FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: Colégio Estadual Dr. Máximo de Azevedo
PROFESSOR: Alessandra do Nascimento Pereira Mamedes
MATRÍCULA: 09197245
SÉRIE: 9º ano
GRUPO: 1
TUTOR (A): Emílio Rubem Batista Júnior

PLANO DE TRABALHO SOBRE:

EQUAÇÃO DO 2º GRAU.

[Alessandra do Nascimento Pereira Mamedes]

[les-sandra@hotmail.com]

1. Introdução:

Uma equação é uma expressão matemática que possui em sua composição, incógnitas, coeficientes, expoentes e um sinal de igualdade. As equações são caracterizadas de acordo com o maior expoente de uma das incógnitas.
Denomina-se equação do segundo grau, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde x é a incógnita e a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, onde a, b e c são coeficientes da equação. Observe que o maior índice da incógnita na equação é igual a dois e é isto que a define como sendo uma equação do segundo grau. Quando $b = 0$ ou $c = 0$ tem-se uma equação do 2° grau incompleta.
A resolução de uma equação do segundo grau consiste em obtermos os possíveis valores reais para a incógnita x, que torne a sentença matemática uma equação verdadeira. Tais valores são a raiz da equação. Uma equação do 2º grau pode ter até duas soluções.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

Antes de iniciar equações do 2º grau farei uma revisão de alguns conteúdos como: potenciação, radiciação, áreas, produtos notáveis e frações.

Em seguida, será apresentado um pouco da história da equação de 2º grau e dos problemas que ela permitiu resolver em diversos lugares do planeta.

Aplicação do roteiro de ação 1: Estudando problemas com duas soluções possíveis.

-Área de conhecimento: Matemática

-Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.

-Tempo de duração: 2 horas/aula

-Recursos educacionais utilizados: Folha de atividades

-Organização da turma: A turma estará disposta em grupos (de 3 a 4 alunos) para interagir entre si mediante a explicação dada, trabalhando em conjunto para fazer a construção do roteiro 1.

-Objetivos: Construir o conceito de Equação do 2º grau através da interpretação de problemas com duas soluções possíveis.

-Metodologia adotada: Orientar a turma a realizar o roteiro seguindo os passos descritos nas atividades, levando os alunos a elaborarem e construírem a equação.

Atividades:

Atividade 1

Vamos ver um dos problemas proposto no livro Al-jabr:

“Dividir 10 em duas partes de modo que a soma dos produtos obtidos, multiplicando cada parte por si mesma, seja igual a 58.”

1. Leu o problema proposto no livro Al-jabr com bastante atenção? Então, você conseguiria pensar em dois números naturais que dividam o número 10 em duas partes? Quais seriam esses números?

2. Apresente a soma da multiplicação de cada parte por si mesma.

3. Deu 58?

Se você ainda não conseguiu encontrar o par de números que desejamos, não desanime. Realmente não é algo tão simples. Mas vamos tentar mais um pouco. Afinal, não são tantos os pares de números possíveis.

4. Com a ajuda de seus colegas e de seu professor, faça novas tentativas até encontrar o par de números que procuramos. Registre suas tentativas no espaço a seguir.

5. Agora que você encontrou o par de números procurado, vamos representar esse problema por meio de uma equação. Que equação seria essa? Reflita com seus colegas e registre as conclusões

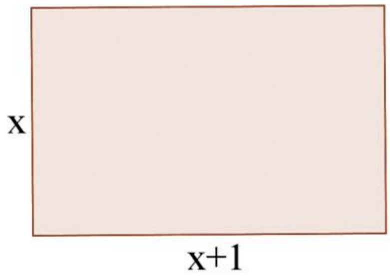
6. Vamos testar a solução que você encontrou na equação $2x - 10x + 21 = 0$? Ou seja, substitua a incógnita x pelos números que você encontrou (um de cada vez) e verifique se a igualdade da equação é verdadeira. Registre suas conclusões.

Vamos pensar agora em outro problema que também envolve uma equação de 2º grau de uma forma um pouco diferente da que você viu acima?

