FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ.

Professor: Joana Eunice Rodes de Oliveira - Matrículas: 09353525.

Série: 1º ANO – ENSINO MÉDIO (2º Bimestre)
GRUPO 04.

Tutora: Lígia Vitória Azevedo Telles

Plano de Trabalho

Relações métricas e trigonométricas: No triângulo retângulo e relações trigonométricas num triângulo qualquer

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO---------------------------------------2

DESENVOLVIMENTO ------------------------------3

AVALIAÇÃO ---14

FONTE DE PESQUISAS------------------------------14

INTRODUÇÃO

A tecnologia está na vida de nossos alunos e, não podemos ignorá-la. Os aparelhos de última geração estão aí facilitando a vida de todos nós. Citando um exemplo de utilidade pratica o GPS.

Os aparelhos de GPS invadiram a vida das pessoas, pois trouxeram muitas facilidades entre as quais a medição de distancias por meio da localização de pontos na superfície da Terra. O sistema de GPS, ou Global Position Sistem, consiste em localizar, por meio de satélites, pontos da superfície da Terra que são registrado em um aparelho. Esse sistema é muito útil para carros, barcos e transportes em geral, pois, além de facilitar a localização de um local de destino, dificultam o roubo de veículos, já que esses podem ser monitorados pelos satélites. O aparelho de GPS pode ter varias finalidades, por exemplo, pode ser usado por pessoas que praticam corridas e querem saber a distancia que percorreram. Ele é semelhante a um relógio de pulso e, alem de marcar as horas, pode fornecer informações, tais como: distancia percorrida, altitude, velocidade média, velocidade em cada instante da corrida, gasto de calorias, freqüência cardíaca, entre outras.

Através de cálculos utilizando seno, co-seno e tangente no triângulo retângulo, podemos desenvolver atividades relacionadas ao uso do GPS em algumas situações do dia a dia.

*Conhecimentos privilegiados

- Ralações métricas no triângulo retângulo
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo
- Razões trigonométricas num triângulo qualquer
- Leis dos Senos
- Lei dos Co-senos
- Área de um triângulo

*Orientação didática

Os alunos devem entender os elementos importantes para a identificação dos catetos opostos e adjacentes aos ângulos citados, bem como localizar a hipotenusa como o lado que se apresenta à frente do ângulo reto. Fazer uso dos conhecimentos geométricos para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

*HABILIDADES RELACIONADAS

- Resolver situações problemas e atividades que envolvam relações métricas no triangulo retângulo.
- Resolver situações problemas que envolva habilidade em reconhecer e aplicar as razões trigonométricas.
- Calcular área de triângulos com o uso dos números trigonométricos; senos.

*PRÉ-REQUISITOS:

• Relações métricas no triangulo retângulo.

***TEMPO DE DURAÇÂO:** 180 minutos.

***RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS**: Vídeos (youtube)- Site VESTIBULANDIA e Apresentação dos conteúdos na forma de DOC(Usando o Data show), trabalhos em sala com atividades em folhas A4 , quadro branco, livros didáticos, caderno.

***ORGANIZAÇÃO DA TURMA**: em duplas.

***METODOLOGIA ADOTADA:**

Apresentar vídeos para os alunos com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado, no caso, Relações métricas e trigonometria nos triângulos: retângulo e triângulo qualquer. Exposição compartilhada com o vídeo apresentado, discussão com anotações no quadro branco. Após isso, abordar os tópicos descritos no desenvolvimento.

Descritores Associados:

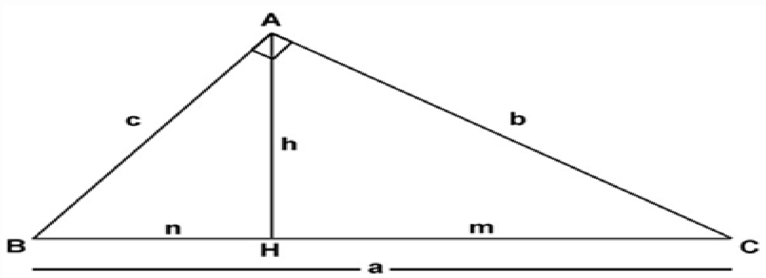
H11- Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos
H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, co-seno e tangente dos ângulos de 30°, 45°e 60°).
H13 – Resolver problemas envolvendo a lei dos co-senos ou a lei dos senos.

