

Curso de Formação Continuada para professores de matemática SEEDUC/CECIERJ

Tutora: Daiana da Silva Leite

Grupo: 2

Cursista: Jozilaine Moreira Franklin dos Santos

Série: 2ª série do Ensino Médio

PLANO DE AULA

Assunto: Introdução à Geometria Espacial

Tema: Conceitos primitivos de Geometria Espacial

Professora: Jozilaine Moreira Franklin dos Santos

Duração estimada: 200 minutos

INTRODUÇÃO

A Geometria Espacial Euclidiana funciona como uma ampliação da Geometria Plana Euclidiana e trata do estudo de objetos espaciais e de suas propriedades e elementos. Apesar de a Geometria Espacial estar bem perto de nós nas formas ao nosso redor e de os alunos no Ensino Fundamental já estarem familiarizados com muitas figuras geométricas tridimensionais como cubo, cone, cilindro, pirâmide, entre outras, um estudo mais aprofundado dessas figuras geométricas e de suas propriedades se consolida no Ensino Médio. Mesmo a Geometria Espacial tendo suas bases na Geometria Plana, a passagem de uma para a outra não se efetiva sem alguma dificuldade por parte dos alunos. Alguns termos passam a ter outras definições (como o caso de paralelismo entre retas no espaço) e seu ensino também passa a ter outras características. Assim o objetivo desse plano de aula é apresentar uma forma diferente de se trabalhar os conceitos primitivos de Geometria Espacial, fazendo com que os alunos sejam capazes de identificar e solucionar problemas em que esses assuntos estejam envolvidos.

DESENVOLVIMENTO

Vamos iniciar falando de alguns conceitos primitivos da Geometria Espacial, os conceitos

de ponto, reta e plano.

O **ponto** pode ser pensado como uma estrela no céu ou o furo de uma agulha em um tecido, ou a cabeça de um alfinete.



A **reta** pode ser associada à linha do horizonte (infinita) e os segmentos de reta (finito) seriam como as cordas de um violão.

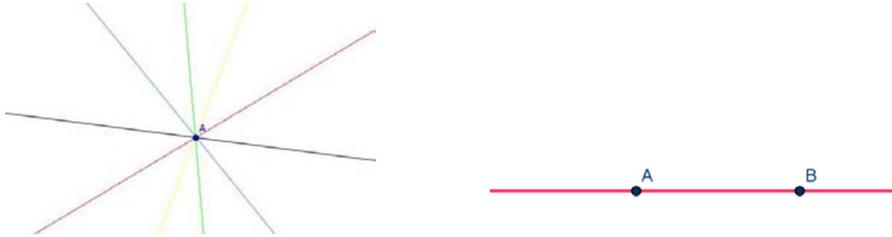


O **plano** se assemelha ao tampo de uma mesa, à superfície de uma parede, à capa de um livro. É preciso cuidar para que o aluno perceba que o plano é infinito.

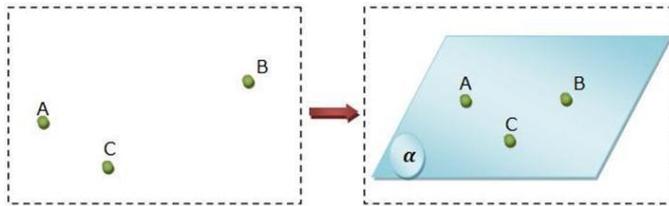


Assim, como a Geometria Plana é tomada como ponto de partida de nossa trajetória rumo à Geometria Espacial, é preciso retomar algumas noções básicas de pontos e retas.

- Por um ponto, podemos traçar uma infinidade de retas.
- Dados dois pontos distintos no espaço, existe uma e somente uma reta passando por eles.



- Dada uma reta no espaço, há pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.
- Três pontos do espaço não colineares determinam um único plano.

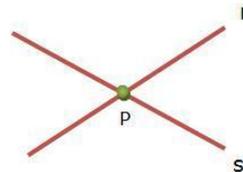


- Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.
- Se uma reta tem dois pontos distintos num plano então ela está contida neste plano.
- Uma reta e um ponto, não pertencente a ela, determinam um único plano que os contém.