Uma sala de aula retangular tem $20m^2$ de área. Qual a medida de cada lado dessa sala, se a medida da base supera a medida da altura em 1m?

7. Desenhe uma figura que represente a situação do problema descrito acima. Junte-se aos seus amigos para pensar e desenhe a seguir a figura que vocês conceberam!

   Talvez vocês tenham encontrado uma figura como a que está a seguir:



8. Você consegue descobrir a medida dos seus lados? Tente vários números até conseguir, assim como fez para o problema anterior. Registre suas tentativas no espaço a seguir.
9. Agora, assim como no problema anterior, escreva a forma algébrica da área dessa sala retangular. Discuta sobre isso com seus colegas e registre que tipo de equação você encontrou.

___

___

10. Agora, substitua o valor de x, que você encontrou para a altura desse retângulo, na equação do 2° grau que acabou de encontrar. O que aconteceu?

___

___

11. Você acha que essa equação pode ser considerada representação, na forma algébrica, do problema de área descrito acima? Justifique sua resposta.

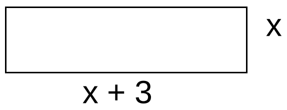
___

___

Situações enriquecedoras

Os alunos serão reunidos em grupo de 3 alunos, onde cada grupo terá que traduzir as sentenças a seguir por meio de equações e resolvê-las:

1. A área de um quadrado de lado x é igual a 64 cm².
2. Um retângulo tem área igual a 242 cm² e o seu lado maior é o dobro do menor.
3. A área de um triângulo é 18 cm² e sua base tem a mesma medida de sua altura.
4. A área do retângulo representado pela figura abaixo é igual a 10 cm².



Será pedido como trabalho em grupo de quatro alunos que cada grupo imagine, invente, crie e resolva cinco situações-problema envolvendo equação do 2º grau. Após a elaboração, cada grupo explicará detalhadamente os problemas formulados à classe.

Aplicação do roteiro de ação 3: Completando os quadrados.

-Área de conhecimento: Matemática

-Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, cálculo da área de figuras planas, resolução de equações do 1º grau, conceito de equações do 2º grau e produtos notáveis.

-Tempo de duração: 2 horas/aula

-Recursos educacionais utilizados: Folha de atividades e computador com o software de Geometria Dinâmica Geogebra.

-Organização da turma: A turma estará disposta em grupos (de 3 a 4 alunos) para interagir entre si mediante a explicação dada, trabalhando em conjunto para fazer a construção do roteiro 3.

-Objetivos: Resolver um problema modelado por uma equação do 2º grau, utilizando o método “completar quadrados”.

-Metodologia adotada: Fazer a construção do roteiro passo a passo com eles, explicando possíveis dúvidas que possam surgir, utilizando os próprios questionamentos do roteiro forçando-os a pensar e a questionarem entre si até a conclusão do mesmo.

Atividades:

Você se lembra do famoso matemático e astrônomo Al-Khwarizmi que comentamos no primeiro roteiro? Então, ele propôs um interessante método para resolver equações do 2° grau, conhecido hoje em dia como "Completar quadrados".

Vamos conhecê-lo? Para isso, que tal pensarmos em uma nova situação-problema?

Senhor Ricardo quer construir uma caixa d'água nova para sua casa. Ele quer que essa nova caixa tenha a base quadrada, altura de 1m e que sua superfície (sem a tampa) tenha $5m^2$ de área total. Mas, não sabe qual o tamanho da base quadrada que deve tomar. Vamos ajudá-lo a construir essa caixa d'água?!

Observe a Figura I que mostra uma imagem da caixa d'água.

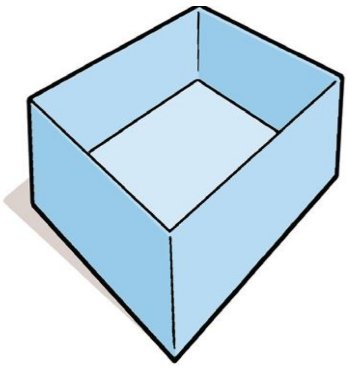


Figura I: Caixa d'água que senhor Ricardo deseja construir

1. Você saberia como calcular a área total da superfície dessa caixa? Converse com seus colegas e descubra junto com eles! Registre as conclusões.