DESENVOLVIMENTO

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Elementos de um Triângulo Retângulo

A → Ângulo Reto
B e C → Ângulos Agudos
a → hipotenusa
b e c → catetos
h → altura relativa à hipotenusa
m e n → projeções dos catetos sobre a hipotenusa

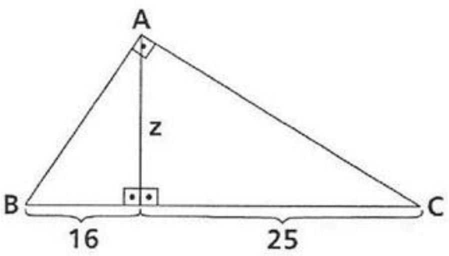


Relações Métricas no Triângulo Retângulo

1ª Relação → $b^2 = a\,m$
2ª Relação → $c^2 = a\,n$
3ª Relação → $a^2 = b^2 + c^2$ Pitágoras.
4ª Relação → $a\,h = b\,c$
5ª Relação → $h^2 = m\,n$

Exercícios de Aprendizagem

01. Calcule **z**:



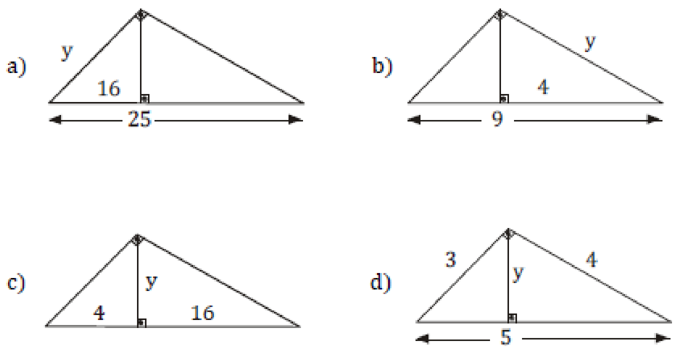
$h^2 = m \cdot n$

$z^2 = 16 \cdot 25$

$z^2 = 400$

$\boxed{z = 40}$

02. Calcular o valor de y, nos triângulos retângulos.



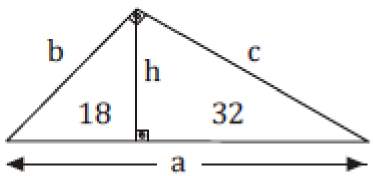
a) $y^2 = 25.16$ **y = 20**

b) $y^2 = 9.4$ **y = 6**

c) $y^2 = 4.16$ **y = 8**

d) $5.y = 3.4$ $5.y = 12$ **y = 12/5**

03. A soma dos números correspondentes às medidas **a, d, c** e **h** no triangulo da figura abaixo formam uma senha que abre o cofre do senhor Antônio.



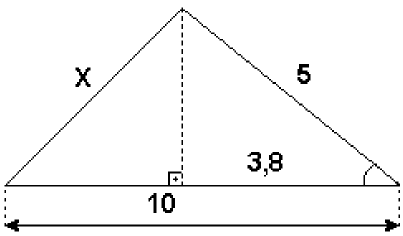
$h^2 = 18.32$ $h^2 = 576$ $h = 24$
$a = 18 + 32$ $a = 50$
$b^2 = 50.18$ $b^2 = 900$ $b = 30$
$c^2 = 50.32$ $c^2 = 1600$ $c = 40$

Qual a senha que abre o cofre do senhor Antônio?

