FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Matemática 2º Ano – 1º Bimestre/2013

Plano de Trabalho 2

Introdução à Geometria Espacial

Cursista: Izabel Leal Vieira

Tutor: Cláudio Rocha de Jesus

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por finalidade introduzir Geometria Espacial auxiliando o aluno a perceber como as forma geométricas estão presentes no dia-a-dia, dentro da própria sala de aula, em construções.

Este plano de trabalho será iniciado com ponto, reta e plano. Também será abordada a diferença entre polígonos e sólidos geométricos. O aluno irá trabalhar a planificação de poliedros e utilizar a relação de Euler.

É importante estimular o aluno a realmente compreender o que está sendo abordado, pois muitas vezes ele não vê a aplicabilidade de determinado conteúdo escolar na sua realidade, e com isso o aprendizado deixa de ser atrativo para ele.

Para trabalhar esse conteúdo serão necessários 10 tempos de 50 minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e mais 2 tempos de 50 minutos para a atividade de avaliação da aprendizagem (além da avaliação que será feita no momento da aula, durante a realização das atividades).

DESENVOLVIMENTO

<u>ATIVIDADE 1</u>

HABILIDADE RELACIONADA: Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial. Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria Plana

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folhas xerocadas, quadro, livro didático.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Auxiliar na compreensão dos conceitos primitivos de Geometria Espacial bem como reconhecer posições de reta e plano no espaço. Distinguir polígonos de sólidos geométricos

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

<u>Geometria Espacial</u>

Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, em que estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões. Essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais.

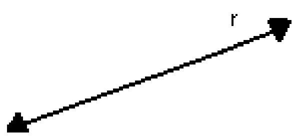
→ Conceitos primitivos

São conceitos primitivos (e, portanto, aceitos sem definição) na Geometria espacial os conceitos de ponto, reta e plano. Habitualmente, usamos a seguinte notação:

- **pontos**: letras maiúsculas do nosso alfabeto.

O ponto pode ser pensado como uma estrela no céu ou o furo de uma agulha em um tecido, ou a cabeça de um alfinete.

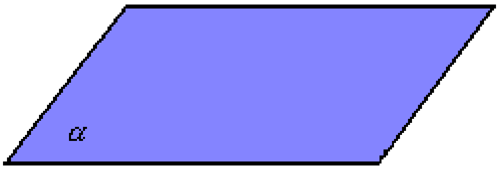
- **retas**: letras minúsculas do nosso alfabeto.



Já a reta pode ser associada a linha do horizonte e os segmentos de reta seriam como as cordas de um violão.

- **planos**: letras minúsculas do alfabeto grego.

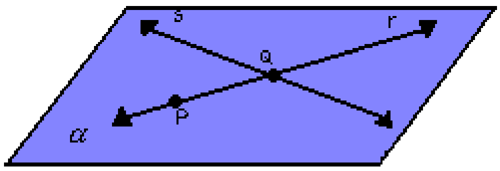


O plano se assemelha ao tampo de uma mesa, à superfície de uma parede, à capa de um livro. (É preciso cuidar para que o aluno perceba a infinitude do plano. Daí, a ideia de expansão.).

Observação: Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Por exemplo, da figura a seguir, podemos escrever:



$P \in r$

$Q \in s \cap r$

$s \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$

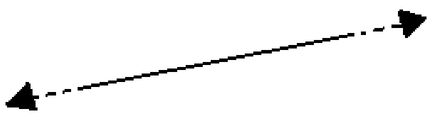
→ *Axiomas*

Axiomas, ou postulados (**P**), são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.

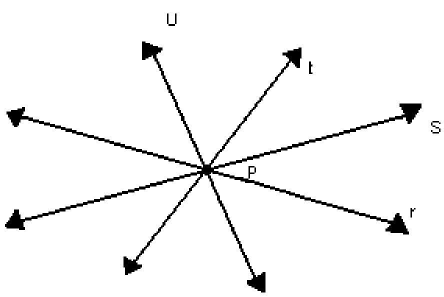
Temos como axioma fundamental: *existem infinitos pontos, retas e planos.*

→ Postulados sobre pontos e retas

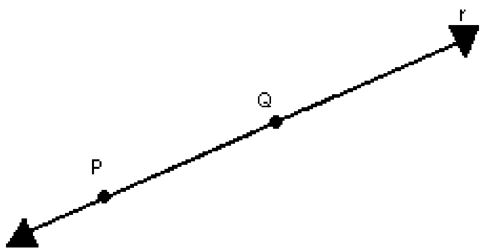
P_1) A reta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.



