

# **Plano de aula sobre Razões trigonométricas no triângulo retângulo**

**JOSÉ RANGEL ALCANTARA ALVES**

**SÉRIE: 1º ANO**

**GRUPO: 5**

**TUTORA: LEZIETI CUBEIRO DA COSTA**

## **INTRODUÇÃO:**

É possível fazer uma série de estimativas de distâncias e alturas associando os conhecimentos sobre triângulo retângulo à ideia de semelhança entre triângulos. Por exemplo, com auxílio de um simples graveto, podemos estimar a altura de uma montanha, desde que tenhamos ideia da distância que nos separa de sua base. Dá-se o nome de trigonometria ao ramo da geometria que estuda os métodos para calcular a medida dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer. Aplicável em várias áreas, como Engenharia, Astronomia, Geografia, Música e Topografia, a trigonometria é fundamental na prática de profissionais dessas áreas.

O objetivo deste plano de aula é apresentar uma abordagem complementar para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretende introduzir os conceitos das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de maneira significativa. Assim sendo, será apresentado fator importante para a construção do ensino aprendido, contando com a colaboração dos alunos do 1º ano do ensino médio onde será apresentado o conteúdo a partir de situações problemas, contextualização e manipulação de modelos de instrumentos adequados para os cálculos apresentados.

A falta do reconhecimento da matéria como uma atividade presente em nosso cotidiano desestimula o aprendizado

## **DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula está dividido em três partes, sendo cada aula contendo dois tempos de 50 minutos.

Na primeira aula, será apresentado as definições e alguns exemplos.

Na segunda aula, será apresentado a exemplos do cotidiano para que possam compreender melhor a matéria.

Na terceira será feito um trabalho de campo, utilizando o teodolito caseiro como objeto de estudo.

### **Conteúdos a serem aplicados:**

- Introdução: Origem da Trigonometria
- Seno, Cosseno e Tangente

- Relações entre seno, cosseno e tangente
- Razões trigonométricas ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).
- Construção da tabela de razões trigonométricas ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).
- Relações trigonométricas no triângulo qualquer: lei dos senos, lei dos cossenos.

**Pré requisitos:**

- Triângulo retângulo ( hipotenusa e catetos)
- Critérios de semelhança de triângulos
- Matemática do ensino fundamental

**Objetivos:**

- Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.
- Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações.
- Identificar e usar corretamente as relações utilizando as relações.
- Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas.

**Recursos didáticos-pedagógicos:**

- Aulas expositivas e demonstrativas.
- Uso de material auxiliar: Régua, esquadro, transferidor, calculadora científica.
- Régua, esquadro e transferidor serão utilizados na construção das figuras no quadro negro, através das quais será analisado o cálculo a ser utilizado.
- Calculadora auxiliará nos cálculos de seno, cosseno e tangente de ângulos.
- Quadro negro e giz.

**AValiação terá média de pontuação de 0 até 3,0 ponto.**

- Atividades em sala.
- Listas de exercícios envolvendo aplicações da trigonometria no cotidiano.
- Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.
- Os alunos irão abordar as aplicações da trigonometria através de exercícios, cartazes, desenhos geométricos, situações problema.

## CONTEÚDOS APLICADOS:

### 1º aula

**Duração:** 2 aulas de 50 minutos cada.

**Tema:** Relações Métricas

### Procedimento:

Iniciar a aula com algumas perguntas, para despertar o interesse dos alunos no novo conteúdo, depois prosseguir com as definições.

