JUSSARA RAMALHO DIAS DOS SANTOS

RAZÕES TRIGONOM ÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Rio de Janeiro, 2013.

SUMÁRIO

Introdução 03

Atividade 1 04

Atividade 2.. 09

Atividade 3.. 15

Atividade 4.. 19

Avaliação 26

Referencia Bibliográfica.. 28

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 359 – RAUL SEIXAS
PROFESSOR: JUSSARA RAMALHO DIAS DOS SANTOS
MATRÍCULA: 0921996-5
SÉRIE: 1º ANO DO ENSINO MÉDIO
GRUPO: 4
TUTOR: LÍGIA VITORIA DE AZEVEDO TELLES

PLANO DE TRABALHO SOBRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Jussara Ramalho Dias dos Santos
jusrds@ig.com.br

1. Introdução:

Esse Plano de Trabalho sobre o conteúdo de Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo destina-se atender ao currículo mínimo para o 2º bimestre do 1º ano do ensino médio.

Aprender Trigonometria é muito importante por que é utilizada em diversos campos de estudo como na Física, na Geografia, na Cartografia, na Topografia, na Navegação, na Astronomia, e na Matemática.

Essas leis são aplicadas em replicas de objetos construídos em escala, em cartografia, na construção civil, na engenharia, em maquetes ou plantas no papel, e na agronomia.

Além de ser um instrumento de solução de problemas do cotidiano. Exerce um caráter abstrato importante na formação do raciocino lógico do aluno.

Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

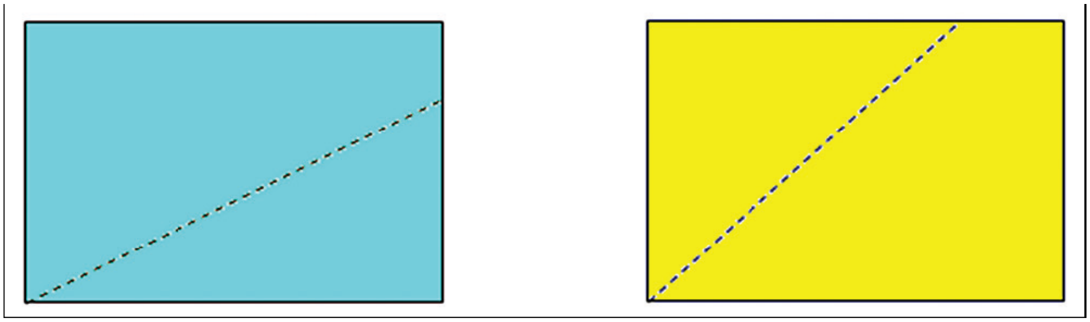
<u>Primeira semana</u>

Atividade 1:

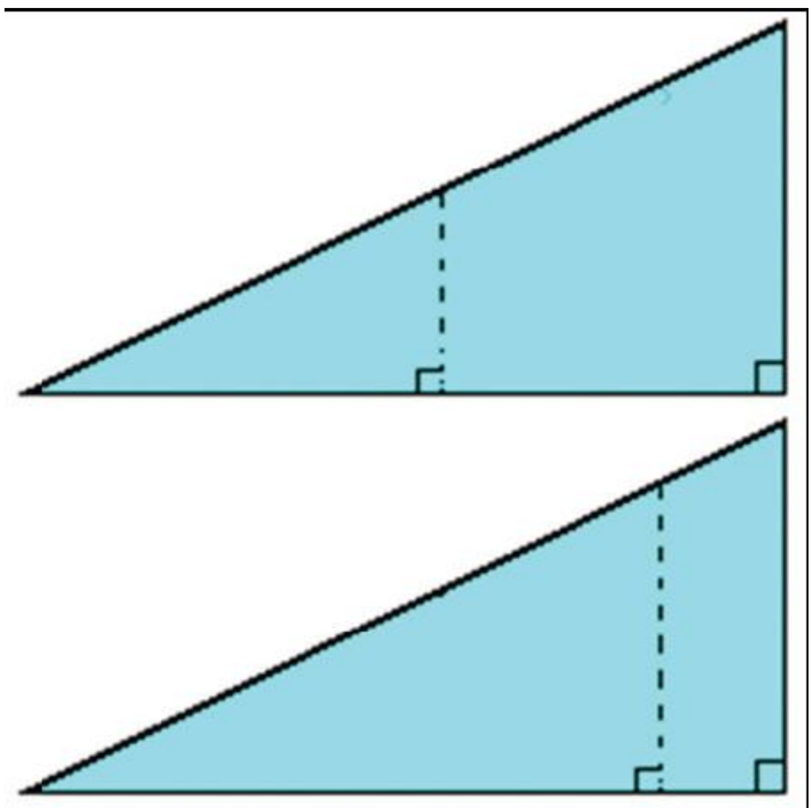
- **Habilidade relacionada:**
  H05 - Identificar figuras semelhantes, mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
- **Pré-requisitos:**
  Conhecer os lados de um triângulo retângulo, saber usar régua e transferidor, efetuar cálculos com números reais e reconhecer triângulo semelhante.
- **Tempo de Duração:**
  4 horas / aulas.
- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Folha de atividade do roteiro de ação 1 (Relembrando as proporções em triângulos semelhantes) , papel A4 branco ou colorido, calculadora, caneta, régua e transferidor.
- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.
- **Objetivos:**
  Apresentar o conceito de semelhança de triângulos, mostrar o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo e suas principais propriedades.

