Plano de Trabalho 2.

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano 2º Bimestre/2013

Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Tarefa 4:

Cursista: Marcia Eliane Furtado de Oliveira

Tutora: LEZIETI CUBEIRO DA COSTA

Grupo: 05

Sumário:

Introdução:

O objetivo desse plano de trabalho é introduzir as razões trigonométricas no triângulo retângulo de uma maneira contextualizada e agradável.

Começamos com um pouco de história para dar mais significado a esse estudo integrando algumas atividades no contexto. Usando atividades que envolvam dobraduras de papel para estudar seno, cosseno e tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°. Finalizando com uma atividade no geogebra.

Espera-se com esse Plano de Trabalho um ensino que possibilite aos alunos a curiosidade necessária para desenvolver analisar discutir, formar opiniões e apropriar-se desse conhecimento. Vamos ao trabalho!

Um pouco de história

Tempo de duração: 50 minutos

Recursos educacionais utilizados: Datashow.

Organização da turma: em círculo para criar uma atmosfera de debates.

Objetivo: Mostrar como surgiu a trigonometria contando um pouco da história de grandes matemáticos e seus feitos. Deixar o aluno livre para questionar e dar suas opiniões sobre os acontecimentos históricos.

Metodologia Adotada: Apresentar o texto provocar a curiosidade para o ensino da trigonometria.

Como sabemos, a Trigonometria é um dos ramos mais importantes da Matemática, que estuda e analisa as relações entre os lados e ângulos dos triângulos, denominadas de razões trigonométricas. Ela possui uma infinidade de aplicações em diferentes áreas. Dentre elas, podemos destacar a necessidade de sua utilização na engenharia civil, naval, agronômica e na astronomia – áreas que impulsionaram, historicamente, a procura de conhecimentos sobre este assunto.

A origem das primeiras pesquisas sobre trigonometria é incerta. As primeiras evidências sobre estudos, realizados nesta área da Matemática, são atribuídas aos babilônios e aos egípcios por conta de manuscritos elaborados por esse povos entre 1900 e 1600 a.C, aproximadamente. Essas duas civilizações utilizaram empiricamente essas relações de medidas na agricultura e na construção civil como, por exemplo, na edificação das grandes pirâmides. Desenvolveram, também, estudos astronômicos, a partir de observações feitas sobre o posicionamento dos corpos celestes, os quais foram utilizados na elaboração de mapas de navegação e na fabricação de calendários para a previsão do tempo, extremamente úteis na agricultura. Na civilização egípcia, foi adotada a medida dos ângulos em graus, minutos e segundos, utilizando a base sexagesimal, herdada da cultura babilônica, a qual utilizamos até hoje.

Os estudos sobre trigonometria acentuaram-se na Grécia Antiga, conhecida por ser o berço de grandes sábios, como por exemplo, Tales de Mileto (625-546 a. C.) e Pitágoras de Samos (570-495 a. C.), seu discípulo. Tales de Mileto realizou pesquisas sobre a semelhança de triângulos, impulsionando ainda mais os estudos nesta área. Já Pitágoras, com a demonstração do conhecido teorema que leva seu nome, chegou ao que é considerada, hoje, como a relação fundamental da Trigonometria.

Há uma parábola sobre Tales de Mileto que narra uma de suas visitas ao Egito, na qual se ofereceu a calcular a altura da pirâmide de Quéops sem a necessidade de escalá-la. Usando seus conhecimentos de semelhança de triângulos, surpreendeu o faraó Amasis com tamanha proeza. Para executar essa missão, ordenou que se fincasse uma estaca aprumada (de altura h) na extremidade da sombra projetada pela grande pirâmide e, em seguida, ordenou que se medisse a sombra da estaca (de medida l), a sombra da pirâmide (de comprimento d) e a medida de sua base (de comprimento c). De posse desses valores e fazendo uso dos conceitos de proporção e semelhança, existentes entre as medidas do tamanho dos objetos e as suas respectivas sombras, expressou a seguinte relação:

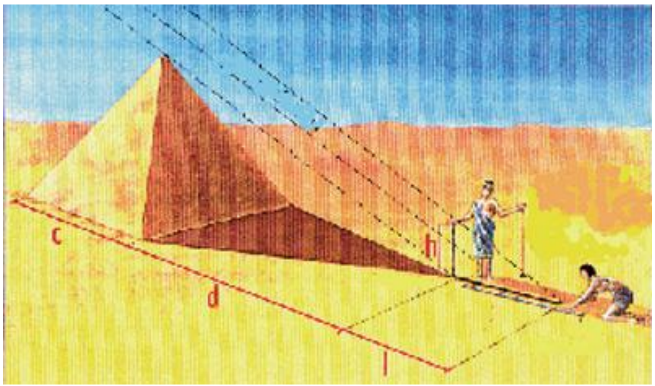


Figura 1: Modelo utilizado por Tales, para calcular a altura da pirâmide de Quéops.

