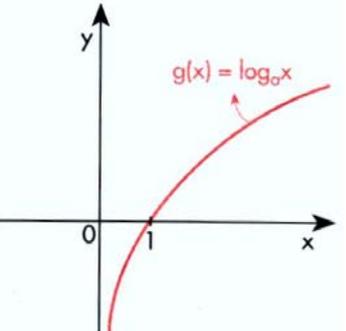
Depois, retornar a definição:

Chama-se função logarítmica de base **a** à correspondência

$$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \log_a x \quad , \text{ com } a > 0, a \neq 1.$$

2.1 Principais Características

Função logarítmica $0 < a < 1$	Função logarítmica $a > 1$
$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longrightarrow \log_a x$  <ul style="list-style-type: none"> • Domínio = \mathbb{R}^+ • Contradomínio = \mathbb{R} • $g(x) = 0 \iff x = 1$ • g é contínua e diferenciável em \mathbb{R}^+ • A função é decrescente. 	$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longrightarrow \log_a x$  <ul style="list-style-type: none"> • Domínio = \mathbb{R}^+ • Contradomínio = \mathbb{R} • $g(x) = 0 \iff x = 1$ • g é contínua e diferenciável em \mathbb{R}^+ • A função é crescente.

Utilizar exemplos do livro didático para mostrar os gráficos das funções logarítmicas e o crescimento e decrescimento dessas funções.

2.2 Exemplos de aplicações da Função Logarítmica

Exemplo 1: Cultura de Bacilos

O número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t , é dado por $N = N_0 \cdot 2^{(t/k)}$, em que N_0 e k são constantes.

As variáveis t e N estão expressas em horas e milhões de unidades, respectivamente.

3. Interpreta o significado das constantes N_0 e k .

No instante $t = 0$ vem $N = N_0 \cdot 2^0$ logo $N = N_0$.

Portanto, N_0 é o número de bacilos existentes no início da contagem do tempo.

Fazendo $t = k$ vem $N = N_0 \cdot 2$.

Isto significa que k é o número de horas que decorrem até duplicar o número de bacilos.

b) Qual a função que exprime, o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N , em função de N ?

$$N / N_0 = 2^{(t/k)}$$

$$t / k = \log_2 (N / N_0)$$

$$t = k \log_2 (N / N_0)$$

Vemos que a expressão de t , em função de N , envolve um logaritmo da variável independente, logo é uma função logarítmica.

Utilizar o livro didático como auxílio nas resoluções de exercícios como modo de fixação e avaliação da turma.

3º Aula: Função exponencial, utilizando o Winplot como auxílio didático

Duração: 2 tempos de 50 minutos.

Local: Sala de informática

3. A contribuição do Winplot nas aulas sobre função logarítmica.

Introdução:

As mídias na educação tem sido um tema presente na Educação Básica.

Esta aula apresenta uma proposta de atividade de introdução às Funções Logarítmicas relacionando com auxílio do programa Winplot, para mostrar aos alunos o modo como os logaritmos se comportam nos gráficos e como isso terão a oportunidade de entender esta relação desconhecida por eles mesmos.

3.1 Descrição sobre a escolha do software.

A Descrição do programa: WinPlot é um programa para gerar gráficos de 2D e 3D a partir de funções ou equações matemáticas. Você obtém resultados rápidos, diretos e excelentes. Os menus do sistema são simples, sendo que existe uma opção de Ajuda em todas as partes. Aceita funções matemáticas de modo natural.

Leia mais

em: <http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm#ixzz2Bw5iYaHG>

3.2 O programa pode ser baixado em:

Ir para <http://math.exeter.edu/rparris> e clique em "Winplot".

Há uma descrição do programa. Clique em "Winplot" novamente para download, salvar o arquivo para uma pasta, como "C: \ Winplot" (não tem que ser na unidade do sistema).

O arquivo não é grande (menos de 700K) e não leva muito tempo para transferir. O arquivo que você tem agora é realmente chamado "winplotz.exe". É um arquivo compactado auto-extraível.

Dê um duplo clique sobre ele instala o programa "Winplot.exe".

Note que ele não tem um escudo de instalação, não escrever para o seu sistema de registro, ou insinuar em seu sistema operacional.

Isso significa que sempre que você quiser pode excluir.

Esta atividade permite que os alunos usem os recursos tecnologia para a resolução de problemas e ampliem a compreensão sobre gráficos de funções exponenciais, bem como da linguagem matemática.