- **Metodologia adotada:**
  Usar dobradura de uma folha de papel A4 para construir triângulos semelhantes e determinar o valor aproximado das razões trigonométricas.

  1-Pegue três folhas de papel A4. Coloque-as superpostas. Com o auxílio de uma régua, corte essa três folhas, formando três triângulos idênticos.



2 - Pegue dois dos três triângulos que você recortou. Faça dobras como as indicadas na Figura. Em seguida, com o auxílio de uma régua, faça um corte na marca da dobra. Você deve obter dois novos triângulos.



3 - O que esses triângulos têm em comum? Discuta com seus colegas e registre a seguir.

4- Compare os ângulos dos triângulos. Para isso você pode utilizar o transferidor ou sobrepor os triângulos.

5- Relembre com seus colegas o que duas figuras devem ter para serem classificadas como semelhantes. Registre suas conclusões.

6 - E aí? Podemos afirmar que esses três triângulos são semelhantes?

7- Separe os três triângulos retângulos semelhantes obtidos na atividade anterior. Posicione-os como indicado na imagem a seguir e, para organizar o que faremos nos itens a seguir, numere-os.

8- Indique por β_1, β_2 e β_3 os ângulos mais à esquerda de cada um dos triângulos.

9-Com o auxílio de uma régua, meça os lados dos triângulos e anote as medidas em cada uma das tabelas a seguir. Em seguida, preencha os dados referentes às razões, utilizando uma calculadora para determinar esses valores.

Triângulo 1	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_1	
Medida do cateto adjacente ao ângulo β_1	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_1	
Sen(β_1)= $\dfrac{\text{Medida do cateto oposto ao âng.}\beta_1}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
cos(β_1)= $\dfrac{\text{Medida do cateto adjacentea o âng.}\beta_1}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
tg(β_1)= $\dfrac{sen(\beta_1)}{\cos(\beta_1)}$ =	

Triângulo 2	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_2	
Medida do cateto adjacente ao ângulo $\beta 2$	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_2	
Sen(β_2)= $\frac{\text{Medida do cateto oposto ao âng.}\beta_2}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
cos(β_2)= $\frac{\text{Medida do cateto adjacente ao âng. }\beta_2}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
tg(β_2)= $\frac{sen(\beta_2)}{\cos(\beta_2)}$ =	

Triângulo 3	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_3	
Medida do cateto adjacente ao ângulo β_3	
Medida do cateto oposto ao ângulo β_3	
Sen(β_3)= $\frac{\text{Medida do cateto oposto ao âng.}\beta_3}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
cos(β_3)= $\frac{\text{Medida do cateto adjacentea o âng.}\beta_3}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
tg(β_3)= $\frac{sen(\beta_3)}{\cos(\beta_3)}$	

10-Agora é momento da observação. Observe os valores dos senos dos ângulos β. O que você percebe?

11-E com os valores dos cossenos? É possível perceber alguma semelhança? Qual?

12-E com os valores das tangentes? É possível perceber alguma semelhança? Qual?

13-Será que o tamanho do triângulo influencia no valor das razões trigonométricas? A que conclusão seus colegas chegaram? Discuta com eles e veja se vocês chegaram às mesmas conclusões.

Atividade 2:

- **Habilidade relacionada:**

  H05 - Identificar figuras semelhantes, mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

  H35 –Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

- **Pré-requisitos:**

  Conhecer os lados de um triângulo retângulo, saber usar régua e transferidor, efetuar cálculos com números reais e reconhecer triângulo semelhante, conhecer o Teorema de Pitágoras.

- **Tempo de Duração:**

  4 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Roteiro de ação 2 (Razões Trigonométricas dos ângulos Notáveis), papel A4, régua, transferidor, caneta e calculadora.

- **Organização da turma:**

  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.

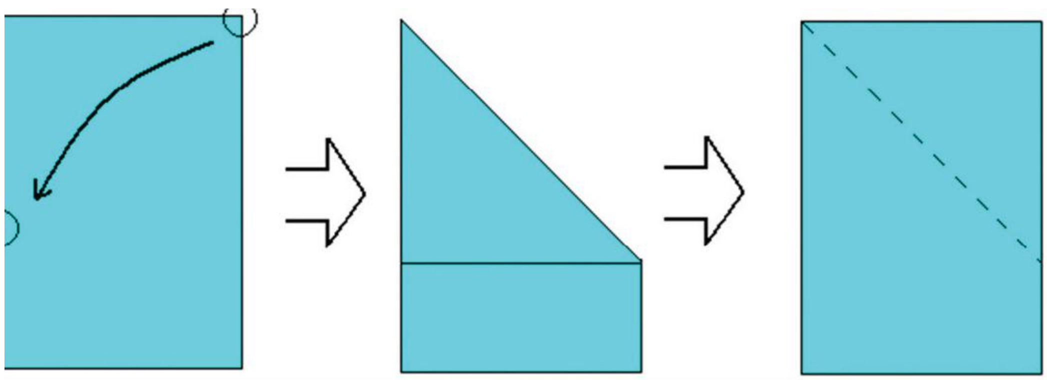
- **Objetivos:**

  Calcular as razões Trigonométricas dos ângulos notáveis.