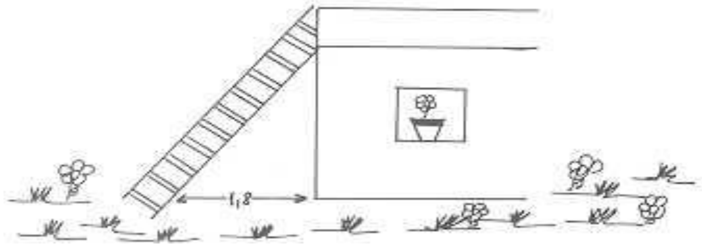
24 + 50 + 30 + 40 = 144. Resposta: A senha do senhor Antônio é 144;

ATIVIDADES

1. No triângulo da figura a seguir, o valor de x é:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

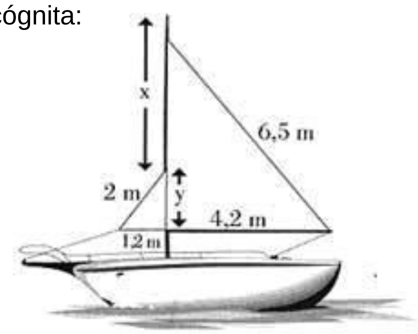


2. Para executar um serviço, o trabalhador apoiou na laje de sua casa a escada de 4,3 m de comprimento como mostra o esquema abaixo:



A base da escada, apoiada sobre um piso horizontal está afastada 1,8 m da parede. Qual é a altura aproximada da construção?

3. Determine o valor da incógnita:



4. Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 30 cm e um dos catetos mede 24 cm.
Nessas condições, determine:

a) a medida da altura relativa à hipotenusa.

b) a medida dos segmentos que a altura determina sobre a hipotenusa.

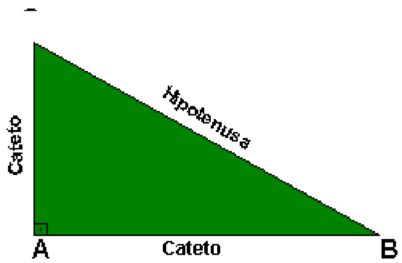
c) a área desse triângulo.

d) O perímetro desse triângulo.

Razões trigonométricas

Catetos e Hipotenusa

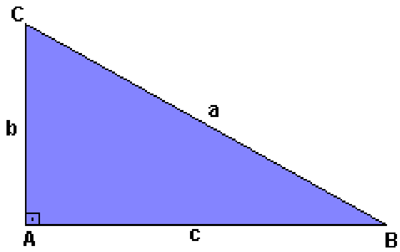
Em um triângulo chamamos o lado oposto ao ângulo reto de **hipotenusa** e os lados adjacentes de **catetos**.
Observe a figura:



Hipotenusa = BC
Catetos AC e AB

Seno, Cosseno e Tangente

Considere um triângulo retângulo *BAC*:



Hipotenusa: BC

Catetos: AC e AB

Ângulos: $\hat{A}$, B e $\hat{C}$

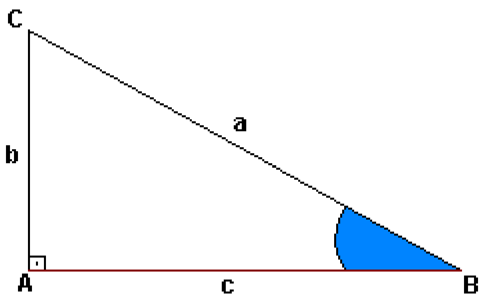
Tomando por base os elementos desse triângulo, podemos definir as seguintes razões trigonométricas:

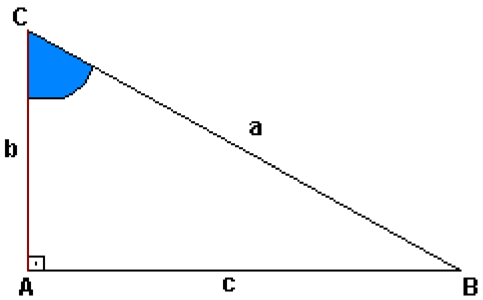
- **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{Seno} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Assim:

SenB = b/a e SenC = c/a



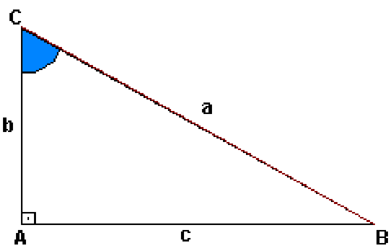


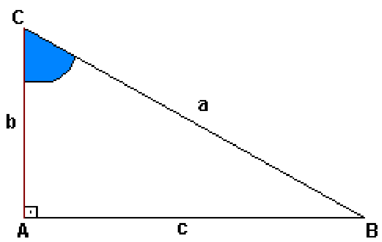
- **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Assim:

CosB = c/a e CosC = b/a





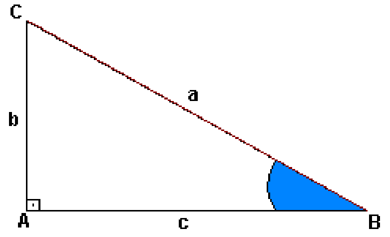
Tangente

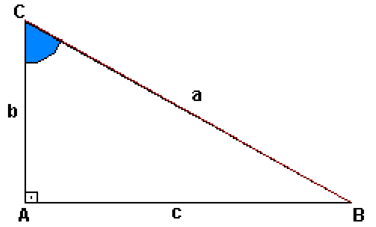
- **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

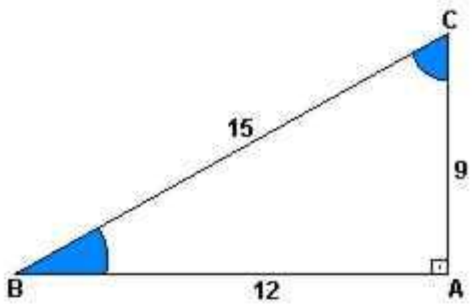
Assim:

TgB = b/c e TgC = c/b





Exemplo:



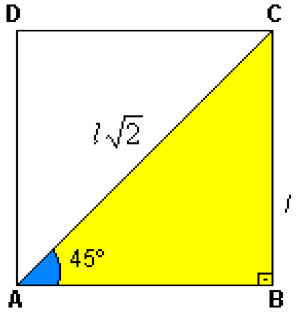
$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \text{sen}\,\hat{C} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

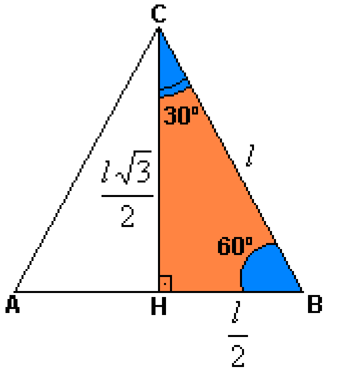
$$\cos\hat{B} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \qquad \cos\hat{C} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \text{tg}\,\hat{C} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

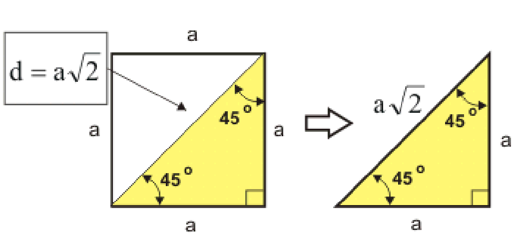
As razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º

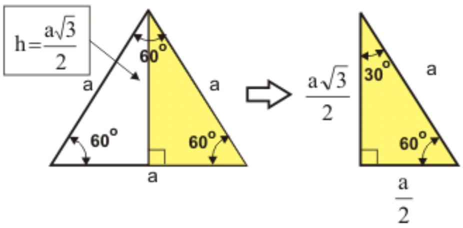
Considere as figuras:





quadrado de lado *l e* diagonal $l\sqrt{2}$ Triângulo eqüilátero de lado *l* e $(l\sqrt{3})/2$





$$\text{sen}45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg}\,45^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,45^\circ = 1}$$