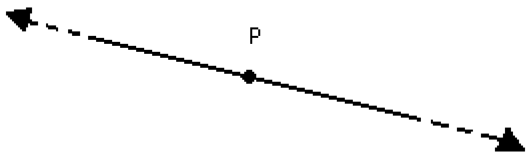
P_2) Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.



P_3) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

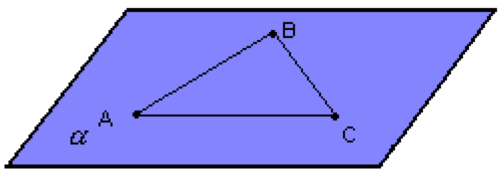


P_4) Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semi-retas.



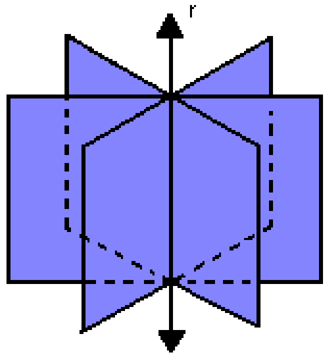
→ Postulados sobre o plano e o espaço

P_5) Por três pontos não-colineares passa um único plano.



P_6) O plano é infinito, isto é, ilimitado.

P_7) Por uma reta pode ser traçada uma infinidade de planos.

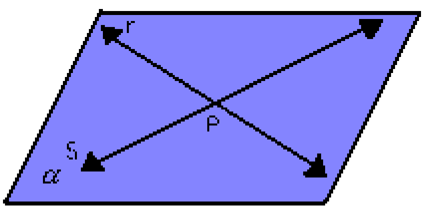


P_8) Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semi-planos.*

P_9) Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços.

<u>→ Posições relativas de duas retas</u>

No espaço, duas retas distintas podem ser c*oncorrentes, paralelas ou reversas:*

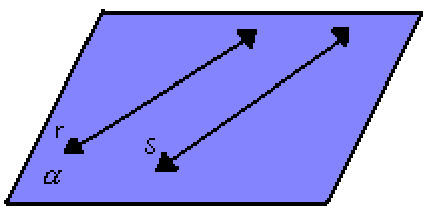


Concorrentes

$r \cap s = \{P\}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

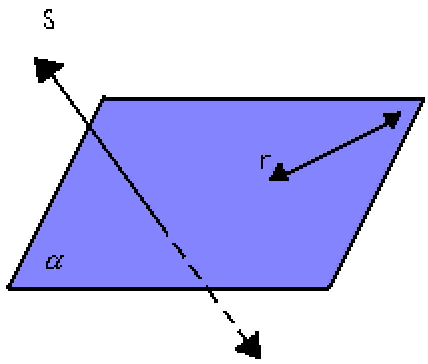


Paralelas

$r \cap s = \{\ \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$



Re *versas*

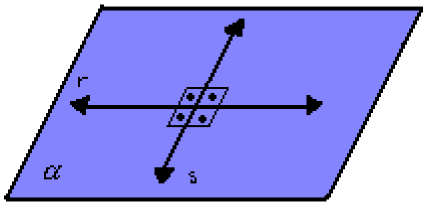
$r \cap s = \{\ \}$

não existe plano que copntenha

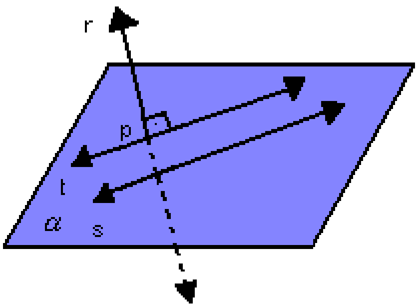
r e s simultanea mente

Temos que considerar dois casos particulares:

- retas perpendiculares: $r \perp s$



- retas ortogonais: $r \underline{\perp} s$



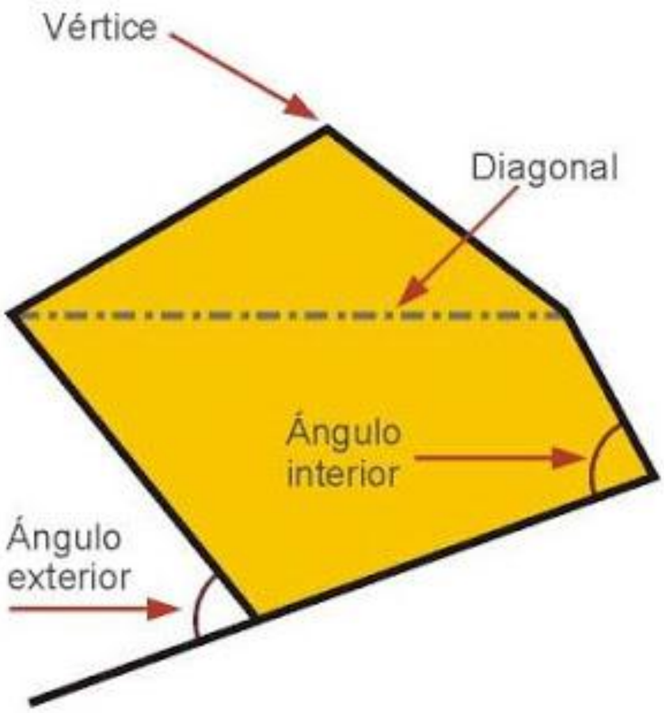
$r \perp t$ e $r \underline{\perp} s \Rightarrow t \mathbin{//} s$

$t \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

<u>→ Polígonos e poliedros</u>

Antes de estudarmos os sólidos geométricos, convém distinguir sólidos geométricos de polígonos.



Polígonos são figuras geométricas planas limitadas por linhas fechadas. Neste caso possui duas dimensões, comprimento e largura.
Um polígono tem vértices, lados, ângulos e diagonais.

Um polígono é *regular* se todos os seus lados tiverem o mesmo comprimento. Se isso não acontecer o polígono é *irregular!*

São imensos os polígonos conhecidos:

Número de lados – Polígono

No. de lados	Polígono	No. de lados	Polígono
1	não existe	11	undecágono
2	não existe	12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octadecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

Sólidos geométricos são regiões do espaço limitadas por uma superfície fechada e que contém três dimensões, sendo elas:

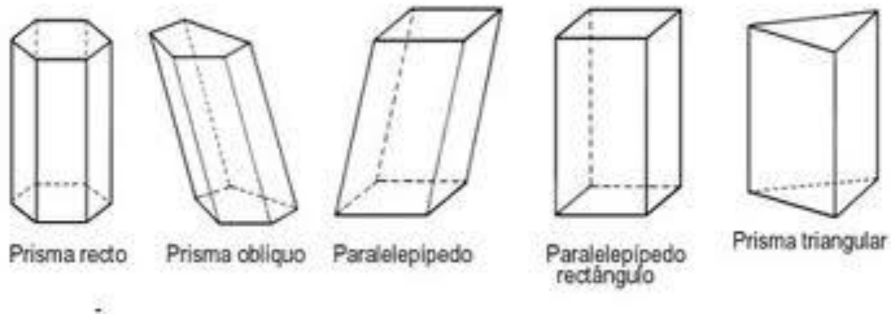
- largura
- altura
- comprimento.

Há dois tipos de sólidos geométricos.

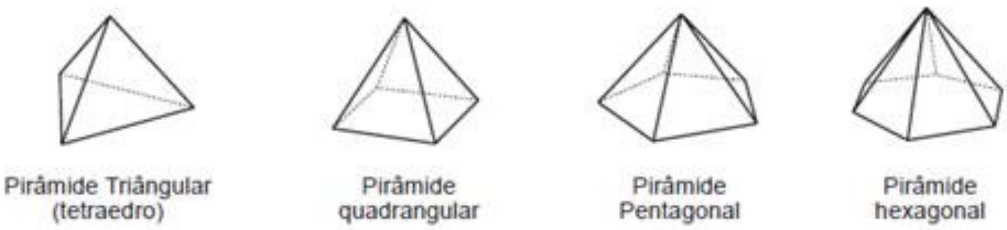
A- Poliedros - São todos os sólidos que têm superfícies planas.