Fonte: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/images/thales1.gif

$$\frac{h}{l} = \frac{H}{d + \frac{c}{2}}$$

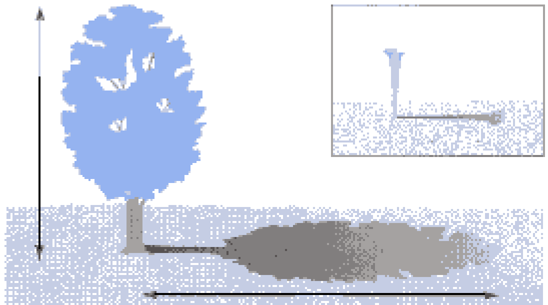
Com esta equação, conseguiu determinar a altura da pirâmide (*H*).

Atividade

Agora é sua vez. Que tal imitar Tales?

A altura de uma árvore pode ser calculada comparando-se o comprimento da sua sombra com o comprimento da sombra de um bastão de altura conhecida.

Se um bastão de 1 metro produz uma sombra de 1,72m e a sombra de uma árvore mede 16 metros, qual a altura da árvore?



Ainda na Grécia Antiga, mais alguns anos depois, existiram outros grandes estudiosos, como Erastóstenes de Cirene (276-194 a. C.), a quem se atribui a façanha de calcular a circunferência e o raio da Terra com tamanha precisão que ainda surpreende os matemáticos contemporâneos, pela simplicidade e eficácia de sua ideia. Este sábio descobriu que num poço localizado em Alexandria, em determinado dia e horário do ano, não se produzia sombra no seu interior. Deduziu, então, que os raios do Sol estavam incidindo verticalmente sobre o poço, sem gerar sombra, o que deveria acontecer com qualquer objeto. Contudo, na cidade de Siena, há 785 km de Alexandria, no mesmo dia e na mesma hora, este fato não fora observado. Erastóstenes decidiu, então, medir o ângulo de incidência do Sol nesse lugar, chegando ao valor aproximado de$7,2^0$.

Com esta simples observação, concluiu que a Terra não era plana e que a distância entre estas duas cidades representaria o comprimento de arco de um setor circular da Terra, gerado ao dividir a sua circunferência inteira em 50 partes (*0017,2=.36050*). Desta forma, conseguiu chegar a um valor aproximado do comprimento de circunfe-rência da Terra de 39.250 km=50.785 km, valor muito próximo da medida contemporânea dada sobre a linha equatorial, que é de 40.072 km. Este erro é pequeno, se considerarmos as ferramentas simples de medição utilizadas na época.

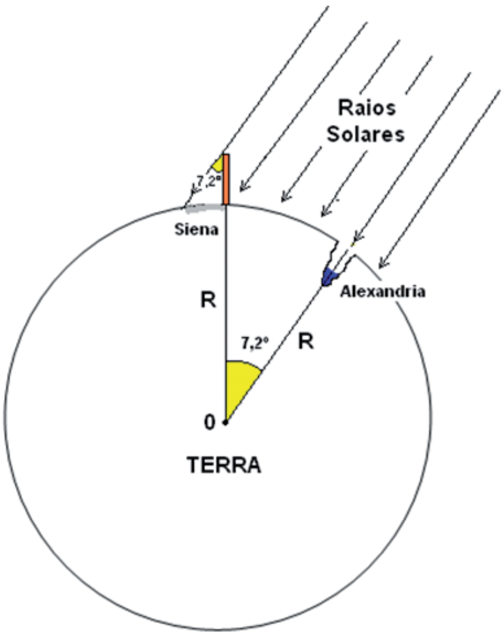
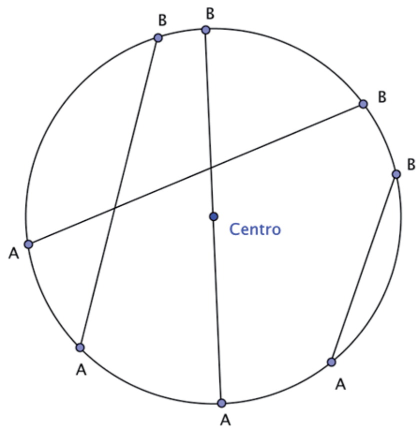


Figura 2: Modelo idealizado por Erastóstenes para calcular o raio da Terra.

