# FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Matemática 2º Ano – 1º Bimestre/2012

# Plano de Trabalho 1

# Função Logarítmica

Cursista: Izabel Leal Vieira

Tutor: Cláudio Rocha de Jesus

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por finalidade trabalhar com o aluno função logarítmica, auxiliando o mesmo a perceber a utilização deste conteúdo em situações do cotidiano.

Este plano de trabalho será iniciado com uma revisão sobre potenciação para em seguida levar o aluno a perceber que a função logarítmica é a inversa da exponencial.

É importante estimular o aluno a realmente compreender o que está sendo abordado, pois muitas vezes o aluno não vê a aplicabilidade de determinado conteúdo escolar na sua realidade, e com isso o aprendizado deixa de ser atrativo para ele. Portanto, é importante a utilização de questões contextualizadas que possa ter relação com o cotidiano do aluno.

Para trabalhar esse conteúdo serão necessários 11 tempos de 50 minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e mais 4 tempos de 50 minutos para a atividade de avaliação da aprendizagem (além da avaliação que será feita no momento da aula, durante a realização das atividades).

# DESENVOLVIMENTO

## ***ATIVIDADE 1***

HABILIDADE RELACIONADA: Revisão sobre potenciação. Apresentar a definição de logaritmo e as condições de existência. Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.

PRÉ-REQUISITOS: Potenciação

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folhas xerocadas, quadro, livro didático.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Revisar potenciação e iniciar o conteúdo referente a logaritmos.

METODOLOGIA ADOTADA:

Para iniciar este conteúdo vamos revisar potenciação. Veja abaixo.

# POTENCIAÇÃO

Potenciação de um número é o produto de fatores iguais a esse número.

Veja: a) $3^2 = 3.3 = 9$ b) $5^3 = 5.5.5 = 125$

Obs: No exemplo a temos: 3 é a base e 2 é o expoente.

No exemplo b temos: 5 é a base e 3 é o expoente.

Temos: .............. $a^1 = a$

.............. $a^0 = 1,\ a \neq 0$

*Propriedades da Potenciação*

Propriedade 01 .............. $a^n.a^m = a^{n+m}$

Ex.1) $2^3.2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

Propriedade 02 .............. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Ex.1) $\dfrac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$

Propriedade 03 .............. $(a^p.b^q)^n = a^{pn}.b^{qn}$

Ex.1) $(2^3.3^2)^4 = 2^{3.4}.3^{2.4} = 26.873.856$

Propriedade 04 .............. $a^n.b^n = (a.b)^n$

Ex.1) $2^2.3^2 = (2.3)^2 = 36$

Propriedade 5 .............. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad para \quad b \neq 0$

Ex.1) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

Veja ainda:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ex.1) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Potência de base 10: $10^n$

Ex.1) $10^2 = 10.10 = 100$

Potência de base negativa e expoente "<u>par</u>" $\rightarrow$ resultado é sempre <u>positivo</u>;

Ex.1) $(-2)^2 = -2.-2 = 4$

Potência de base negativa e expoente "<u>ímpar</u>" $\rightarrow$ resultado é sempre <u>negativo</u>;

Ex.1) $(-2)^3 = -2.-2.-2 = -8$

# LOGARÍTMOS

Devido aos enormes avanços que houve nas atividades científicas (astronomia, engenharia, matemática, física, química, medicina), a partir do renascimento, os cientistas encontravam enormes dificuldades quando tinham que enfrentar os cálculos dos estudos quantitativos dessas áreas.

Em 1614, após, pelo menos, 20 anos de estudos, **John Napier** publicou um método que facilitava muito a tarefa de calcular, uma vez que transformava **multiplicações e divisões** nas operações mais simples de **soma e subtração**.

Ele associou duas progressões do tipo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

E descobriu o seguinte:

Para fazer a multiplicação de 16 por 64, por exemplo, o número 16 da progressão inferior esta relacionado ao número 4 da progressão superior, enquanto o número 64 esta relacionado com o número 6. Se em vez de efetuarmos a multiplicação de 16 por 64, efetuarmos a soma de seus correspondentes, ou seja 4+6=10, podemos reparar que o número 10 está relacionado com o número 1024, que é o resultado da multiplicação 16x64.