3.3 Objetivos:

- Utilizar o programa Winplot para a construção dos gráficos;
- Construir o gráfico da função exponencial;
- Observar o crescimento e o decrescimento da função exponencial

3.4 Recursos Didáticos:

- Laboratório de informática;
- Computadores com a instalação prévia do Winplot;
- Quadro Branco;
- Data-show;
- Marcador de quadro branco;
- Caneta, lápis e papel, para anotações.

3.5 Desenvolvimento:

- Verificar com antecedência, se o programa Winplot está devidamente instalado e se funciona corretamente, em cada um dos computadores;
- Por causa do pouco espaço e número de computadores disponíveis no laboratório de informática, dividir a sala em grupos de no máximo 15 alunos , para que o trabalho seja desenvolvido com um aluno por computador;
- No laboratório, disponha os alunos em duplas que deverá sentar-se em cada computador;
- O professor indicará o programa Winplot, cujo atalho já deverá estar na área de trabalho para facilitar a localização do mesmo;

3.6 Avaliação: (2,0 pontos)

- Participação ativa na construção dos gráficos;
- Resolução das atividades propostas.

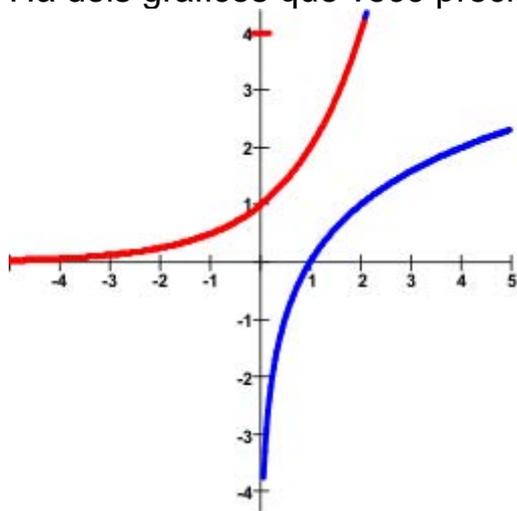
Avaliação da turma perante o currículo mínimo

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.

3.7 Iniciar:

Mostre aos alunos um exemplo de como utilizar o programa para construção de gráficos e gráficos

Há dois gráficos que você precisa para criar para esta imagem.



- Uma é a função exponencial com a base 2 e a outra é a função logarítmica com base 2.
- $y = 2^x$ é inserido no Winplot como 2^x . $y = \log_2 x$ é inserido no Winplot como $\log(2, x)$.

3.8 Instruções

1. Quando Winplot aparece, você só tem duas opções. Janela e Ajuda.
 - a. Escolha Janela / Uso Padrões (se já estiver marcado, então você não precisa selecionar essa)
 - b. Escolha Janela / 2-dim
2. Ir para Tamanho do Arquivo / Imagem
 - a. Definir a largura e altura para ambos ser 9 centímetros
 - b. Clique em OK
3. Na janela 2-dim que aparece, escolha equação / explícita. No $y = f(x)$ caixa que aparece, faça o seguinte
 - a. Digite a expressão 2^x
 - b. Altere as x baixas e altas x para ser -5 e 5 (deve ser o padrão)
 - c. Alterar a largura da caneta para ser 3

- d. Alterar a cor da caneta a ser vermelho (fechar a janela de cor depois que você escolher vermelho)
 - e. Clique em OK
4. Escolha Equação / Explícita novamente.
- a. Digite o log expressão (2, x)
 - b. Altere as x baixas e altas x para ser -5 e 5 (deve ser o padrão)
 - c. Alterar a largura da caneta para ser 3
 - d. Alterar a cor da caneta a ser vermelho (fechar a janela de cor depois que você escolher vermelho)
 - e. Clique em OK
5. Vá em Exibir / Ver (control-V) - Se você tivesse Usar padrões verificados quando você criou o gráfico, esta etapa deve ser opcional, como a janela de visualização padrão é de -5 a 5, tanto para o direções x e y.
- a. Clique em Configurar Centro
 - b. O centro horizontal é 0
 - c. O eixo vertical é 0
 - d. A largura é de 10 (que lhe dá cinco de cada lado)
 - e. Clique em aplicar
 - f. Clique em fechar
6. Escolha Exibir / Grid (controle-G). A seguir irá levá-lo de cima para baixo
- a. Ligue ambos os eixos (deve ser o padrão)
 - b. Ligue carrapatos (deve ser o padrão)
 - c. O comprimento carrapato é de 0,8 (valor padrão)
 - d. Marque a caixa de escala para o x. O intervalo é 1, o número de casas decimais é 0, a frequência é de 1.
 - e. Marque a caixa de escala para o y. O intervalo é 1, o número de casas decimais é 0, a frequência é de 1.
 - f. Marcar escala em eixos (padrão)