Podemos observar três outros conjuntos de sólidos:

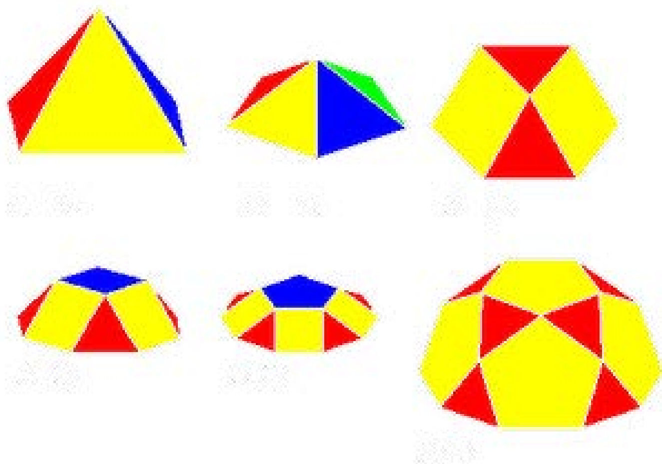
- **os prismas**



- **as pirâmides**

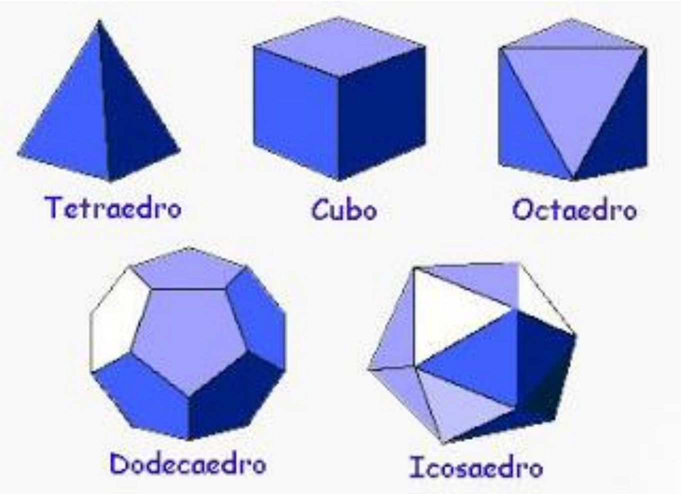


- **os outros poliedros**.



Alguns poliedros têm todas as faces geometricamente iguais *(são polígonos regulares geometricamente iguais)* e em cada um dos seus

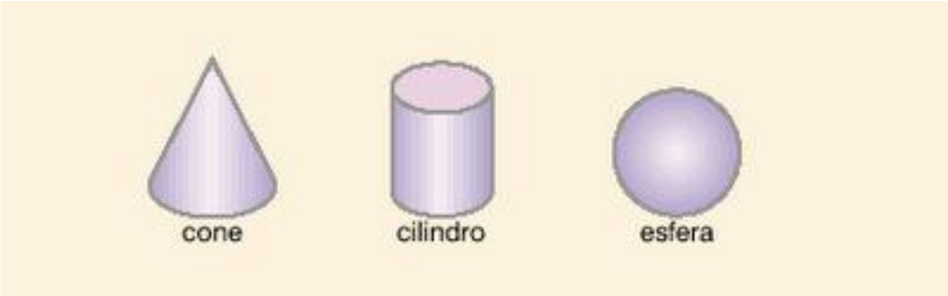
vértices encontra-se o mesmo número de arestas.
A estes poliedros chamamos Poliedros Regulares. Estes são também conhecidos por Sólidos Platônicos.



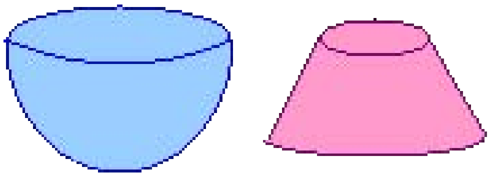
B- Não Poliedros - São os sólidos que possuem pelo menos uma superfície curva.