A explicação é simples:

$16 = 2^4$ e $64 = 2^6$

$16x64 = 2^4 \times 2^6$

$16x64 = 2^{4+6}$

$16x64 = 2^{10}$

E, como $2^{10} = 1024$, segue que $16x64 = 1024$

Observe que esse método reduz uma conta de multiplicação a uma conta de adição. Se generalizarmos essa tabela a mais números, e não apenas a algumas potências naturais do número 2, poderíamos usá-la para multiplicar, dividir, elevar e extrair raízes, aplicando algumas propriedades.

Veja:

| | |
|---|---|
| $A^Z . A^Y = A^{Z+Y}$ | (reduz contas de multiplicação a contas de adição) |
| $A^Z / A^Y = A^{Z-Y}$ | (reduz contas de divisão a contas de subtração, quando A≠0) |
| $(A^z)^y = A^{Z.Y}$ | (reduz contas de potenciação a contas de multiplicação) |
| $\sqrt[z]{A} = A^{1/Z}$ | (reduz contas de radiciação a contas de divisão) |

O sucesso desse método (chamado **sistema de logaritmos**) deveu-se a uma idéia muito simples: a exploração das propriedades das potências.

Pode-se dizer que o nome **logaritmo** é uma nova denominação para **expoente**, conforme veremos a seguir.

## *Definição de logarítmo:*

Dado um número **b,** com b>0 e b≠1, sabemos que existe, para todo número **a**, com a>0, um único número real **x**, tal que

$$b^x = a$$

Nessas condições, chamamos o expoente x de logaritmo de a na base b e escrevemos:

$$x = \log_b a$$

Assim, por exemplo, como na potenciação sabemos que $2^3 = 8$, onde 2 é a **base**, 3 o **expoente** e 8 a **potência**, diremos que $\log_2 8 = 3$, ou seja 3 é o logaritmo de 8 na base 2.

É por isso que podemos entender **logaritmos** como sendo os **expoentes das potencias** de base positiva e diferente de 1 (um).

Na expressão **$\log_b a = x$**,

**b** é a **base**,

**a** é o **logaritmando,**

**x** é o **logarítmo**.

## *Condições de existência de um logaritmo*

Nesse ponto, é importantíssimo atentar para as **condições de existência** de uma **função logarítmica**, ou seja, **só existem** logaritmos de **logaritmandos positivos** e **bases também positivas e diferentes de 1.**

Sendo assim, na expressão **$\log_b a = x$**

**x** só existirá se: **$a>0$ e $b>0$ e $b\neq1$**

## *Logaritmos decimais*

**Logarítmos decimais** são os logaritmos de **base 10**. Eles são muito comuns e bastante usados em cálculos de juros e em estudos de concentrações químicas. Por convenção, não é necessário escrever a base 10. Assim quando encontrarmos alguma coisa como **log a**, saberemos que se trata do logaritmo de a na base 10.

$$\log a = \log_{10} a$$

## *Consequências da definição de logaritmo:*

**Consequência 1**
$\log_b b = 1$

**Consequência 2**
$\log_b 1 = 0$

**Consequência 3**
$\log_b b^\alpha = \alpha$

**Consequência 4**
$b^{\log_b a} = a$

**Consequência 5**
$Se\ \log_b a = \log_b c\ ,\ então\ \ a = c$

## *Equações logarítmicas*

Equações logarítmicas são equações que envolvem logaritmos. Resolver uma equação logarítmica é determinar o valor ou os valores da incógnita que tornam a sentença verdadeira.

Para resolver uma equação logarítmica, adotaremos o seguinte método:

*1º) Indicaremos as condições de existência;*

*2º) Resolveremos a equação;*

*3º) Faremos a verificação.*

***Exemplo 1***) Resolva $\log_{x-1} 6 = 1$

Restrição:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x - 1 \neq 1$

$x \neq 1 + 1$

$x \neq 2$

Resolução:

$\log_{x-1} 6 = 1$

$(x - 1)^1 = 6$

$x - 1 = 6$

$x = 6 + 1$

$x = 7$

Temos que $x = 7$, satisfazendo a condição de existência determinada pela restrição. Portanto, conjunto solução verdadeiro.