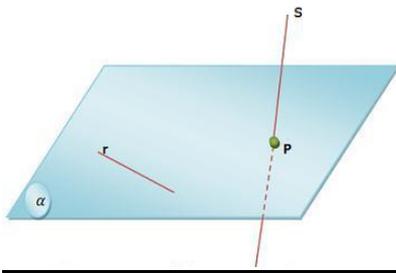
As muitas posições envolvendo retas e planos

- Duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum. Como existe uma única reta que passa por dois pontos, temos que se duas retas têm dois pontos em comum, então todos serão comuns, isto é, serão a mesma reta (coincidentes).

- Se as retas estão no mesmo plano, são ditas coplanares. As retas coplanares são ditas paralelas se não possuem ponto em comum, ou são ditas concorrentes caso contrário. As retas concorrentes podem ser perpendiculares, se formarem um ângulo de 90° ou secantes, caso contrário.



- Se não houver um mesmo plano que contenha duas retas, elas são chamadas de reversas (ortogonais ou não).



Um resumo dessas posições pode ser ilustrado com o seguinte esquema:



Conteúdos conceituais e atitudinais relacionados nesse plano de aula

Conceituais: Conceitos primitivos de Geometria Espacial

Atitudinais: Interesse pelo conhecimento e pela compreensão do conteúdo

Conhecimentos prévios

Ponto, reta e plano e conhecimento prévio do software Geogebra.

Estratégias e recursos da aula

Essas atividades foram elaboradas procurando fazer com que o aluno construa o conhecimento sobre o assunto abordado. Essas atividades podem ser propostas em grupos de dois alunos, visando à troca de informação entre eles. Como recurso pode-se utilizar o quadro branco, ou de giz, folha de atividades, papel, lápis, régua, compasso, transferidor, materiais concretos e o software Geogebra.

TAREFAS

Habilidades e Competências relacionadas ao currículo mínimo:

- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial.
- Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

TAREFA 1

Atividade baseada no Roteiro de Ação 2 - Parte I.

O objetivo dessa tarefa é trabalhar as relações entre duas retas, reta e plano e entre dois planos.

1º - Abra o Geogebra. Aparecerá uma tela com os eixos x e y traçados e algumas linhas tracejadas em cinza. Vá ao menu Exibir e desmarque as opções Eixos e Malha.

2º - Com a ferramenta *Reta definida por dois pontos* , trace duas retas quaisquer.

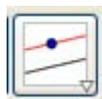
3º - Finalizada a etapa anterior verifique se as retas se interceptam em algum ponto, ou seja, elas se cruzam em algum lugar. Discuta com seu colega sobre isso.

4º - Se você estiver com dúvidas quanto à resposta para o item anterior, clique na

ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , que fica na segunda janela da esquerda para a direita, e selecione as retas que você traçou. Observe se na Janela de Álgebra há algo novo em Objetos Dependentes. E então, as retas se interceptam ou não?

Atenção: Dizemos que duas retas r e s quaisquer são concorrentes (ou secantes) se e somente se elas são coplanares e possuem apenas um ponto em comum.

5º - Selecione uma das retas já traçadas e delete-a, assim como seus pontos. Com a



ferramenta *Reta Paralela*, que fica na quarta janela da esquerda para a direita, trace uma reta paralela à reta que restou na tela. Elas se interceptam em algum ponto? Se for o caso, utilize a ferramenta *Interseção entre Dois Objetos*.

Atenção: Dizemos que duas retas quaisquer r e s são paralelas se e somente se elas são coplanares e não possuem pontos em comum. Consideramos duas retas coplanares, quando existe um plano que as contém.

6º - Arraste uma das retas e coloque-a exatamente sobre a outra reta. Feito isso, verifique quantos pontos elas terão em comum.

Atenção: Podemos dizer que duas retas r e s são coincidentes se correspondem ao mesmo conjunto de pontos.



7º - Escolha uma das retas traçadas, e usando a ferramenta *Reta Perpendicular*, trace uma reta perpendicular. Podemos afirmar que a reta perpendicular e as paralelas são concorrentes? Discuta com seu colega sobre isso.

8º - Vamos medir o ângulo formado pelas retas paralelas e a reta perpendicular.

Na oitava janela, marque a opção *Ângulo*. Uma dica: clique primeiro em uma das paralelas e depois na perpendicular. Que ângulo é formado pelas retas paralelas e a reta perpendicular?