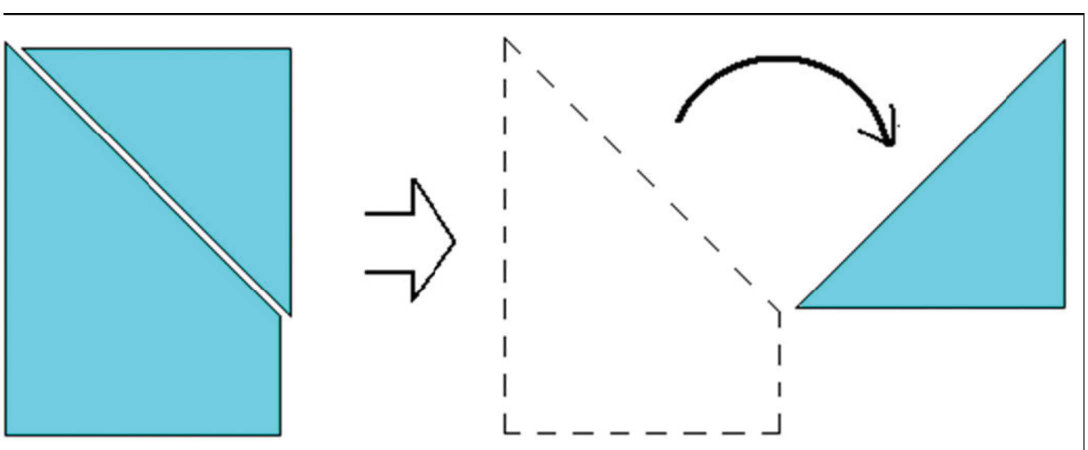
- **Metodologia adotada:**

  Construir através de uma folha de papel A4, um triângulo retângulo e com auxílio de régua e transferidor medir seus lados e respectivos ângulos.

1-Utilizando uma folha de papel A4, com o lado menor localizado na posição inferior, pegue a ponta superior direita e leve-a até a margem lateral esquerda do papel, deixando toda a margem superior superposta com a margem lateral esquerda, como é mostrado na figura 1. Deixe bem marcada a dobra feita.



2- Com ajuda de uma régua, faça um corte no papel seguindo a direção deixada pela dobra, no sentido de baixo para cima, separando um triângulo. Veja figura.



3- Observe o triângulo obtido.

Este triângulo é retângulo? Justifique e compare sua justificativa com a de seus colegas.

4- Você seria capaz de dizer qual é a medida dos outros ângulos desse triângulo?

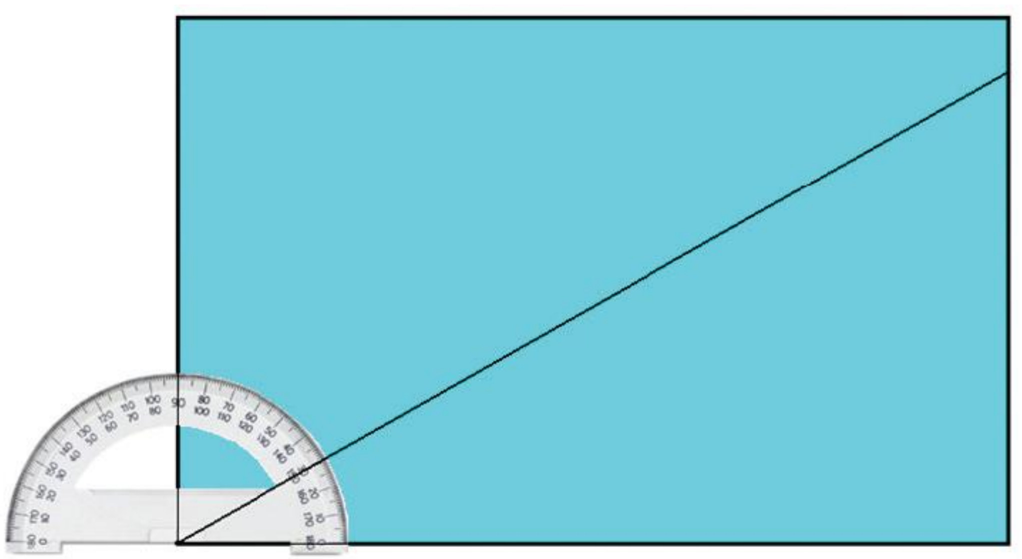
5- Os ângulos agudos são iguais? Por quê? Se necessário, use um transferidor para medi-los. Não deixe de verificar com seus colegas os valores que eles obtiveram e registre suas respostas a seguir.

6- Podemos considerar este triângulo como sendo um triângulo isósceles? Qual argumento justifica esse fato? Discuta com seus colegas e registre.