***Exemplo 2***) Resolva $\log_5 (x + 2) = 2$

Restrição:

$x + 2 > 0$

$x > -2$

Resolução:

$\log_5 (x + 2) = 2$

$x + 2 = 5^2$

$x + 2 = 25$

$x = 25 - 2$

$x = 23$

O conjunto solução $x = 23$, satisfaz a condição de existência $x > -2$. Portanto, conjunto solução verdadeiro.

*(Obs.: Utilizar outros exemplos do livro didático).*

**→Utilizar exercícios e situações-problema (mais simples) existentes no livro didático para fixar o conteúdo.**

## ***ATIVIDADE 2***

HABILIDADE RELACIONADA: Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo.

PRÉ-REQUISITOS: Atividade 1

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Utilizar problemas diversos para trabalhar logaritmos utilizando suas propriedades.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

### Propriedades dos logaritmos

Da definição de logaritmo e **sempre atendendo às condições de existência**, decorrem as seguintes propriedades:

**Propriedade 1 – Logaritmo do Produto**
$\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

**Propriedade 2 – Logaritmo do Quociente**

$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$

**Propriedade 3 – Logaritmo da Potência**

$\log_b A^{\alpha} = \alpha \, . \log_b A \quad (\forall \alpha, \ \ \alpha \in R)$

**Propriedade 4 – Mudança de Base**

$\log_p A = \frac{\log_b A}{\log_b p}$

Nunca é demais lembrar que devemos sempre tomar cuidado com as **condições de existência**.

Um logaritmo só existe se o **logaritmando** for um número positivo e a **base** for um número positivo diferente de 1 (um).

Nos exemplos a seguir utilize as propriedades dos logaritmos para resolver:

1) Se $\log_b a = 6$ e $\log_b c = 4$, calcule:

a) $\log_b (a \, . \, b)$

$\log_b (a \, . \, b) = \log_b a + \log_b c = 6 + 4 = 10$

b) $\log_b (a / b)$

$\log_b (a / b) = \log_b a - \log_b c = 6 - 4 = 2$

2) (UCS) Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, então $\log 12$ vale:

(A) $a+b$

(B) $2a+b$

(C) $a+2b$

(D) $a \cdot b$

(E) $\frac{a}{b}$

Resolução:

Começamos fatorando sempre o logaritmo pedido, neste caso o 12.

$\log 12$ então, $\log(2^2 \cdot 3)$

Agora devemos aplicar as propriedades operatórias:

$\log 2^2 + \log 3$ portanto, $2\log 2 + \log 3$

E substituímos os valores dados no enunciado:

2a+b, Resposta correta, letra "B".

3)Resolva a seguinte equação logarítmica: $\log_2 x + \log_2 (x – 2) = \log_2 8$

Restrição:

$x > 0$

$x – 2 > 0$

$x > 2$

$\log_2 x + \log_2 (x – 2) = \log_2 8$

$\log_2 x * (x – 2) = \log_2 8$

$x * (x – 2) = 8$

$x^2 – 2x – 8 = 0$

Aplicando Bháskara: $\Delta = 36$ e $x' = 4$

$x'' = – 2$

De acordo com as restrições, devemos considerar somente $x = 4$, tornando a solução verdadeira.

**<u>→Utilizar exercícios e situações-problema (mais simples) existentes no livro didático para fixar o conteúdo.</u>**

## ***ATIVIDADE 3***

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial. Apresentar o gráfico uma função logarítmica. Resolver problemas significativos utilizando a função logarítmica.

PRÉ-REQUISITOS: Função exponencial

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático; folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas

OBJETIVOS: Perceber a função logarítmica como a inversa da exponencial. Reconhecer gráfico da função logarítmica e resolver problemas envolvendo esse conteúdo.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

## GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1) Agora, preencha as tabelas com as coordenadas das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

| ***x*** | ***y = f(x) = 2^x*** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