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} \Rightarrow \boxed{\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \Rightarrow \boxed{\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

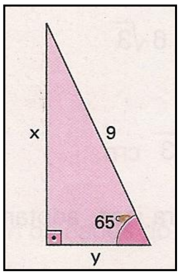
$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg}60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

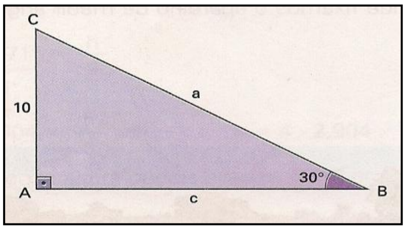
RESUMINDO

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

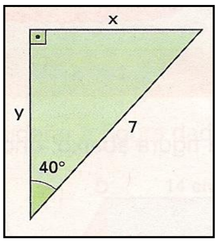
1. No triângulo retângulo determine as medidas **x** e **y** indicadas.
(Use: sen65º = 0,91; cos65º = 0,42 e tg65º = 2,14)

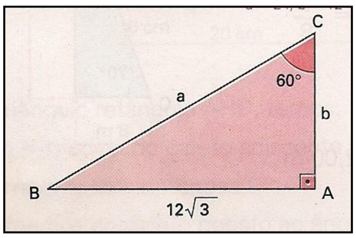


2. Determine no triângulo retângulo ABC as medidas **a** e **c** indicadas.



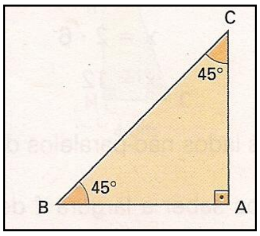
3. Sabendo que sen40º = 0,64; cos40º = 0,77 e tg40º = 0,84 calcule as medidas **x** e **y** indicadas no triângulo retângulo.



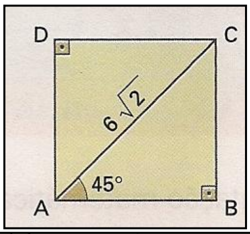


4. Considerando o triângulo retângulo ABC, determine as medidas **a** e **b** indicadas.

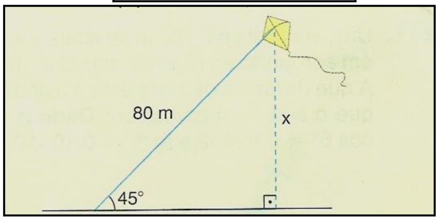
5. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede 30cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.



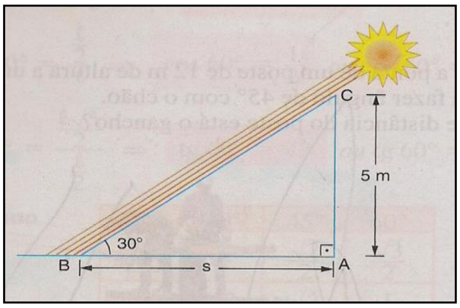
6. A diagonal de um quadrado mede $6\sqrt{2}$ cm, conforme nos mostra a figura. Nessas condições, qual é o perímetro desse quadrado?



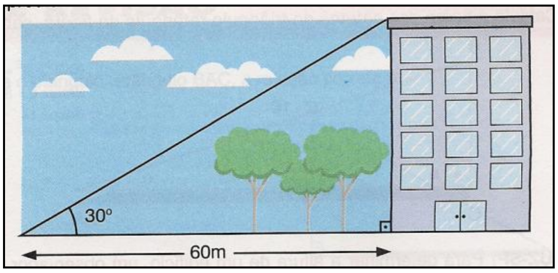
7. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado $\sqrt{2}$ = 1,41



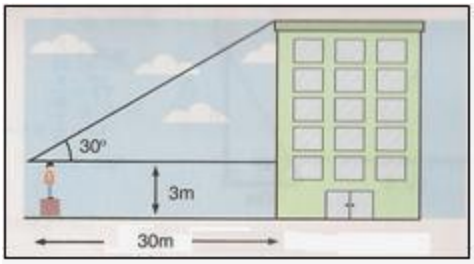
8. Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Dado $\sqrt{3}$ = 1,73