### Início:

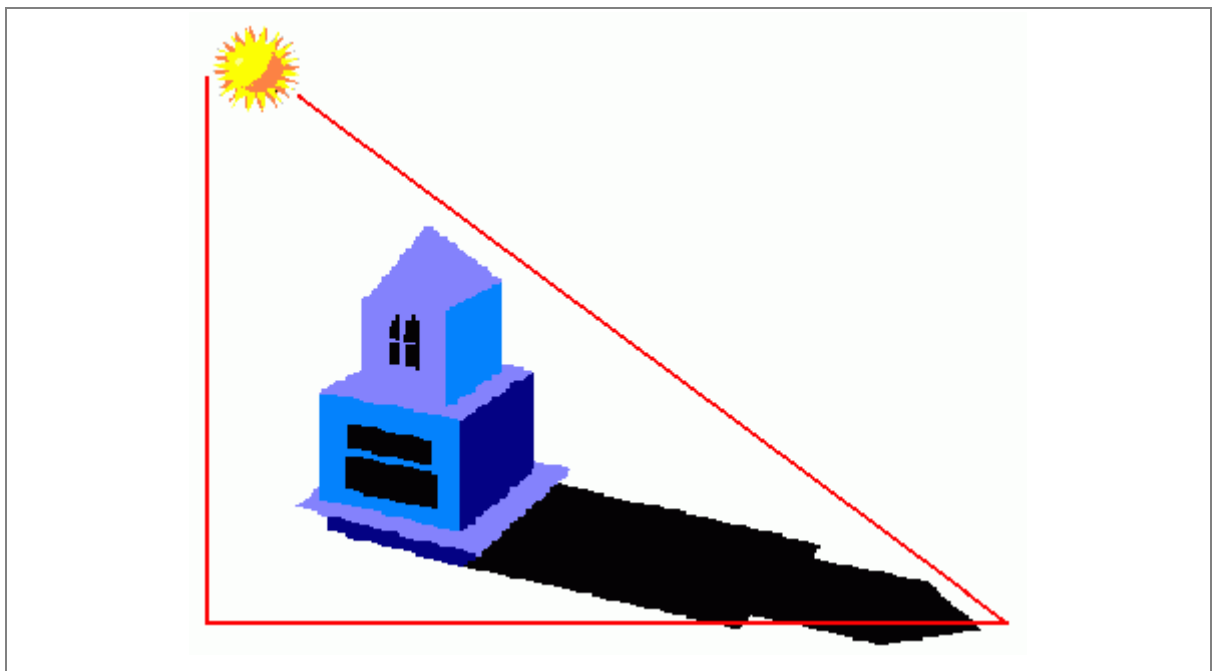
#### 1.1 Introdução

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas.

Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

Algumas aplicações da trigonometria são:

- Determinação da altura de um certo prédio.



- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples.
- Seria impossível se medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.

- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

## 1.2 Relembrando definições de triângulos:

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo.

O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos. Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado da seguinte forma:

***Equilátero: possui os lados com medidas iguais.***

***Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.***

***Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.***

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

***Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que  $90^\circ$***

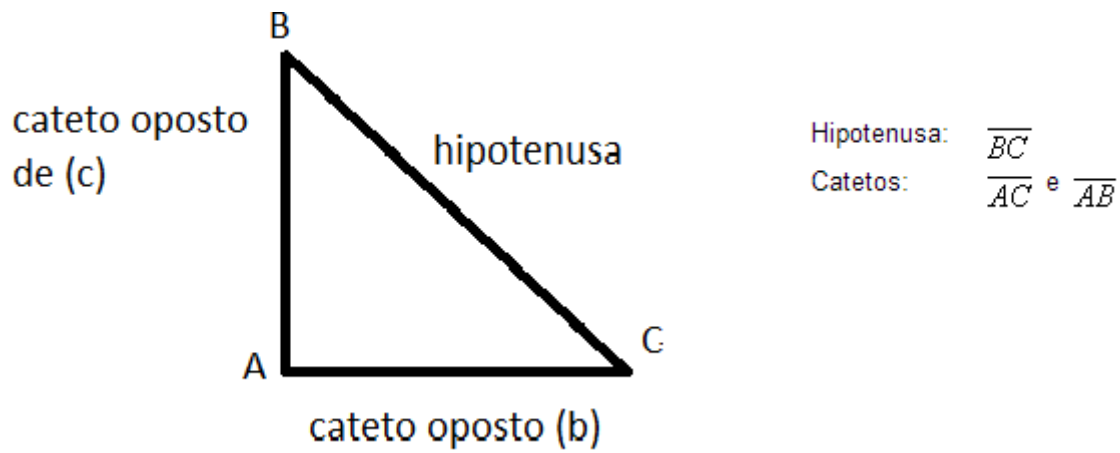
***Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que  $90^\circ$ .***

***Retângulo: possui um ângulo com medida de  $90^\circ$ , chamado ângulo reto.***

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o **Teorema de Pitágoras**, que diz o seguinte: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”. Essa relação é muito importante na geometria, atende inúmeras situações envolvendo medidas.