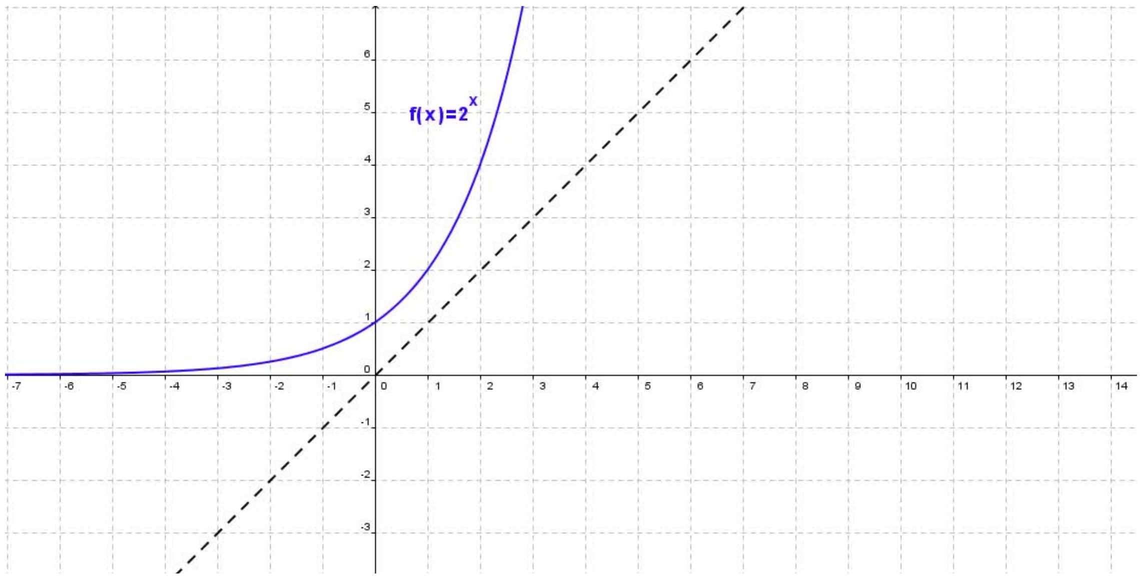
| ***x*** | ***y = g(x) = log₂ x*** |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | |
| 4 | |
| 8 | |
| 16 | |
| 32 | |
| 64 | |

2) Observe os resultados nas tabelas. O que você percebe em relação as coordenadas dos pontos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$?

*Obs.: A atividade anterior tem por objetivo deixar bastante evidente a relação inversa da qual a potenciação e o logaritmo desfrutam. Desse modo esperamos que, de posse das atividades e intervenções feitas até aqui, o aluno possa perceber tal relação.*

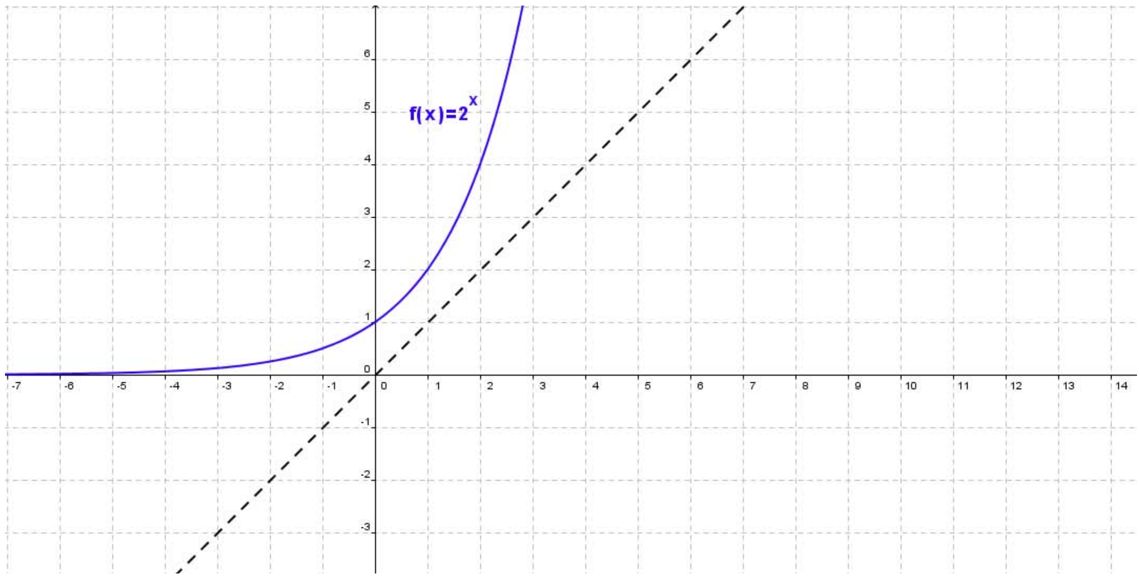
Vamos construir o gráfico da função logarítmica a partir do gráfico da função exponencial?