9. Determine a altura do prédio da figura seguinte:



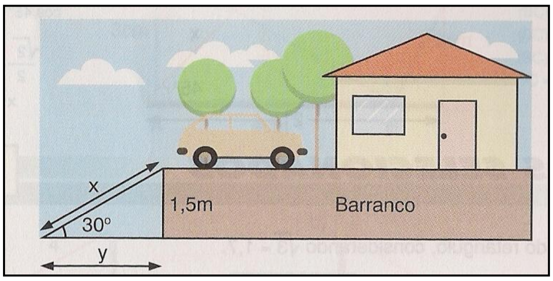
10. Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30º, conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal. Dado $\sqrt{3}$ = 1,73



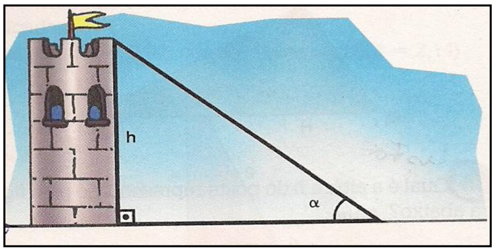
11. Observe a figura e determine:

a) Qual é o comprimento da rampa?

b) Qual é a distância do inicio da rampa ao barranco?



12. A uma distância de 40m, uma torre é vista sob um ângulo α, como mostra a figura. Determine a altura h da torre se α = 30º.



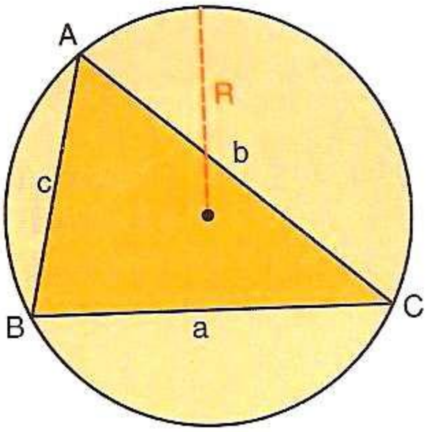
13. Em um triângulo ABC, retângulo em **A**, o ângulo **B** mede 30º e a hipotenusa mede 5cm. Determine as medidas dos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ desse triângulo

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

Já estudamos as relações trigonométricas no triângulo retângulo, mas se o triângulo não for retângulo o que devemos fazer ?

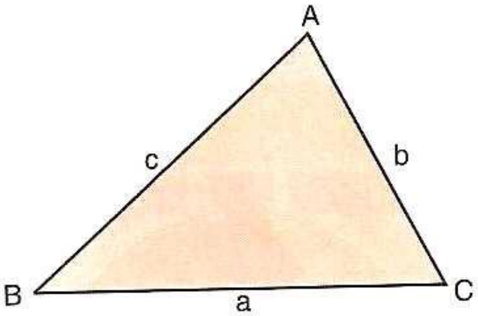
Existem duas Leis importantes na trigonometria de um triângulo qualquer, que são:

LEI DO SENO: Em qualquer triângulo as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e essa razão é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.



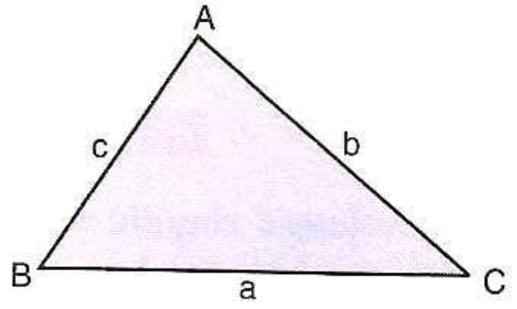
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

LEI DO COSSENO: Em qualquer triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER: Em qualquer triângulo a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles.