Os não poliedros agrupam-se em quatro grupos:

- **Cilindros, Cones, Esferas:**



- **Outros sólidos não poliedros:**



<u>**→Utilizar exercícios e situações-problema existentes no livro didático para fixar o conteúdo.**</u>

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações. Identificar e nomear os poliedros regulares.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria Plana

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Sala de informática, livro didático, folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas

OBJETIVOS: Relacionar os poliedros com suas planificações, bem como identificá-los e nomeá-los. Ver a aplicação da Geometria Espacial na arquitetura.

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

Planificações

→ Levar os alunos para a sala de informática para visualizarem as planificações de alguns poliedros e corpos redondos. Utilizar as planificações do site abaixo disponível no curso de aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ:

http://www.ocw.unicamp.br/fileadmin/user_upload/cursos/au909/CDgeo2/serverV3.swf

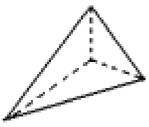
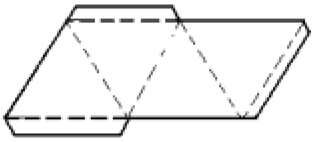
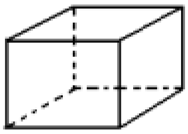
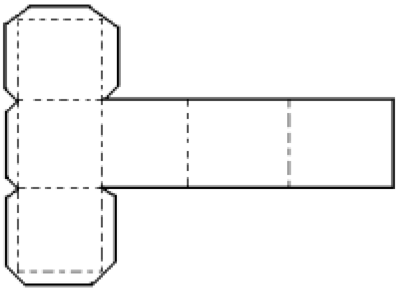
→ Mostrar ao aluno algumas aplicações da Geometria Espacial na Arquitetura. Ver em:

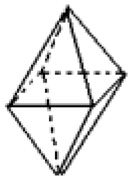
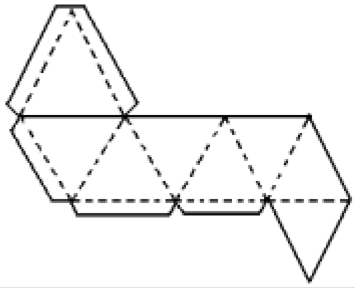
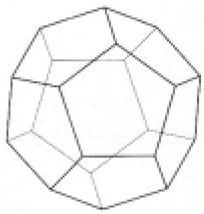
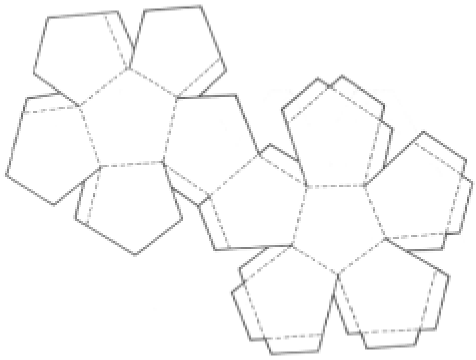
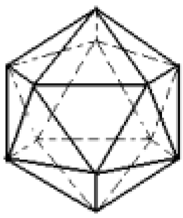
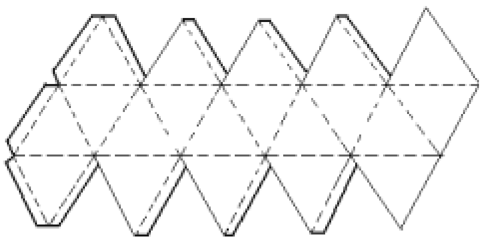
http://www.ocw.unicamp.br/fileadmin/user_upload/cursos/au909/CDgeo2/serverV3.swf

→ *Poliedros regulares*

Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares:

Poliedro	**Planificação**	**Elementos**
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas

 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

→ Construir pelo menos dois dos poliedros com os alunos: o tetraedro e o hexaedro.

ATIVIDADE 3

HABILIDADE RELACIONADA: Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler).

PRÉ-REQUISITOS: Geometria Plana

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, quadro.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

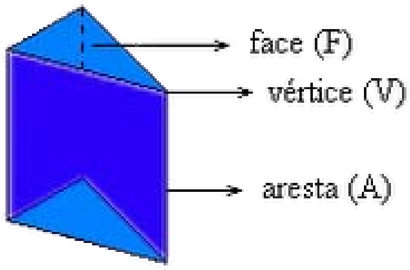
OBJETIVOS: Resolver problemas envolvendo a Relação de Euler

METODOLOGIA ADOTADA:

Veja abaixo.