1) Observe a *Figura* a seguir. Nela estão plotados os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $y = x$.




Qual é a função inversa de $f(x) = 2^x$ ?

2) Lembrando da simetria existente entre o gráfico de duas funções inversas, faça um esboço do gráfico da função inversa de $f(x) = 2^x$, no plano cartesiano abaixo.



*FUNÇÃO LOGARÍTMICA*

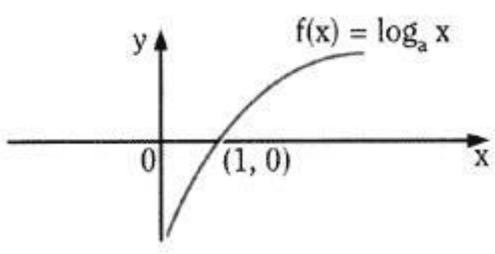
É toda função f: $\Re \rightarrow \Re$, que associa a cada x o logaritmo, na base b, de x:

$$f(x) = \log_b x$$

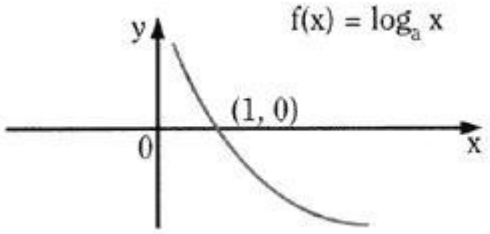
**Exemplos:** a) $f(x) = \log_3 x$ b) $g(x) = \log_{1/3} x$

*Gráficos da função logarítmica*

a) Função crescente (a > 1)




b) Função decrescente (0 < a < 1)




**Observações:**

a) O gráfico da função logarítmica passa sempre pelo ponto (1,0).

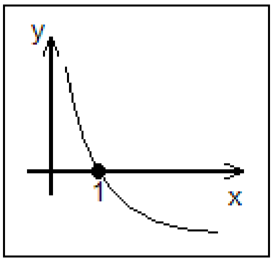
b) O gráfico nunca toca o eixo y e não ocupa pontos dos quadrantes II e III.

c) Quando a > 1, a função logarítmica é crescente ($x_1 > x_2 \log_a x_1 > \log_a x_2$).

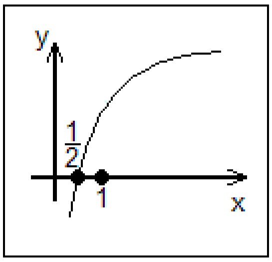
d) Quando 0 < a <1, a função logarítmica é decrescente ($x_1 > x_2 \log_a x_1 < \log_a x_2$).

**Exemplo: (UFRGS) A representação geométrica que melhor representa o gráfico da função real de variável real x, dada por** $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ **, é**

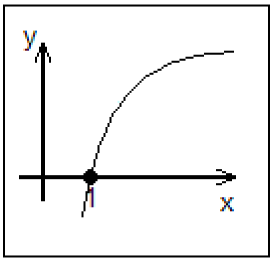
**(A)**



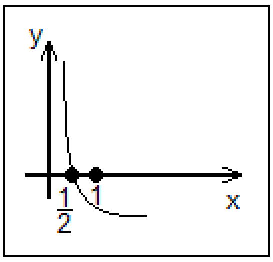

**(B)**



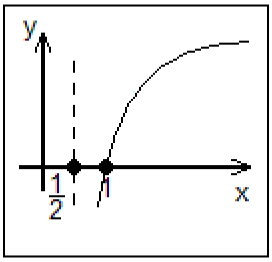

**(C)**




**(D)**




**(E)**




O enunciado nos diz que o logaritmo pedido possui base igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, sendo um valor entre 0 e 1 só pode ser um logaritmo decrescente.

Dentre as alternativas, somente as letras A e D são decrescentes, mas somente a alternativa A corta o eixo x no ponto 1.