2. Você acha que a Figura II abaixo pode lhe auxiliar na tarefa de calcular essa área? De que forma?

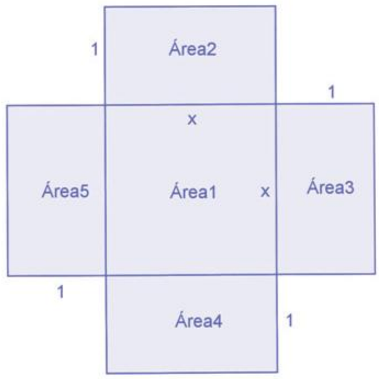


Figura II: Imagem planificada da caixa d'água.

A partir da Figura II, você deve ter observado que se "desmontássemos" a caixa d'água obteríamos uma figura como essa. Para calcular sua área total bastaria somar as áreas 1, 2, 3, 4 e 5.

3. Com essas informações, escreva a expressão algébrica que representa a área total dessa caixa d'água? Junte-se com seus colegas para pensar e registre-a a seguir!

4. Você saberia dizer qual o tipo de equação que você encontrou?

5. Até quantas soluções podemos encontrar para esse problema? Justifique sua resposta.

Agora, que tal fazermos o caminho inverso que fizemos no roteiro anterior, para tentarmos encontrar as soluções dessa equação? Vamos lá!

Vamos arrumar a equação da seguinte maneira:

$x^2+4x-5=0 \Rightarrow x^2+4x=5 \Rightarrow x^2+2x+2x=5$.

6. Olhando para essa última equação, represente geometricamente os termos x^2 e $2x$? Ou seja, desenhe duas figuras geométricas que tenham como área cada um desses termos.

7. Elas são parecidas com as suas?

Você deve ter percebido que a construção contém um quadrado de lado x e dois retângulos de base 2 e altura x, assim como você desenhou no papel.

8. Você conseguiria montar um quadrado, usando somente as três figuras azuis? Arreste-as e arrume-as como quiser, tente à vontade! E aí, conseguiu?

9. Qual a área dessa figura montada por você?

10. E se você usasse a figura verde? Conseguiria montar o quadrado? Qual a área desse quadrado?

11. Qual a área da figura verde?

12. E, como poderíamos expressar algebricamente a área desse quadrado maior, formado pelas 3 figuras azuis e a figura verde?

13. Você consegue observar alguma relação entre essas áreas?

14. Será que assim fica mais fácil achar os possíveis valores de x? Você conseguiria resolver essa nova equação?

Aplicação do roteiro 4: Resolvendo equações do 2º grau através de construções geométricas.

-Área de conhecimento: Matemática

-Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão e conceito de equação do 2º grau.

-Tempo de duração: 2 horas/aula

-Recursos educacionais utilizados: Folha de atividades, computador com o software de Geometria Dinâmica Geogebra.

-Organização da turma: A turma estará disposta em duplas para interagir entre si mediante a explicação dada, trabalhando em conjunto para fazer a construção do roteiro 4.

-Objetivos: Apresentar outro método para descobrir as soluções de uma equação do 2º grau, fazendo uso de construções geométricas feitas no software de Geometria Dinâmica Geogebra.

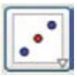
-Metodologia adotada: Orientar a turma a realizar o roteiro seguindo os passos descritos nas atividades e explicando possíveis dúvidas.

Atividades:

No roteiro anterior não conseguimos resolver a equação do 2° grau $x2-18x+32=0$ usando o método "completar quadrados", proposto por Al-Khwarizmi, não é mesmo? Vamos ver agora um método bem legal para resolver essa equação e muitas outras!