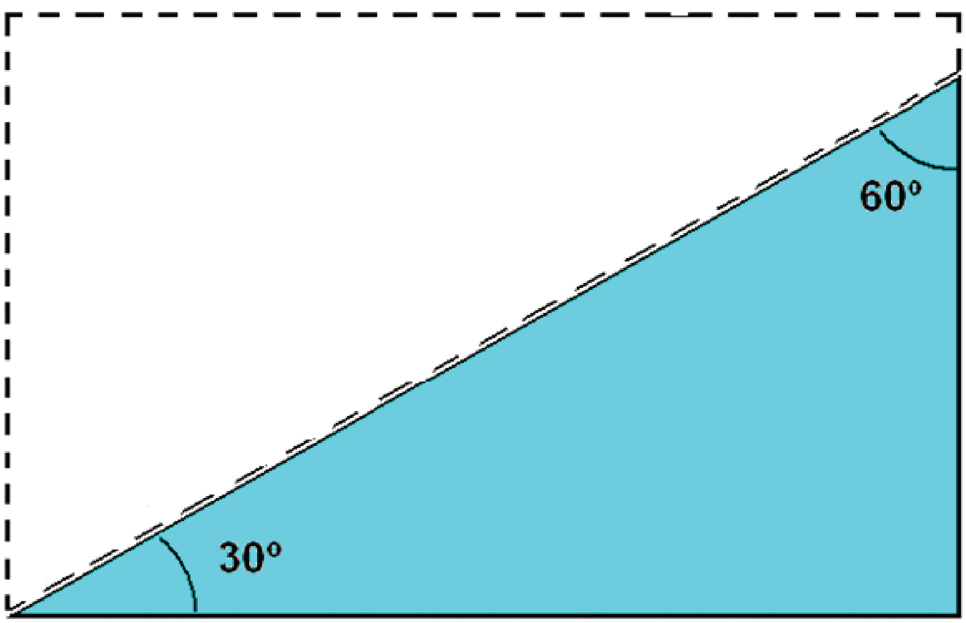
7- Com o auxílio de uma régua e de uma calculadora, preencha a tabela a seguir:

Triângulo	
Medida do cateto oposto ao ângulo 45º	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 45º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 45º	
$\text{Sen}(45^\circ) = \dfrac{\text{Medida do cateto oposto ao âng.} 45^\circ}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
$\cos(45^\circ) = \dfrac{\text{Medida do cateto adjacente ao âng.} 45^\circ}{\text{Medida da hipotenusa}}$	
$\text{tg}(45^\circ) = \dfrac{sen(45^\circ)}{\cos(45^\circ)}$	

8- Usando um transferidor e uma folha de papel A4, obtenha um ângulo de 30º. Como mostra a figura 3, trace uma linha transversal no papel a partir da marca feita.



9- Dobrando o papel na linha marcada, faça um corte e separe o triângulo retângulo. Posteriormente, marque com uma caneta os ângulos de 30º e 60º, como mostra a figura.



11- Com o auxílio de uma régua e de uma calculadora, preencha as tabelas a seguir, encontrando experimentalmente o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30º e 60º.

Ângulo 30º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 30º	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 30º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 30º	
Sen(30º) =	
cos(30º) =	
tg(30º) =	

Ângulo 60º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 60º	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 60º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 60º	
Sen(60º)=	
cos(60º)=	
tg(60º) =	

12-Observe e compare os resultados encontrados para as razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º. Você percebe alguma relação entre os valores encontrados?

13-Existe alguma relação entre o valor do sen(30°) e do cos(60º)? Que relação é essa?

14-E entre sen(60º) e cos(30º)? Que relação é essa?

15- Discuta com os seus colegas e tente descobrir por que isso acontece. Registre suas conclusões.

<u>**Segunda semana**</u>

Atividade 3:

- **Habilidade relacionada:**

  H 14 – Reconhecer ângulo como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos ou não retos.

  H 21 – Utilizar relações métricas do triângulo para resolver problemas significativos.

  H 11 - Resolver problemas envolva razões trigonométricas em triângulos retângulos (seno, cosseno e tangente).

- **Pré-requisitos:**

  Conhecer Geometria do triângulo retângulo.

- **Tempo de Duração:**

  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Papel cartão, régua, transferidor, tesoura, calculadora, canudo, fita adesiva, peso, barbante, fita métrica ou trema e folha de atividade.

- **Organização da turma:**

  A tarefa deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.

- **Objetivos:**

  Calcular a tangente numa situação-problema que envolva medição.

- **Metodologia adotada:**

  Analisar uma situação-problema e verificar se os alunos conhecem algum instrumento de medida para descobrir a distância entre o planeta Terra e o Sol. Comentar a utilidade do instrumento teodolito. Construir o teodolito com papel cartão, transferidor, peso e canudo. Medir com os alunos alguns objetos usando o teodolito. Os alunos deveram identificar a melhor razão trigonométrica para encontrar a altura dos objetos, no caso a tangente.

  a)Você sabe qual à distância da Terra ao Sol? Como terá sido essa medida?