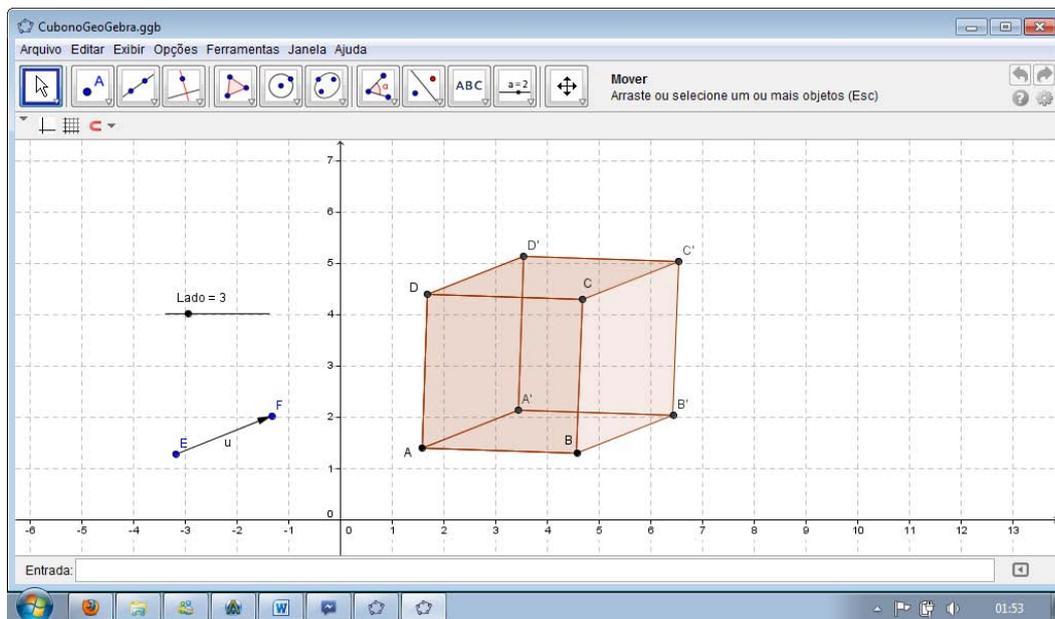
Atenção: Se duas retas concorrentes r e s formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares entre si.

TAREFA 2

Atividade baseada no Roteiro de Ação 2 - Parte II.

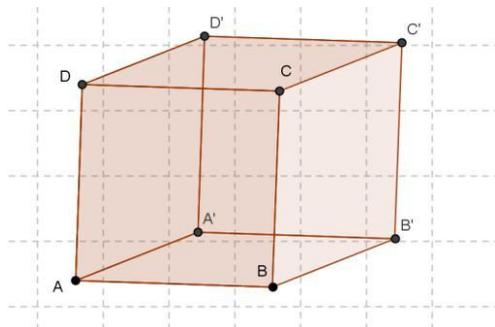
O objetivo dessa tarefa é trabalhar as relações entre duas retas, reta e plano e entre dois planos.

1º - Abra o arquivo "CubonoGeoGebra.ggb". Você pode aumentar o cubo, arrastando o seletor Lado = 3, ou até mesmo rotacioná-lo. Para isso, basta mover o vetor os pontos E ou F no vetor u .



2º - Agora, observe os segmentos de reta que formam o cubo e responda:

- Quais são paralelos?
- Quais são concorrentes?
- Quais são perpendiculares?



3º - E o que podemos afirmar quanto aos segmentos de reta AB e $B'C'$? Eles se enquadram em alguma das posições estudadas anteriormente?

4º - Considere os pontos A e B e o plano $ABB'A'$. Estes dois pontos pertencem ao plano

$ABB'A'$? Então, podemos afirmar que o segmento de reta AB está contido neste plano?

5º - Se tomarmos o segmento de reta CD , podemos dizer que ele intercepta o plano A em algum ponto? Que tal discutir com seu colega?

6º - O segmento BC intercepta o plano A em algum ponto? Onde?

Observe o cubo no Geogebra e responda:

- Quais planos são paralelos ao plano $ABB'A'$?
- Quais planos são concorrentes ou secantes ao plano $ABB'A'$?
- Existe algum plano coincidente?