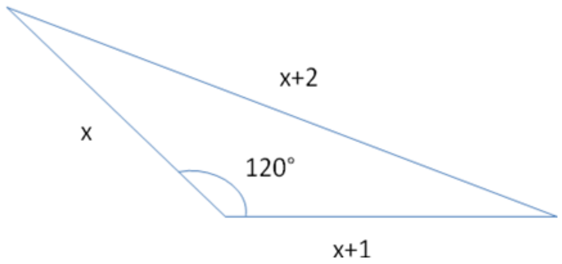
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\, C$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\, B$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\, A$$

Exercício resolvido 1

Calcule x no triângulo abaixo.



Resolução:

Usando diretamente da lei dos cossenos:

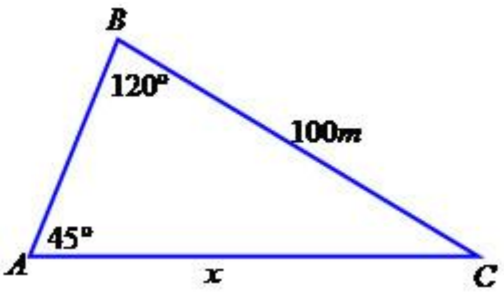
$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2.x.(x+1).(-\frac{1}{2})$$

Pois $cos120° = -1/2$. Assim, cairemos na equação:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \ (não\ serve!) \\ x = 3/2 \end{cases}$$

Resposta: $x = 3/2$

2. Determine o valor de x no triângulo a seguir.



sen120º = sen(180º – 120º) = sen60º = √3/2 ou 0,865
sen45º = √2/2 ou 0,705

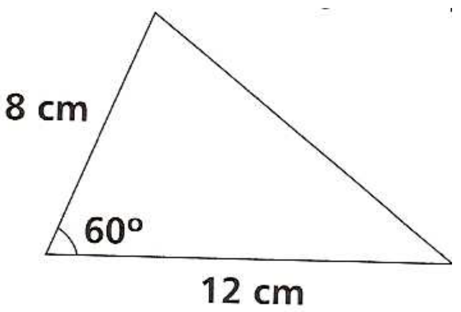
$$\frac{x}{sen60^\circ} = \frac{100}{sen45^\circ}$$

$$\frac{x}{0{,}866} = \frac{100}{0{,}707}$$

$$0{,}707x = 86{,}6$$

$$x \cong 122{,}5$$

3. calcule a área do triângulo abaixo:



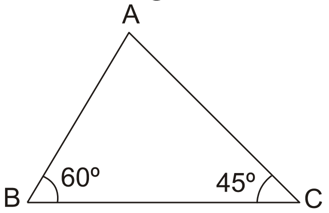
$$A = \frac{8.12.\sqrt{3}/2}{2}$$

$$A = \frac{48\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

Exercícios sobre Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

01.No triângulo ABC da figura abaixo , $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$ e $AB = \sqrt{6}\ cm$:



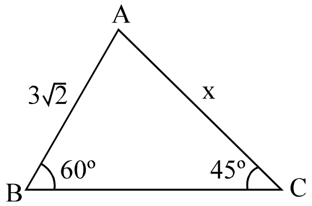
O valor do lado AC é igual a :

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

02. Dois lados consecutivos de um triângulo medem 6m e 8m e formam entre si um ângulo de 60°. A medida do terceiro lado deste triângulo oposto a esse ângulo é igual a :

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{13}$ c) $3\sqrt{13}$ d) $5\sqrt{13}$ e) $3\sqrt{2}$