Atividade 1

1. Para começarmos, abra o software Geogebra. Crie um ponto A com coordenadas (0, 1), para isso digite A = (0, 1) na barra de entrada. E depois crie um ponto B = (18, 32).

2. Usando a ferramenta "Ponto médio"  construa o ponto médio O do segmento *AB*. Para isso, selecione a ferramenta e clique no ponto A e em seguida no ponto B.

3. Agora selecione a ferramenta "Círculo dado centro e um de seus pontos"  e crie um círculo de centro em O (ponto médio

encontrado no item anterior) e raio *AB2*. Para isso clique primeiro em O e depois em B.

4. Você observou que este círculo cruzou o eixo OX em dois pontos? Você desconfia que valores eles representam? Converse com seus colegas sobre isso e registre as conclusões.

5. Para descobrir que valores são esses, selecione a ferramenta “Novo ponto” 

e clique nos pontos cujo círculo cortou o eixo OX.

6. Sua construção ficou parecida com a Figura I abaixo?

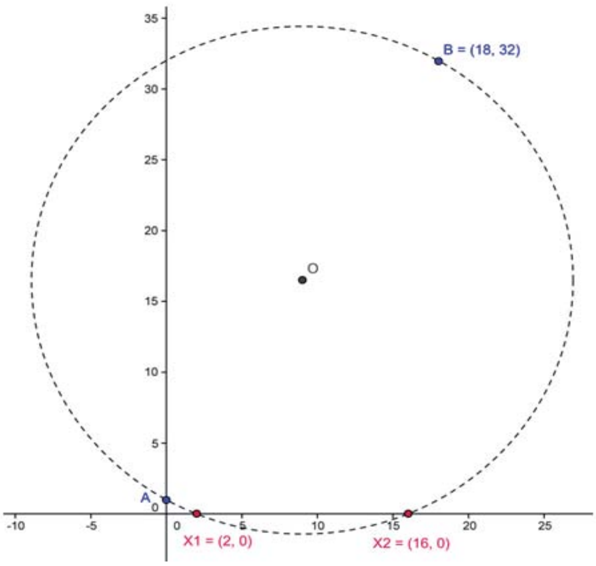


Figura I

7. Para amostrar a coordenada dos pontos, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto e selecione a opção “Propriedades”. Como mostra a Figura II.