Outro sábio grego que fez importantes contribuições foi o astrônomo Hiparco de Nicéia (190 - 120 a.C.), a quem se atribui a construção da primeira tabela trigonométrica ("tábua de cordas"), motivo pelo qual foi lhe concedido o direito de ser denominado "pai da Trigonometria". Esta tabela de cordas consiste em associar a cada **corda** de um arco um ângulo central correspondente, que podemos relacionar a uma tabela de senos, utilizando a lei dos senos. Posteriormente a ele, Ptolomeu (100-180 .d.C.) publicou treze livros sobre Trigonometria, tomando como base os estudos feitos por Hiparco, o que impulsionou a Trigonometria retilínea e esférica.

Uma Corda é um segmento de reta que inicia e finda em dois pontos pertencentes a uma circunferência. Veja exemplos na imagem a seguir. Figura 3: Todos os segmentos no desenho acima são cordas.



Nos séculos seguintes, a trigonometria foi atingindo um patamar de grande área dentro da Matemática. As contribuições deixadas pelos indianos, árabes e os povos dos países do ocidente, durante a Idade Média, contribuíram na construção da Trigonometria moderna, onde se destacam grandes cientistas, tais como Isaac Newton (1642-1727) e Leonard Euler (1707-1783), cujos trabalhos possibilitaram infinitas aplicações em todas as áreas que usam modelos e ferramentas tecnológicas.

Curiosidade1: A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri=três, gonos=ângulos e metron=medir. Daí seu significado: medida dos triângulos.

Curiosidade2: Já que vamos estudar a trigonometria dos triângulos que tal assistir ao vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=9G3ga_2yAxI

Desenvolvimento

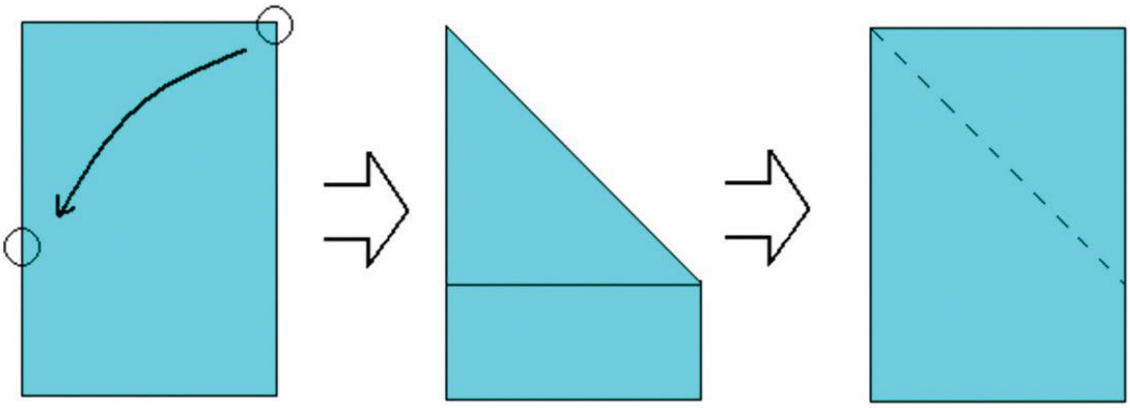
Atividade I:

- **Objetivos:** Aprofundar os conceitos de razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Calcular experimentalmente e analiticamente as razões trigonométricas dos ângulos notáveis.
- **Pré-requisitos:** Identificar os lados de um triângulo retângulo; saber utilizar o transferidor e a régua para efetuar medições; efetuar cálculos com números reais; reconhecer triângulos semelhantes; determinar a medida de um ângulo interno de um triângulo, a partir da medida dos outros dois; saber aplicar o Teorema de Pitágoras.
- **Material necessário:** Papel A4 branco ou colorido, transferidor, régua de 30 cm, caneta e calculadora que efetue cálculo de raízes quadradas, Datashow
- **Organização da classe:** Turma organizada em grupos de dois ou três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- **Descritores associados:** H05 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade. H35 - Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.
- **Tempo de duração**: 3 aulas de 50 minutos