## 1.3 Relações trigonométricas:

SENO, COSSENO E TANGENTE de um ângulo (B) num triângulo retângulo



a) Ângulo (b)

$$\text{Sen (b)} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo b}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos (b) = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo b}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan (b) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo b}}{\text{cateto adjacente ao ângulo b}}$$

b) Ângulo (c)

$$\text{Sen (c)} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo c}}{\text{hipotenusa}}$$

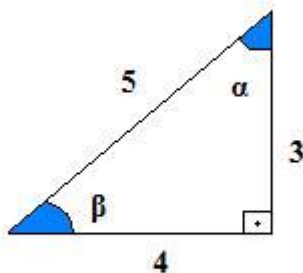
$$\cos (b) = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo c}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan (b) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo c}}{\text{cateto adjacente ao ângulo c}}$$

Observação:  $B + C = 90^\circ$

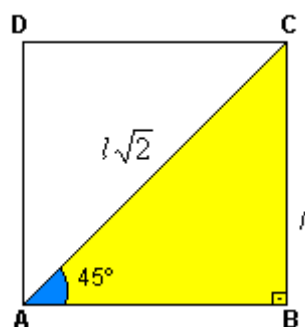
Exemplos:

1-Determine os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$

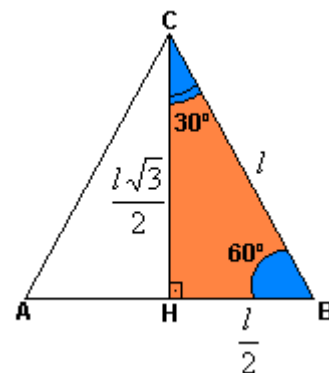


## 1.4 SENO, COSSENO E TANGENTE DOS ÂNGULOS DE 30°, 45 E 60°

Apesar de serem muito usados nos cálculos de **Relações Trigonômicas do Triângulo Retângulo**, os valores de seno cosseno e tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são mais de 80. Existem entretanto, alguns ângulos que são tidos como Notáveis.



quadrado de lado  $l$  e diagonal  $l\sqrt{2}$

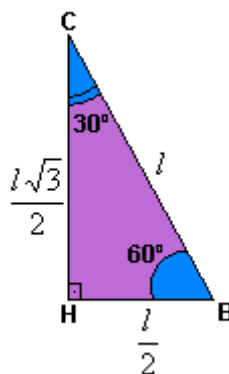


Triângulo equilátero de  
lado  $l$  e altura  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

### A) Seno, cosseno e tangente de 30°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, temos:

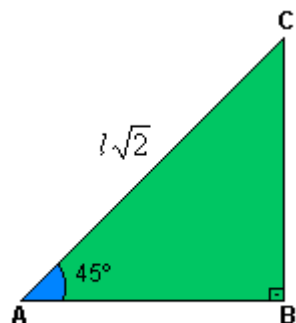
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



### B) Seno, cosseno e tangente de 45°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 45°, temos:

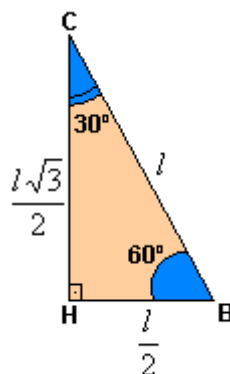
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} \cdot 1}{\cancel{l} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l} \cdot 1}{\cancel{l} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1\end{aligned}$$



### C) Seno, cosseno e tangente de 60°

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 60°, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{l} = \frac{\cancel{l} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{l}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{l}{l} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{l}} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}\end{aligned}$$



Esses ângulos são muito frequentes e por isso formam uma tabela bem mais simples que quando decorada, ajuda muito na resolução dos exercícios.

	seno	cosseno	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



## **Música para Decorar Tabela de Seno Cosseno e Tangente de $30^\circ$ , $45^\circ$ e $60^\circ$ .**

Música de Seno, Cosseno e Tangente

Um, dois três,  
Três, dois, um,  
Tudo sobre dois!  
Depois vem a raiz,  
Sobre o três e o dois!  
A tangente é diferente,  
Vejam só vocês!  
Raiz de três sobre três,  
Um raiz de três!