Relação de Euler

Existe uma relação válida para todos os poliedros: é a *Relação de Euler*, descoberta pelo matemático suíço Euler. A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos. Essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro. A fórmula criada por Euler é a seguinte:



Nº FACES (F) + Nº VÉRTICES (V) = Nº ARESTAS (A) + 2

Ou seja, $V - A + F = 2$

Veja a aplicação nos exemplos abaixo:

***Exemplo 1*)** Determine o número de faces de um sólido que possui 10 arestas e 6 vértices.

Resolução:

$V – A + F = 2$

$6 – 10 + F = 2$

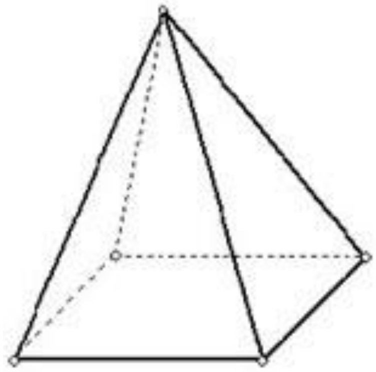
$–4 + F = 2$

$F = 4 + 2$

$F = 6$

Portanto, o sólido possui 6 faces.

***Exemplo 2*)** Determine o número de vértices da pirâmide quadrangular a seguir:



Visivelmente podemos afirmar que a pirâmide possui 5 vértices, 5 faces e 8 arestas. Vamos agora demonstrar que a relação de Euler é válida na determinação dos elementos da pirâmide de base quadrangular.

Resolução:

Vértices

V – A + F = 2

V – 8 + 5 = 2

V = 2 + 3

V = 5

Arestas

V – A + F = 2

5 – A + 5 = 2

–A = 2 – 10

–A = –8 x (–1)

A = 8

Faces

V – A + F = 2

5 – 8 + F = 2

–3 + F = 2

$F = 2 + 3$

$F = 5$

Podemos notar que a relação de Euler é realmente válida na determinação dos elementos de um sólido convexo.

***Exemplo 3*)** O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Determine, utilizando a relação de Euler, o número de faces do poliedro.

Resolução:

Considerando que o número de faces é igual ao número de vértices, podemos representar os valores desconhecidos pela incógnita x. Dessa forma, $F = x$ e $V = x$.

Aplicando a relação de Euler:

$V – A + F = 2$

$x – 22 + x = 2$

$2x = 2 + 22$

$2x = 24$

$x = 12$

Portanto, o número de faces do poliedro com 22 arestas é igual a12.

→Utilizar exercícios e situações-problema existentes no livro didático para fixar o conteúdo.

AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos ocorrerá durante todas as atividades (1, 2 e 3). Os alunos serão avaliados no momento da realização dos exercícios, bem como o envolvimento deles nas atividades. Serão observadas as dificuldades apresentadas e através dessa observação serão dadas explicações extras que possam auxiliá-los. Os alunos poderão trocar ideias entre si, um ajudando o outro.

A avaliação também será feita por meio de vistos nos cadernos referentes aos exercícios deixados para serem feitos em casa e também do teste individual que será aplicado, envolvendo as atividades 1, 2 e 3. Para a realização deste teste serão destinadas duas aulas de 50 minutos.

Através dessas avaliações, pode-se observar como foram desenvolvidas as competências trabalhadas e a compreensão dos alunos acerca dos conteúdos abordados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy – Matemática Fundamental - 2º grau: volume único – São Paulo: FTD, 1994.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática Completa-2ª série Ensino Médio.2ª ed. FTD, São Paulo: 2005.

ROTEIROS DE AÇÃO – Introdução à Geometria Espacial - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22.

Endereços eletrônicos acessados de 26/02/2013 a 03/03/2013, citados ao longo do trabalho:

http://sempreamathematicarcommusica.blogspot.com.br/2012/10/poligonos-poliedros-relacao-de.html

http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-espacial.htm

http://www.brasilescola.com/matematica/relacao-euler.htm

http://www.ocw.unicamp.br/fileadmin/user_upload/cursos/au909/CDgeo2/serverV3.swf

http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial8.php