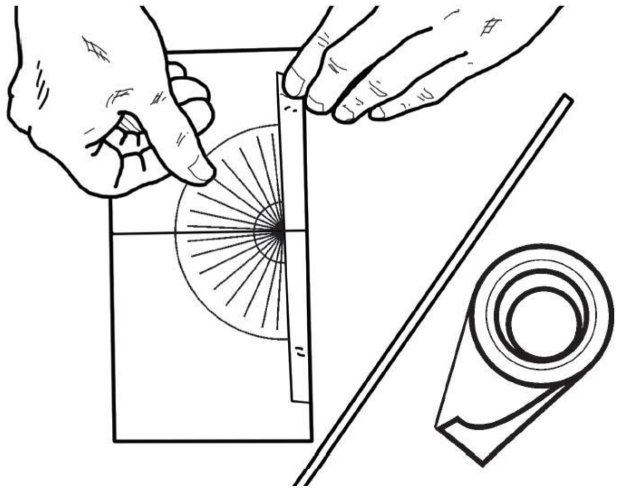
  b)Dê exemplos de instrumentos de medidas.

  c)Dê exemplos de instrumentos de medidas que dê a distância entre dois planetas, espessura de um fio de cabelo, altura do Morro do Pão de Açúcar, distância entre uma margem e outra do rio e largura de o rio Paraíba.

  d)Você conhece o teodolito? Para que serve?

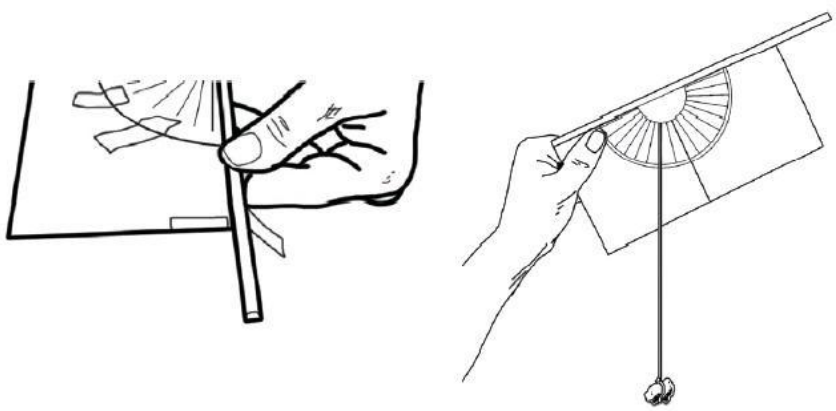
  e)Vamos construir o teodolito. Recorte um pedaço (20cm x 10cm) de cartolina.

  f)Fixe o transferidor neste papel usando uma fita transparente. Destaque o segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°.



Teodolito em construção

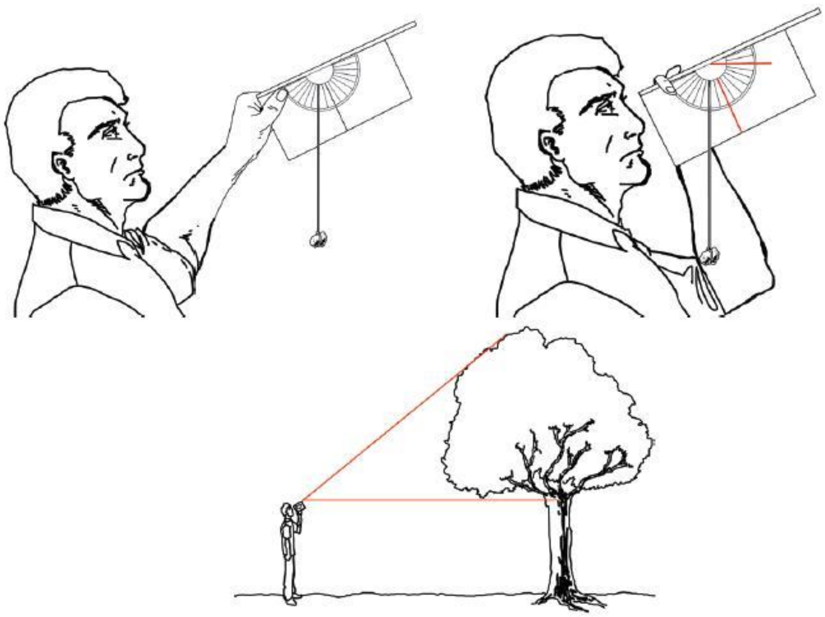
g)Prenda o canudo com o barbante e o peso no transferidor.



Teodolito em construção

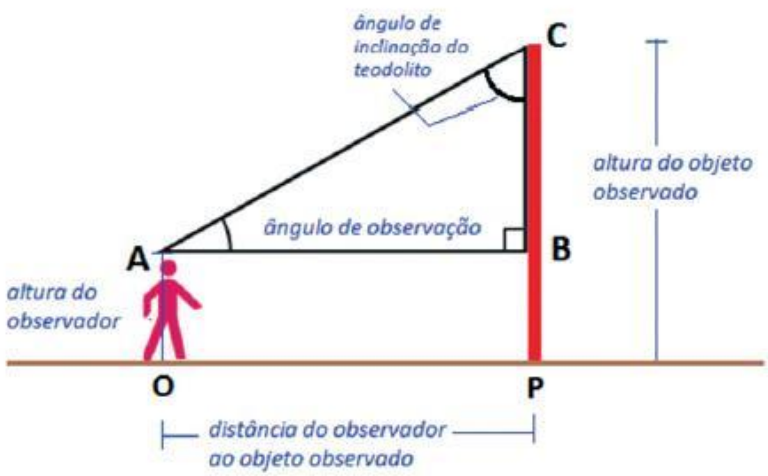
h)Vamos medir a altura de uma árvore. Leve o teodolito à altura de seus olhos e observe, através do canudo, no topo da árvore. Peça o colega que olhe no teodolito a menor indicação para medida do ângulo do barbante no transferidor. Qual foi o ângulo medido?

i)As imagens mostram a realização do experimento.