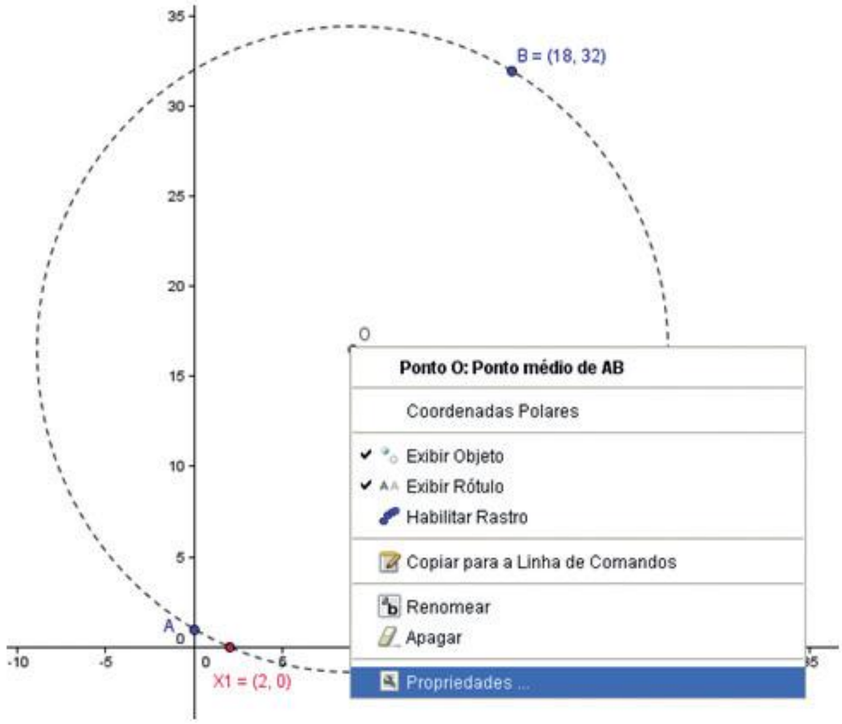


Figura II

8. Depois, em “Exibir Rótulo” selecione a opção “Nome & Valor” e clique em fechar, conforme a Figura III.

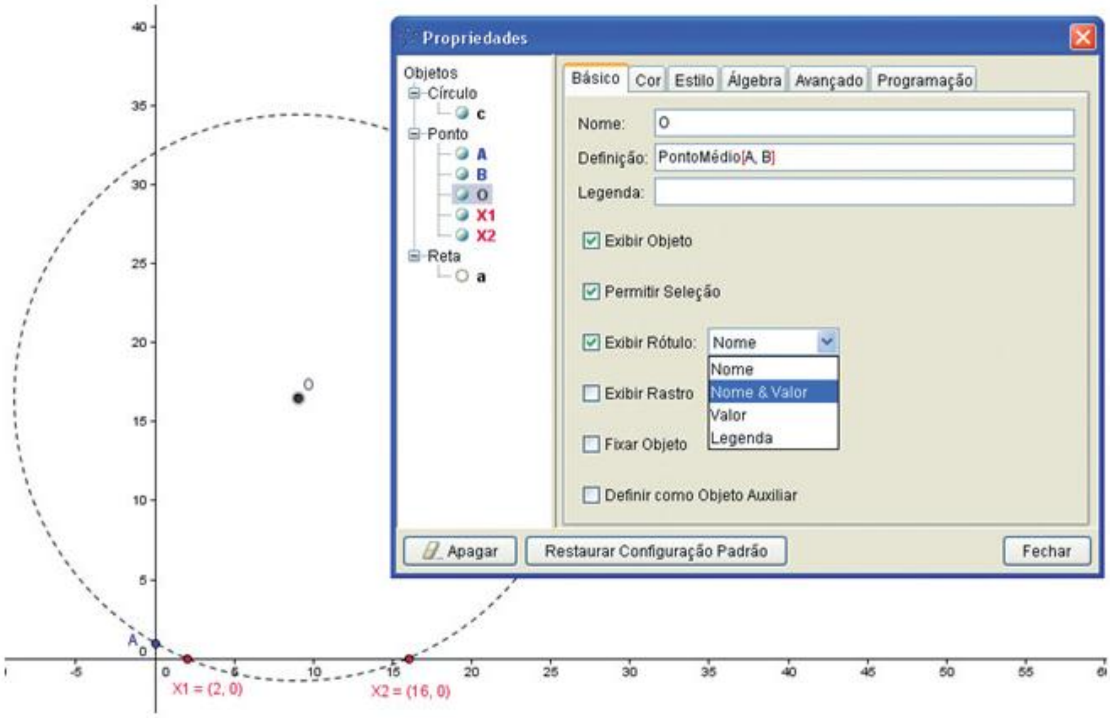


Figura III

9. E agora, você já consegue saber o que os valores dos pontos de interseção do círculo com o eixo OX, representados na Figura I por X1 e X2, representam?

10. Então, vamos substituir os valores 2 e 16 na nossa equação $x^2-18x+32=0$. O que aconteceu? Compare seus cálculos com o de seus colegas e registre a seguir.

11. Fácil não é mesmo?! Então que tal calcular novamente as soluções das equações propostas nos roteiros anteriores e ver se acha as mesmas respostas?

Para isso, você não precisa fazer a construção toda novamente. Basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto B, selecionar "Propriedades" e alterar as coordenadas desse ponto no campo "Valor", como na Figura IV a seguir.