**Resposta correta, letra A.**

*<u>Problemas envolvendo a função logarítmica</u>*

*<u>Exemplo 1:</u>* A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$$

Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, qual o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

*Resolução:*

Temos h(t) = 1,5 + log3(t+1). Como, h(t) = 3,5, então:

$1,5 + \log_3(t+1) = 3,5$

$\log_3(t+1) = 2$

$3^2 = t + 1$

$t + 1 = 9$

$t = 8$ anos

Exemplo 2: Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

*Resolução:*

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: $\boldsymbol{M = C * (1 + i)^t}$. De acordo com a situação problema, temos:

*M (montante) = 3500*
*C (capital) = 500*
*i (taxa) = 3,5% = 0,035*
*t = ?*

$M = C * (1 + i)^t$
$3500 = 500 * (1 + 0,035)^t$
$3500/500 = 1,035^t$
$1,035^t = 7$

Aplicando logaritmo

$\log 1,035^t = \log 7$

t * log 1,035 = log 7
t * 0,0149 = 0,8451
t = 0,8451 / 0,0149
t = 56,7

*O montante de R$ 3 500,00 será originado após 57 meses de aplicação.*

Exemplo 3: (UFFA) Uma das práticas mais prazerosas da relação humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. Supondo que o número de bactérias (N) por beijo (b) é determinado pela expressão N(b) = 500 . 2 (elevado a b), para que o número de bactérias seja 32000 você terá que dar quantos beijos?

Exemplo 4:

A charge acima faz referência à conhecida Lei Seca, a qual foi instituída para prevenir o número de acidentes e mortes no trânsito, e diminuir o número de pessoas alcoolizadas que dirigem veículos automotores.

Convidamos você a resolver o desafio abaixo e perceber que, mesmo nas mais variadas situações, não temos como fugir da Matemática.

**Desafio – Lei Seca**

A Lei 11705, de 2008, do Código de Transito Brasileiro, tem como objetivo proibir que motoristas dirijam alcoolizados. Aqueles que fizerem o teste de alcoolemia (bafômetro) e forem flagrados com 0,2 grama de álcool por litro de sangue, ou mais, terão que pagar uma multa, receberão 7 pontos na carteira de habilitação, perderão o direito de dirigir por um ano e ainda terão o veículo apreendido. Suponha que uma pessoa tenha em determinado momento 1,6 g/L de álcool no sangue e que esse valor decresça de acordo com a função $f(x) = 1{,}6 \cdot 2^{\left(-\frac{x}{2}\right)}$, em que t é o tempo em horas. Após parar de beber, quantas horas no mínimo são necessárias para que essa pessoa tenha 0,1 g/L de álcool no sangue?

**<u>→Utilizar exercícios e situações-problema (mais simples) existentes no livro didático para fixar o conteúdo.</u>**

# AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos ocorrerá durante todas as atividades (1, 2 e 3). Os alunos serão avaliados no momento da realização dos exercícios, bem como o envolvimento deles nas atividades. Serão observadas as dificuldades apresentadas e através dessa observação serão dadas explicações extras que possam auxiliá-los. Os alunos poderão trocar ideias entre si, um ajudando o outro.

A avaliação também será feita por meio de vistos nos cadernos referentes aos exercícios deixados para serem feitos em casa e também dos testes que serão aplicados, um individual, envolvendo as atividades 1 e 2, e outro em duplas, envolvendo a atividade 3. Para a realização de cada teste serão reservadas duas aulas de 50 minutos.

Através dessas avaliações, pode-se observar como foram desenvolvidas as competências trabalhadas e a compreensão dos alunos acerca dos conteúdos abordados.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto – Matemática: contexto e aplicações, volume 1 – São Paulo: Ática, 2010.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy – Matemática Fundamental - 2º grau: volume único – São Paulo: FTD, 1994.

ROTEIROS DE AÇÃO – Função Logarítmica - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

Endereços eletrônicos acessados de 13/02/2013 a 17/02/2013, citados ao longo do trabalho:

http://www.lourencocastanho.com.br/ativ_09/potenciacao.pdf

1bcpn.files.wordpress.com/.../**revisao**-matematica-**potencia**cao-e-radi...

http://www.sofazquemsabe.com/2011/07/logaritmos-definicao-conceitos-e.html

http://www.brasilescola.com/matematica/equacao-logaritmica-1.htm

http://www.colegioweb.com.br/matematica/graficos-da-funcao-logaritmica.html

http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/logaritmos/logaritmos_11_grafico_funcao_log.php