Realização do experimento

j) Por razões Trigonométricas encontre a altura da árvore.



Esquema do problema

Atividade 4:

- **Habilidade relacionada:**
  H 12 - Resolver problemas envolva razões trigonométricas em triângulos retângulos (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º).

- **Pré-requisitos:**
  Reconhecer e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo, resolver sistema de equações do 1ºgrau.

- **Tempo de Duração:**
  4 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Folha do roteiro de ação 4 (Calculando Alturas Inacessíveis), papel, caneta e calculadora.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.

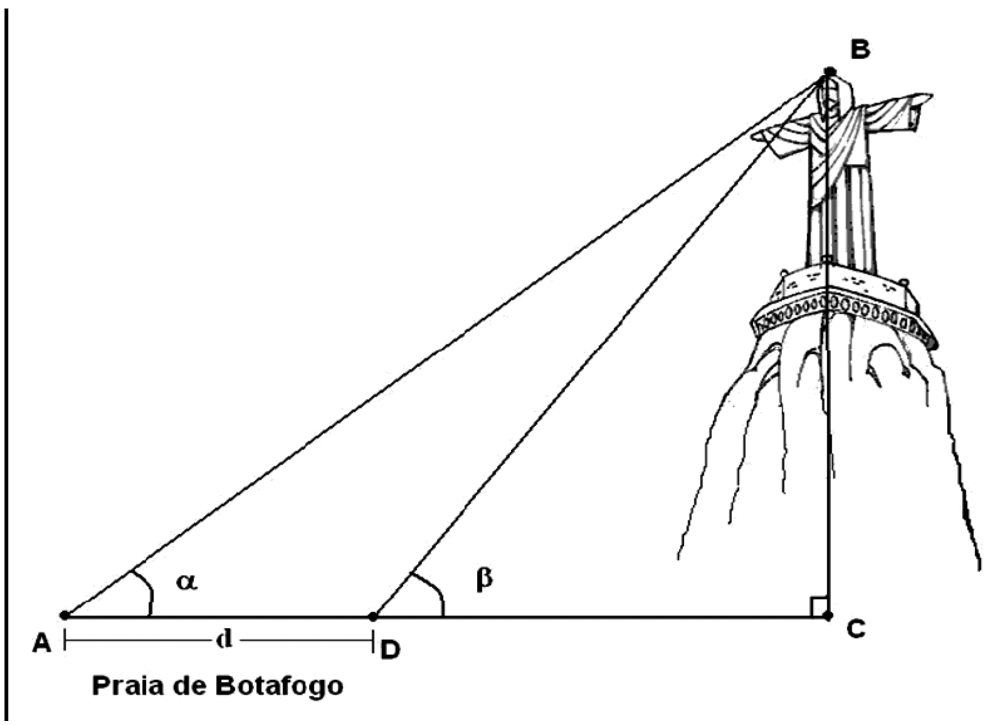
- **Objetivos:**
  Resolver problemas do cotidiano usando razões trigonométricas.

- **Metodologia adotada:**
  Analisar o problema da altura do Cristo Redentor utilizando razões trigonométricas

1- Suponha que você se encontre no ponto A, na Praia do Botafogo, com um teodolito e uma boa trena. Como você poderia determinar a altura deste monumento a essa distância? Discuta com seus colegas de sala e registre suas conclusões.

Pense na estratégia que usamos na atividade anterior para ajudá-lo nessa empreitada. Observe a Figura e troque idéias com seus colegas.

2- Suponha que uma pessoa que se encontra no ponto A na Praia de Botafogo consegue observar o topo do monumento do Cristo Redentor sob um ângulo de elevação de 30º. Ao andar 867 metros até um ponto D, essa pessoa observa o topo sob um ângulo de elevação de 60º. Com essas informações, determine a que altura se encontra o topo do monumento. Observação: Nessa situação a altura da pessoa é desprezível.



3- Observe a Figura 10 e determine a altura aproximada *h* da estátua. Para isso, considere que, a partir do ponto A, avista-se o ponto B sob um ângulo de 30º e o ponto E é visto sob um ângulo de 29º.

4- Fazendo uma pesquisa na Internet, encontramos a medida de 38 metros para a estátua. Foi essa medida que você encontrou? E seus colegas? Como isso é possível?

Terceira semana

Atividade 5:

- **Habilidade relacionada:**
  H 13 -Resolver problemas envolvendo a lei dos senos ou a lei dos cossenos.

- **Pré-requisitos:**
  Conhecer razões trigonométricas, efetuar cálculos com números reais, conhecer o Teorema de Pitágoras.

- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Folha do roteiro de ação 5 (Podemos usar o teorema de Pitágoras em qualquer triângulo?), papel, caneta e calculadora.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.