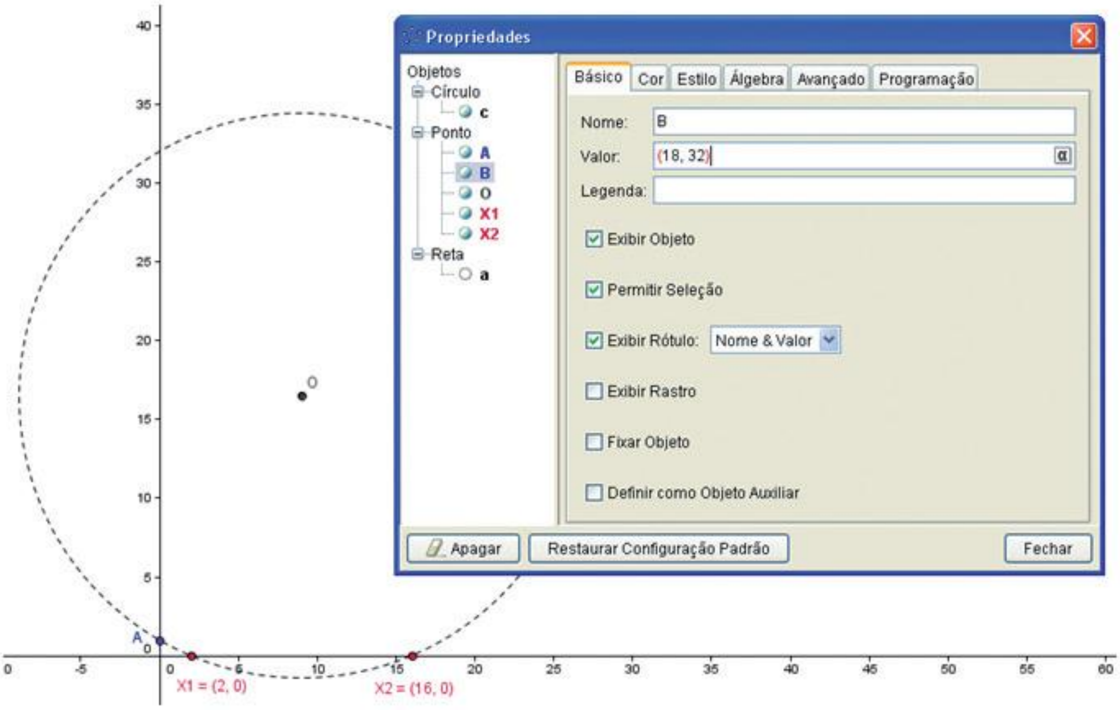


Figura IV

Trabalhando com jogos

a) Jogo da memória com soma e produto

Material necessário

* Cartelas retangulares com equações do 2º grau completas.

* Cartelas quadradas com a soma e o produto das raízes das equações que estão nas cartelas retangulares

Regras

Os jogadores dispõem as cartelas sobre a mesa, viradas para baixo. Na sua vez, cada participante vira duas cartelas: uma retangular e outra quadrada. Se a soma e o produto corresponderem à equação escolhida, o jogador retira as cartas e joga novamente. Se a soma e o produto não corresponderem `a equação escolhida, o jogador deverá retornar as cartelas às posições iniciais e passar a vez para outro participante. Vence aquele que formar o maior número de pares.

b) Jogo da memória com raízes

Material necessário

* Cartelas retangulares com equações do 2º grau completas.

* Cartelas quadradas com as raízes das equações escolhidas na confecção das cartelas retangulares.

OBSERVAÇÃO: Escolher equações com a = 1 e raízes inteiras, para não exceder o nível de dificuldade dos cálculos mentais.

Regras

As instruções são análogas às instruções do jogo a.

c) Jogo da memória com soma, produto e raízes

Material necessário

* De forma similar à apresentada nas atividades anteriores, confeccionam-se dois grupos de cartelas.

* Um grupo de cartelas com as raízes das equações escolhidas e outro com a soma e o produto das mesmas equações.

Regras

Os procedimentos para o jogo são similares aos já apresentados.