Essa letra deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de natal Jigle Bells

**Utilizar exercícios do livro didático**

## 2º aula

**Duração: 2 aulas de 50 minutos cada.**

**Tema: aplicações das razões trigonométricas**

**Local : sala de aula**

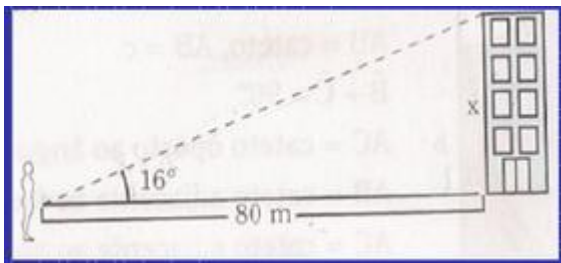
### 2.1 APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Elas são utilizadas principalmente na determinação de distâncias inaccessíveis. Assim, para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio, por exemplo, usa-se um instrumento de precisão para medir ângulos, chamado teodolito, e aplica-se as razões trigonométricas.

#### Exemplos

- 1- Uma pessoa está distante 80m de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de  $16^\circ$  em relação à horizontal. Qual é a Altura do prédio?

Dado:  $\text{tg } 16^\circ = 0,28$ .



$x$  = cateto oposto ao ângulo de  $16^\circ$

80 = cateto adjacente ao ângulo de  $16^\circ$

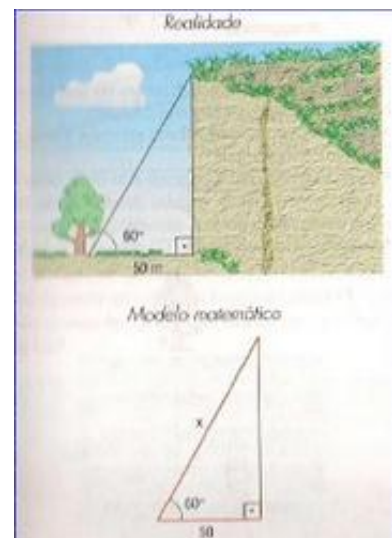
Resolução:

$$\text{Tg } 16^\circ = \frac{x}{80} \rightarrow 0,28 = \frac{x}{80} \rightarrow x \cong 22,40\text{m}$$

A altura do prédio é aproximadamente 22,40m

- 2- O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de  $60^\circ$ . Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?

Resolução:



Ele quer saber a hipotenusa do triângulo.

$$\cos 60^\circ = \frac{50}{x}$$

Substituindo  $\cos 60^\circ$  por  $\frac{1}{2}$

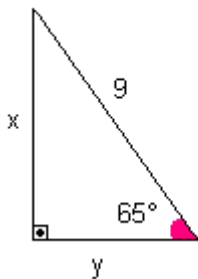
$$\frac{1}{2} = \frac{50}{x} \rightarrow x = 2 \cdot 50 \rightarrow x = 100 \text{ m}$$

A medida de um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta é de 100m.

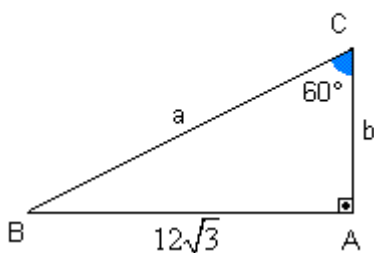
Utilizar exemplos do livro didático.

### Atividade em sala- valor 1,0 ponto

a) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use:  $\sin 65^\circ = 0,91$ ;  $\cos 65^\circ = 0,42$ ;  $\tan 65^\circ = 2,14$ )

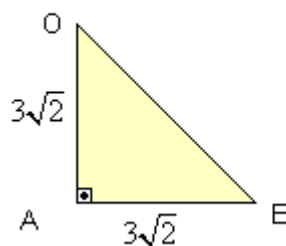
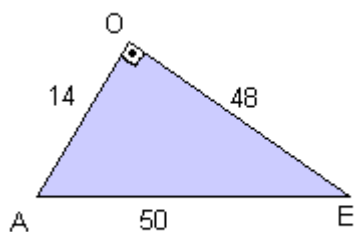


b) Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. ( $\sin 60^\circ = 0,866$ )