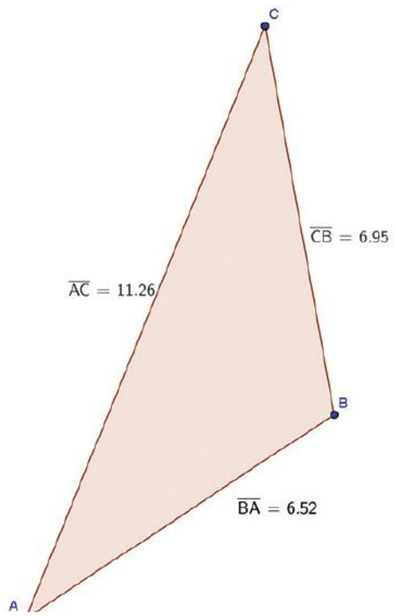
- **Objetivos:**
  Apresentar a Lei dos Cossenos que pode ser usado em qualquer triângulo.

- **Metodologia adotada:**

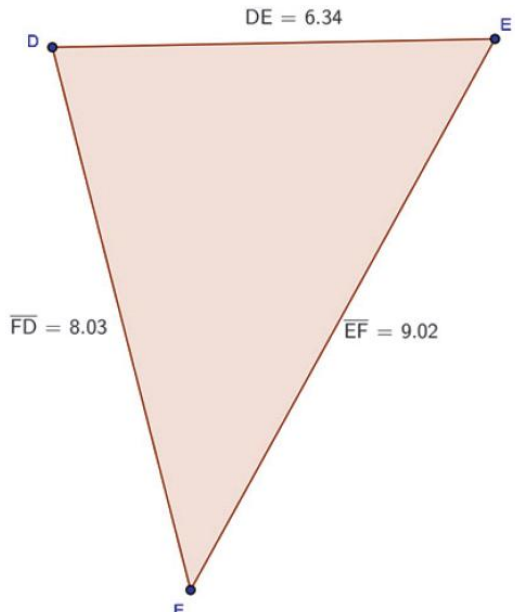
  Analisar triângulos acutângulos e obtusângulos e verificar que não pode usar o Teorema de Pitágoras para achar suas medidas e conhecer a lei dos cossenos que pode ser usado em qualquer triângulo.

1- Será que a relação de Pitágoras vale nesses triângulos?

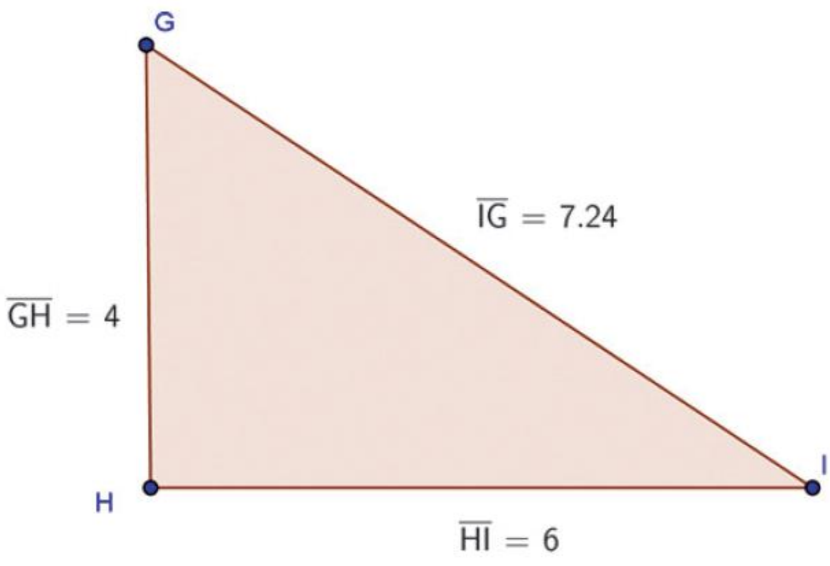
Use a Tabela 1 para organizar os valores e verifique!



Triângulo1



triângulo 2



Triângulo 3

Triângulo 1		Triângulo 2		Triângulo 3	
$\overline{AC}$	11,26	$\overline{EF}$	9,02	$\overline{IG}$	7,24
$\overline{CB}$	6,95	$\overline{FD}$	8,03	$\overline{GH}$	4
$\overline{BA}$	6,52	$\overline{DE}$	6,34	$\overline{HI}$	6
$\overline{AC}^2$		$\overline{IG}^2$		$\overline{IG}^2$	
$\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2$		$\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2$		$\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2$	
Tabela 1					

2- Observe os valores que você completou nas 4ª e 5ª linhas. Eles são iguais? Troque idéias com seus colegas e registre as conclusões.

3- Os triângulos ABC, EFD e GHI são triângulos retângulos?

4- Será que esse fato está relacionado com o fato de os valores das linhas 4 e 5 serem diferentes? Discuta com seus colegas.

5- Apresente um argumento para o fato de, no Triângulo 3, o valor de $\overline{IG}^2$ estar muito próximo do valor de $\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2$.

6- Calcule as diferenças indicadas na Tabela 2:

Triângulo 1	$\overline{AC}^2 - \left(\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2\right)$	
Triângulo 2	$\overline{EF}^2 - \left(\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2\right)$	
Triângulo 3	$\overline{IG}^2 - \left(\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2\right)$	
Tabela 2		

7- Utilizando uma calculadora científica, calcule os valores dos cossenos dos ângulos indicados nos triângulos.