TAREFA 3

O objetivo dessa tarefa é recordar as relações entre retas e planos estudadas nesse plano de aula.

Essa atividade deverá ser feita em dupla. Cada dupla deverá realizar a construção das diversas relações entre retas e planos através de cartaz ou maquete para ser empregada numa apresentação para alunos de outras turmas. Os materiais a serem utilizados são papel, lápis, compasso, transferidor, régua, cartolina, etc.

AVALIAÇÃO

Habilidades e Competências relacionadas ao Currículo Mínimo:

- Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial.
- Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

- Realização de listas de exercícios (vale 0.5 ponto).

1) (PUCCAMP) Considere as afirmações a seguir.

I. Duas retas distintas determinam um plano.

II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro. É correto afirmar que

- a) apenas II é verdadeira.
- b) apenas III é verdadeira.
- c) apenas I e II são verdadeiras.
- d) apenas I e III são verdadeiras.
- e) I, II e III são verdadeiras.

2) (UNESP) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s , reversas. Seja t a perpendicular comum a r e a s . Então:

- a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
- b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
- c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
- d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s .
- e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

3) Classifique em Verdadeira (V) ou Falsa (F) cada uma das afirmações abaixo.

- a) () Se uma reta é perpendicular a um plano então ela é perpendicular ou ortogonal às retas desse plano.
- b) () Se duas retas r e s têm um único ponto em comum e r está contida em um plano α , então s e α têm um único ponto em comum.
- c) () Duas retas paralelas distintas determinam um plano.
- d) () Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.

4) (PUC – SP) Assinale a afirmação verdadeira:

- a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
- b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.
- c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
- d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.
- e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

5) Assinale a alternativa incorreta.

- a) Todo plano contém, no mínimo, três pontos não colineares.
- b) Dois planos secantes têm em comum uma reta.
- c) Uma reta separa um plano em dois semiplanos.
- d) Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

6) (FAAP - SP) Duas retas são reversas quando:

- a) não existe plano que contém ambas
- b) existe um único plano que as contém
- c) não se interceptam
- d) não são paralelas
- e) são paralelas, mas estão contidos em planos distintos

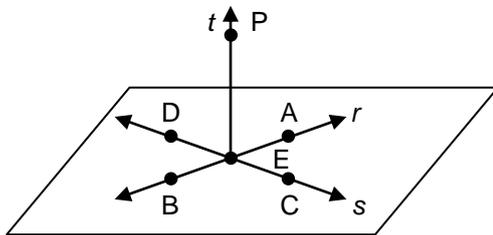
7) (Mackenzie - SP) Se um dos lados de um ângulo reto é paralelo a um plano e o outro lado não é perpendicular a esse plano, a projeção ortogonal do ângulo sobre o plano:

- a) é um ângulo reto
- b) é um ângulo agudo
- c) é um ângulo obtuso
- d) depende da posição do plano
- e) nenhuma das anteriores

8) Seja r uma reta perpendicular a um plano α e P o pé da perpendicular. Sejam A um ponto de α distinto de P tal que $AP = 4$ m e R um ponto r tal que $\widehat{RAP} = 60^\circ$. Qual a medida de \overline{AR} ?

9) Dois planos secantes α e β são tais que $\alpha \cap \beta = \{r\}$. Se $P \in r$, $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ sem que A e B estejam em r , $AB = 4$ cm, $AP = 5$ cm e $\widehat{PAB} = 60^\circ$, determine o perímetro do polígono PAB .

10) Na figura, E é o ponto de interseção entre as retas r , s e t . Os ângulos \widehat{AEP} e \widehat{CEP} são retos, $DE = 2$ cm, $DP = 5$ cm, $EA = 4$ cm e $EC = 8$ cm. Se o triângulo PAC é retângulo em A , determine o seu perímetro.



- Realização de uma mini "feira", onde os alunos através de cartazes e outros artifícios apresentarão o conteúdo assimilado a outras turmas (vale 1.0 ponto).

BIBLIOGRAFIA

- Secretaria de Estado de Educação. Disponível em <<http://projetoeduc.cecierj.edu.br>> Acessado em 01 de abril de 2013 .
- [DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações](#). Volume único. São Paulo: Ática, 2000