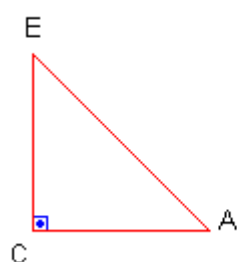


c) Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

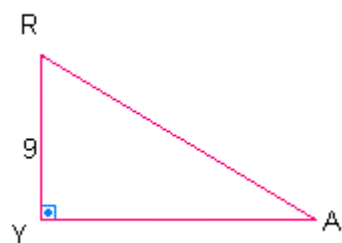
d) Nos triângulos das figuras abaixo, calcule  $\tan \hat{A}$ ,  $\tan \hat{E}$ ,  $\tan \hat{O}$ :



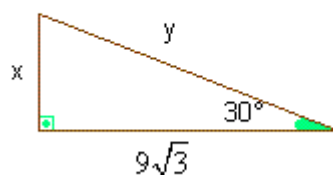
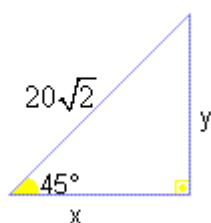
e) Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de  $\text{tg } \hat{A}$  e  $\text{tg } \hat{E}$ ?



f) Encontre a medida RA sabendo que  $\text{tg } \hat{A} = 3$ .



g) Encontre  $x$  e  $y$ :



### 3º aula

**Duração:** 3 aulas de 50 minutos cada.

**Tema:** aplicações das razões trigonométricas

**Local :** sala de informática e pátio da escola

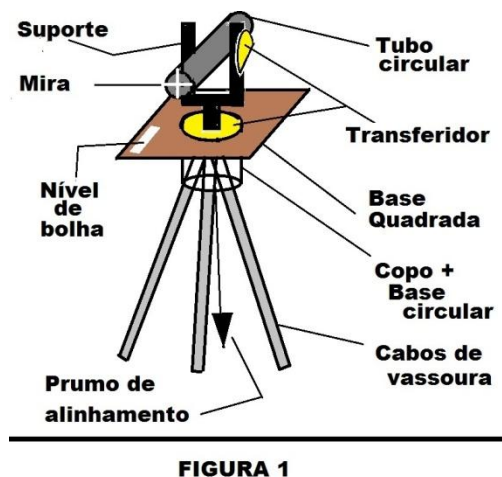
## 3.1 USO E CONSTRUÇÃO DO TEODOLITO

O projeto orientado pelo professor deve ser dividido em duas partes: uma parte teórica e outra prática. A teórica deverá abordar a história da trigonometria, quem inventou o Teodolito, como era o primeiro objeto, a utilização das medidas obtidas. A parte prática abordará a construção do Teodolito caseiro e o seu manuseio.

### 1- Teórica

Você já ouviu falar no teodolito?

O teodolito é um instrumento óptico de medida utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura para realizar medidas de ângulos.



**FIGURA 1**



**FIGURA 2**

Figura 1: mostra o teodolito e suas partes.

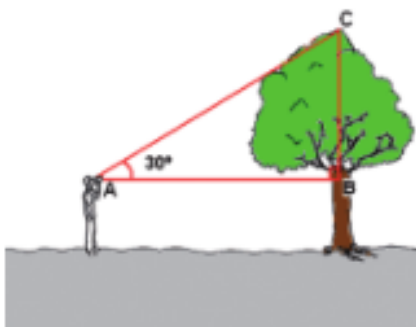
Figura 2: O instrumento que o homem está utilizando é um teodolito, que vem sendo utilizado desde o século XIX e já avançou bastante até os dias de hoje.

## Atividade para ser dada aos alunos

a) Você tem alguma sugestão para calcular a altura de uma árvore utilizando um teodolito e uma trena? Veja quais são as ideias de seus colegas e tentem chegar a uma conclusão. Registre a conclusão e discuta as ideias surgidas.

b) Perceba que podemos considerar o triângulo retângulo indicado na figura, pois é razoável considerar que a árvore faz um ângulo reto com o plano horizontal.

Na figura 2, temos indicado o ângulo de  $30^\circ$ . Esse ângulo pode ser obtido com o auxílio de um teodolito.



Conhecendo a medida de AB, você acha que é possível determinar a altura da árvore? Como? Discuta com seus colegas e registre.

## 2.2 CONSTRUÇÃO DO TEODOLITO

### a) Orientações

Faça uma relação do material e apresente à turma para as devidas providências. Coloque uma caixa no canto da sala ou do laboratório de Matemática e recolha o material trazido pelos alunos.