Triângulo 1	cos(113,38)	
Triângulo 2	cos(76,81)	
Triângulo 3	cos(90,57)	
Tabela 3		

8- Com os valores dos cossenos obtidos no item anterior, preencha a Tabela 4.

Triângulo 1	$2\overline{CB} \cdot \overline{BA} \cdot \cos(\hat{B})$	
Triângulo 2	$2\overline{FD} \cdot \overline{DE} \cdot \cos(\hat{D})$	
Triângulo 3	$2\overline{GH} \cdot \overline{HI} \cdot \cos(\hat{H})$	
Tabela 4		

9- Compare os valores das tabelas 2 e 4. Notou alguma semelhança? Registre suas observações.

10- E se o triângulo for retângulo? O que acontece com a Lei dos Cossenos? Troque idéias com seus colegas e registre sua conclusão a seguir.

2. Avaliação:

- Participação das atividades (roteiro de ação), resolução de exercícios do livro texto (Iezzi, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.).

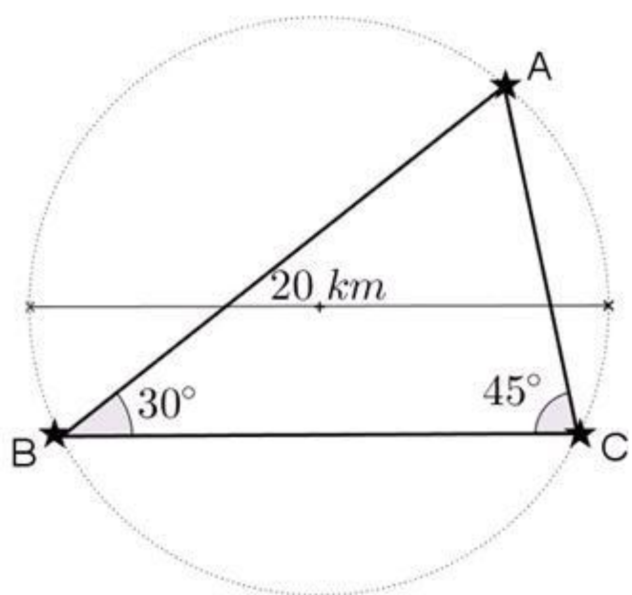
  Realizar em grupo de dois ou três alunos para que as resoluções sejam trocadas e discutidas entre si promovendo um melhor entendimento.

- Teste e prova.

  Avaliar a evolução e crescimento do aluno, seus erros, suas dificuldades. Se necessário retomar e recuperar conceitos e promover maiores discussões em sala sobre o conteúdo.

Modelo de Prova:

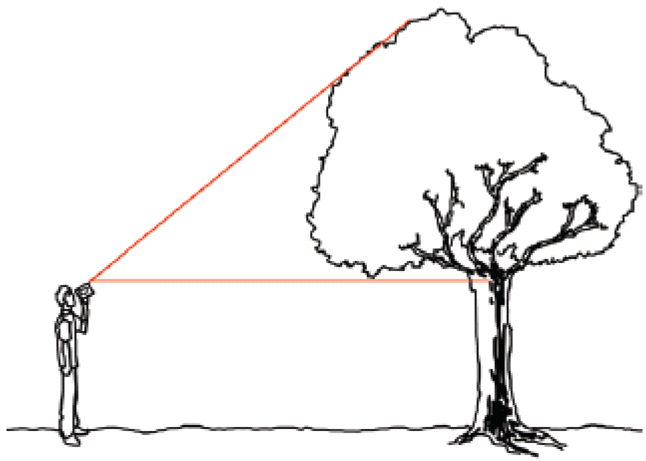
1)Um astrônomo observou que três estrelas A, B e C estavam disposta no céu, da seguinte forma: pertenciam a uma circunferência de diâmetro 20 km, e o ângulo ABC = 30º e BCA = 45º. Qual à distância entre as estrelas A e B e distância entre as estrelas A e C.



Descritores:

H13- Resolver problemas envolvendo a lei dos senos ou a lei dos cossenos.

2)Uma pessoa de 1,72 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo de 30º com a horizontal. Conhecendo a distância de 10m do observador até a árvore, calcular a altura da árvore. Dados cos 30º = 0.8, sen 30º = 0.5 e tg 30º = 0,58.



Descritores:

H12 – Resolver problemas envolvendo razões trigonométricas do triângulo retângulo.

3) João avista uma pipa que está a 5 km de distância dele e o ângulo que ele faz com a pipa é de 45º. Pedro avista a mesma pipa que está 2Km de distância. Qual a distancia horizontal entre João e Pedro? Dados sen 45º = 0,7 e cos 45º = 0,7.

Descritores:

H13- Resolver problemas envolvendo a lei dos senos ou a lei dos cossenos.

4) Um robô, percorrendo os lados AB e BC de um quadrado, andou 15 m. Quantos metros ele andaria a menos se tivesse ido diretamente de A para C?

Descritores:

H11 – Resolver problemas contextualizados, usando o Teorema de Pitágoras.

3. Referências:

Iezzi, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática, 1: ensino médio. São Paulo: Moderna, 2010.

Smole, Kátia Cristina Stocco. Matemática, 1: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

Roteiros de Ação sugeridos pelo Curso Formação Continuada Para Professores de Matemática.