- g. Você quer que nenhuma grade, mas não há problema em deixar os quadrantes verificados desde que você não tenha ligado qualquer grades. O número de setores polares não importa, já que setores polares não está marcada. Tudo isso é o padrão.
 - h. Clique em aplicar
 - i. Clique em fechar
7. De volta à janela 2-dim, escolha Miscelâneas / Fontes / escala no Eixo
- a. Aumentar o tamanho da fonte. Eu recomendo pelo menos 12.
 - b. Você pode alterar a fonte, se você preferir, eu usei Arial e fez ousada, mas eu não sou tão especial sobre ele.
 - c. Clique em OK
8. Opcional, mas altamente recomendado - Salvar seu gráfico para que você possa abri-lo mais tarde.
- a. Escolha Arquivo / Salvar como
 - b. Alterar a localização onde você está salvando o seu documento do Word. Ou meus documentos ou o disquete. Se este é o seu computador de casa, você pode deixá-lo no diretório C: \ amendoim
 - c. Dê-lhe um nome como ch5graph e clique em Salvar
9. Escolha Arquivo / Copiar para área de transferência (Control-C)
10. Alterne para o seu documento do Microsoft Word
11. Cole o gráfico no Word. Ele vai ocupar a maior parte da página, mas vamos redimensioná-la.
12. Botão direito do mouse sobre o gráfico e escolha Formatar imagem
- a. Escolha Tamanho e definir a largura de 2 "
 - b. Escolha Layout e escolha Square e, em seguida, definir o alinhamento horizontal para a direita
 - c. Clique em OK
13. Arraste a imagem para onde você quer que ele seja.

Exercícios:

1º etapa: Utilizando do programa Winplot, construa os gráficos das funções citadas

abaixo:

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{(1/2)} x$

c) $f(x) = \log_3 x$

d) $f(x) = \log_{(1/3)} x$

e) $f(x) = \log_{10} x$

f) $f(x) = \log_4 t$

Use cores diferentes para cada um deles. O aluno poderá aplicar aqui o que aprendeu quando construiu gráficos de função logarítmica.

2º etapa : Responda o questionário.

Observe todos os gráficos e as leis da função que o originaram. A seguir responda:

- Qual é a característica comum a todos os gráficos?
- Qual é a característica comum aos gráficos das funções escritas nos itens a, b, c?
- Qual é a característica comum aos gráficos das funções escritas nos itens d, e, f ?
- Observe a lei de formação das funções constantes nos itens d, e, f, o que elas têm em comum, fora o expoente?

2) Invente um exemplo de função logarítmica crescente e construa o seu gráfico para verificar se o seu exemplo está correto.

3) Invente um exemplo de função logarítmica decrescente e construa o seu gráfico para verificar se o seu exemplo está correto.

Encerrar a aula com a entrega do questionário para avaliação

Avaliação do plano de aula

O plano de aula ajuda o professor a montar essa relação entre definições e dia a dia, é possível que alguns alunos já conheçam o assunto, por isso é importante o professor iniciar a aula perguntando sobre exemplos e conhecimentos, esclarecendo sempre indicações equivocadas que possam surgir.

O plano de aula foi montado pensando nessa relação e envolvendo outras disciplinas no assunto, a montagem dos gráficos no programa winplot auxilia muito os alunos na visualização dos sistemas e assim ajudando a compreender melhor o tema.

Referência bibliográfica:

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. Matemática, volume único: Ensino Médio, Editora Atual, São Paulo, 2007.
- PAIVA, Manuel. Volume único: Matemática: Ensino médio. Editora Moderna, São Paulo, 2003-(Coleção Base).
- SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio: Volume 1, Editora Sraiva, 6ª edição – 2010- São Paulo.
- Apostila: Potências e logaritmos, tudo a ver! –Reforço Escolar- Secretária de Educação do Estado do Rio de Janeiro- 2013

Site visitados

<http://translate.google.com.br/translate?hl=pt-PT&langpair=en%7Cpt&u=http://www.austincc.edu/lrosen/TechTutor/winplot/basics/winplotbasics.htm> - acessado em 11/02/2013

<http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm> acessado em 11/02/2013

www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm103/funcaoLogaritmica.htm acessado em 11/02/2013

www.matematicadidatica.com.br/FuncaoLogaritmica.aspx acessado em 11/02/2013