Para a construção do teodolito, solicite aos alunos que tragam:

- Pote redondo com tampa (tipo tronco de cone).
- Canudo oco em formato cilíndrico reto ou tubo de antena de TV (20 cm).
- Dois pedaços de placa de isopor grosso de 20 cm X 20 cm ou pedaços de tábuas com as mesmas dimensões (neste caso será necessário pregos e martelo).
- Pedaço de arame de comprimento maior que o dobro do diâmetro da tampa do pote.
- Cola de isopor.

Enquanto os alunos trazem o material providencie fita crepe, fotocópias de um transferidor de  $360^\circ$  e uma tabela das razões trigonométricas de ângulos de 1 a  $89^\circ$ .

Terminada a parte teórica reserve o laboratório de matemática ou organize a sala dividindo-a em seis grupos e proponha o seguinte Roteiro de Atividades:

### 2.3.MONTANDO O TEODOLITO

- Cole as placas de isopor em forma de L.
- Recorte o transferidor e cole no isopor.
- Fure a parte superior do pote, e coloque um pedaço de arame paralelo ao seu diâmetro, deixando sobras igualmente dos dois lados.
- Fixe o canudo paralelamente ao arame em cima do pote.
- Cole a tampa do pote no meio do transferidor e encaixe a outra parte.



### 2.4 COMO SE USA O TEODOLITO

Posicione o teodolito caseiro de modo que a sua base fique perpendicular ao objeto que vai observar, por exemplo, um ponto da intersecção entre uma das paredes da sala e o seu teto.

Discuta com os alunos sobre as distâncias que podem ser medidas utilizando uma trena e as que requerem escada, por exemplo (inacessíveis).

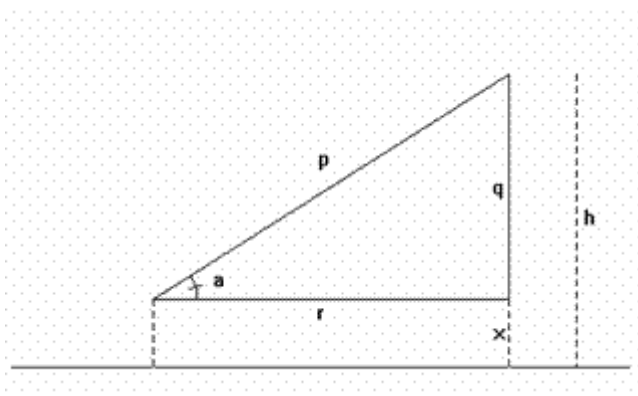
Através do canudo, sugira aos alunos que mirem o pico do objeto (o ponto mais alto), assim o arame marcará um ângulo no transferidor e a leitura será realizada.

Proponha aos alunos que com esse ângulo use os seus conhecimentos de Trigonometria para medir a altura inacessível.



Mostre aos alunos que a situação pode ser representada por uma figura como a que aparece abaixo:

- a altura inacessível, representada pela letra  $h$ , sem desprezar a altura  $x$  do suporte (base) do teodolito.
- a distância do observador até a linha vertical que passa pelo ponto mais alto, representada por  $r$ .
- a hipotenusa ( $p$ ) do triângulo retângulo.
- o ângulo  $a$  obtido no Teodolito.



Leve os alunos para o pátio da escola para que possam fazer um trabalho de campo com o Teodolito.

Proponha que cada grupo formado por 4 alunos no máximo, encontre monumentos que possam ser calculados e apresente esses cálculos em uma cartolina para ser exposto no colégio.

Valor da pesquisa: 1,0 ponto.



## Referências Bibliográficas

GIOVANNI, José Ruy ; BONJORNIO, José Roberto; JR., José Ruy Giovanni- Matemática Fundamental - Uma Nova Abordagem, Volume único- São Paulo, Editora FTD

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da- Matemática Aula por Aula- 1º ano do Ensino Médio – Editora FTD-1ª edição-2003

Sistema de Ensino SER Formação inteligente - Ensino Médio -2º ano- Editora afiliada- 1ª edição – 2007

Roteiro de ação 4- Razões Trigonométricas-1º ano- 1ª série – Campo conceitual

[www.somatematica.com.br/soexercicios/razoes](http://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoes)

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635>

[educador.brasilecola.com/estrategias.../construindo-um-teodolito.htm](http://educador.brasilecola.com/estrategias.../construindo-um-teodolito.htm)

[portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635](http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635)