EXERCÍCIOS:

1) Uma equação do segundo grau é completa, se todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Exemplos:

a) $2x^2 + 7x + 5 = 0$, onde $a = 2$, $b = 7$ e $c = 5$

b) $3x^2 + x + 2 = 0$, onde $a = 3$, $b = 1$ e $c = 2$

agora é com vocês:

c) $x^2 - 7x + 10 = 0$

d) $5x^2 - x - 3 = 0$

e) $3x^2 - 2x + 8 = 0$

f) $x^2 + 6x - 1 = 0$

2) Resolver em R a equação $x^2 - 4x = 0$

Colocando o fator x em evidência, obtemos:

$x(x – 4) = 0$

Quando o produto de dois números reais é igual à zero, então pelo menos um dos fatores é igual a zero.

Portanto: $x = 0$ ou $x – 4 = 0$

$x = 4$

Logo as raízes são 0 e 4.

Verificação:

Para $x = 0$, temos: $0^2 - 4.0 = 0 – 0 = 0$ (V)

Para $x = 4$, temos: $4^2 - 4.4 = 16 – 16 = 0$ (V)

Portanto a solução está correta.

3) Quais são as raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$?

Podemos resolver esta equação simplesmente respondendo esta pergunta: Quais são os dois números que somados totalizam 14 e que multiplicados resultam em 48?

Logo temos: 6 e 8, pois $6 + 8 = 14$ e $6 . 8 = 48$.

Vamos solucioná-la também através da fórmula de Bhaskara:

$a= 1$, $b=-14$ e $c=48$

$\Delta=b^2-4*a*c$

$\Delta=(-14)^2-4*1*48$

$\Delta=196-192$

$\Delta=4$

$x=(-b\pm\sqrt{\Delta})/2^{a}$

$x=-((-14)\pm\sqrt{4})/2*1$

$x=14\pm2 / 2$

$x'=14+2 / 2 = 16/2 = 8$

$x''=14-2 / 2 = 12/2 = 6$

As raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ são 6 e 8.

3. Avaliação:

Os alunos serão avaliados da seguinte forma:

-Construção dos roteiros 1, 3 e 4: 1,0 ponto cada um.

-O aluno também será avaliado diariamente, mediante a realização, participação nas atividades em sala de aula, sendo atribuído 1,0 ponto no final do bimestre a essa participação.

-Prova escrita: 6,0 ponto.

Exemplos dos exercícios da prova

1)Determine, no conjunto dos números reais, as raízes de cada uma das equações:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $- x^2 + 100 = 0$

d) $– 7x – 21x = 0$

2) Uma tela retangular com área de 9600cm2 tem de largura uma vez e meia a sua altura. Quais são as dimensões desta tela?

3) Um azulejista usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir $45m^2$ de parede. Qual é a medida do lado de cada azulejo?

4) A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número.

5) O quadrado da minha idade menos a idade que eu tinha 20 anos atrás e igual a 2000. Quantos anos eu tenho agora?

6) Uma equação do 2º grau, na incógnita x, tem como raízes a soma e o produto das raízes da equação $4x^2 - x - 3 = 0$. Qual é essa equação?

7) Determine as raízes reais de cada uma das seguintes equações:

a) $x4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x4 - 13x^2 + 36 = 0$

Alguns descritores associados nesta prova:

H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau.

H26 – Resolver problemas envolvendo noção de área de figuras planas.

C1 – Resolver problemas envolvendo equações completas do 2º grau.

4. Referências:

GIOVANNI JÚNIOR, J. R; CASTRUCI, B. *A conquista da matemática*. 1ª edição. São Paulo: FTD, 2009. 368p.

GIOVANNI, J. R; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *Matemática Pensar e Descobrir Novo*. São Paulo: FTD, 2000. 312p.

IEZZI, G; DOLCE, O; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 6ª edição. São Paulo: Atual, 2009. 335p.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática*. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2007. 264p.

BIGODE, A. J. L. *Matemática Hoje é Feita Assim*. São Paulo: FTD, 2000. 335p.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática*. 1ª edição. São Paulo: Scipione, 1999. 351p.