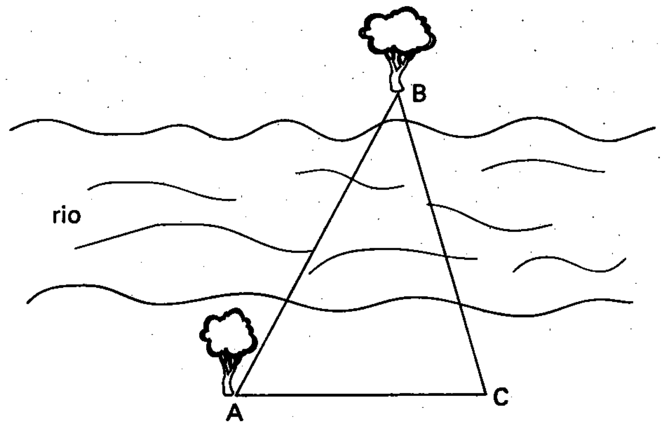
03. Dados: ΔABC, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$ e $AB = 3\sqrt{2}$



O valor do lado AC mede :

a) $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

04. (ENEM) Para se calcular a distância entre duas árvores , representadas pelos pontos A e B, situados em margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C arbitrário , na margem onde se localiza a árvore A . As medidas necessárias foram tomadas , e os resultados obtidos foram os seguintes : $AC = 70\text{ m}$ $B\hat{A}C = 62^{o}$ e $A\hat{C}B = 74^{o}$ Sendo cos 28º = 0,88 , sen 74º = 0,96 e sen 44º = 0,70 , podemos afirmar que a distância entre as árvores é :

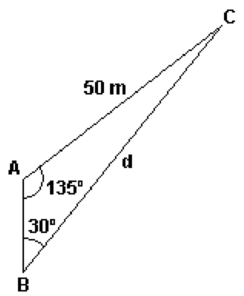


a) 48 metros b) 78 metros c) 85 metros d) 96 metros e) 102 metros

05.Um triângulo T tem lados iguais a 4, 5 e 6. O cosseno do maior ângulo de T é:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{8}$

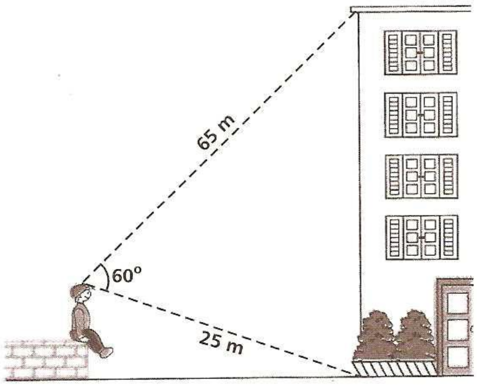
06.) Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância "d" é:



a) $50\sqrt{2}$ m b) $50\sqrt{6}/3$ m c) $50\sqrt{3}$ m d) $25\sqrt{6}$ m e) $50\sqrt{6}$ m

07.) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 4cm e 5cm e formam um ângulo de 30º. Calcule a área desse paralelogramo.

08.) Um menino, sentado num muro, observa o topo e o pé de um prédio, conforme a figura abaixo.



Determine a altura desse prédio.

AVALIAÇÃO

Método de avaliação:
Observação no desenvolvimento dos trabalhos propostos em duplas, verificando a participação de cada um. Atividades e trabalhos, em forma de lista de exercícios, Construção de atividades em sala de aula e pesquisas para casa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

➔Roteiros de Ação – Razões trigonométricas num triangulo retângulo e num triangulo qualquer– Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 2º bimestre / 2013 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 11/02/2013.

➔MATEMATICA, 1° Ano / Jackson Ribeiro – 1º Edição – São Paulo: Seccione, 2011.

➔ Silva, Jorge Daniel; Fernandes, Valter dos Santos e Mabelini, Orlando Donizete. Matemática. Novo ensino médio.Volume único.IBEP.

➔ Xavier e Barreto, TODA MATEMÁTICA. Volume único.

➔Editora Positiva Ltda., - Curitiba – PR.

➔ Endereços eletrônicos acessados de 11/02/2013 a 112/02/2013, citados ao longo do trabalho:
http://www.profcardy.com/exercicios/assunto.php?assunto=Conjuntos

WWW.RUYALEXANDRE.CO.NR

Educação. uol.com.br/biografias/**georg-cantor**.jhtm

Vídeos VESTIBULANDIA - YOUTUBE