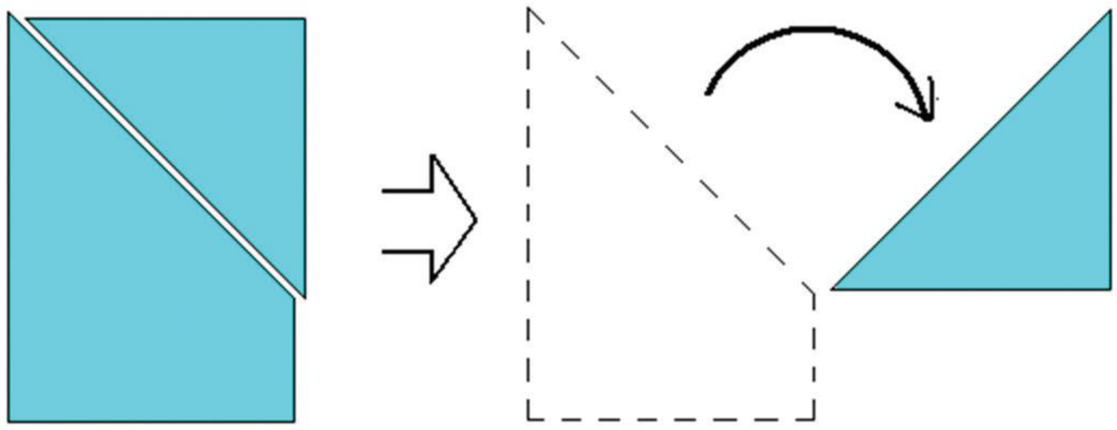
(Construção do triângulo retângulo ângulo de 45º com dobras de papel. Roteiro 2 do curso formação continuada)

Uma Estimativa Experimental para as Razões Trigonométricas do Ângulo de 45º

1. Utilizando uma folha de papel A4, com o lado menor localizado na posição inferior, pegue a ponta superior direita e leve-a até a margem lateral esquerda do papel, deixando toda a margem superior superposta com a margem lateral esquerda, como é mostrado na figura 1. Deixe bem marcada a dobra feita.



2. Com ajuda de uma régua, faça um corte no papel seguindo a direção deixada pela dobra, no sentido de baixo para cima, separando um triângulo. Veja figura 2.



Observe o triângulo obtido.

3. Este triângulo é retângulo? Justifique e compare sua justificativa com a de seus colegas.

4. Você seria capaz de dizer qual é a medida dos outros ângulos desse triângulo?

5. Os ângulos agudos são iguais? Por quê? Se necessário, use um transferidor para medi-los. Não deixe de verificar com seus colegas os valores que eles obtiveram e registre suas respostas a seguir.

5. Podemos considerar este triângulo como sendo um triângulo isóscele? Qual argumento justifica esse fato? Discuta com seus colegas e registre.

6. Lembrando que:

Seno de α	$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$
Cosseno de α	$\cos\alpha = \dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$
Tangente de α	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$

Com o auxílio de uma régua e de uma calculadora, preencha a tabela a seguir.

ÂNGULO DE 45º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 45º (cm)	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 45º (cm)	
Medida da hipotenusa (cm)	
$\operatorname{sen} 45°$	
$\cos 45°$	
$\operatorname{tg} 45°$	

Atividade 2

Estimativa Experimental para as Razões Trigonométricas dos Ângulos 30º e 60º

7. Usando um transferidor e uma folha de papel A4, obtenha um ângulo de 30º. Como mostra a figura 3, trace uma linha transversal no papel a partir da marca feita.

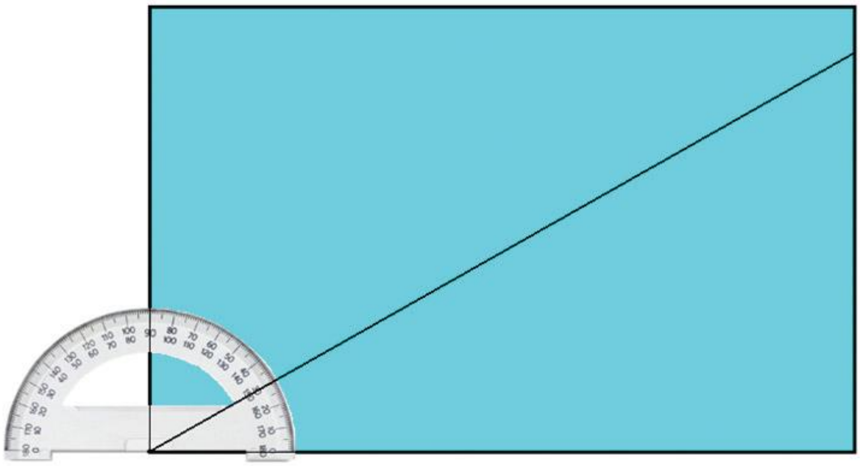


Figura 3

8. Dobrando o papel na linha marcada, faça um corte e separe o triângulo retângulo. Posteriormente, marque com uma caneta os ângulos de 30º e 60º, como mostra a figura 4.

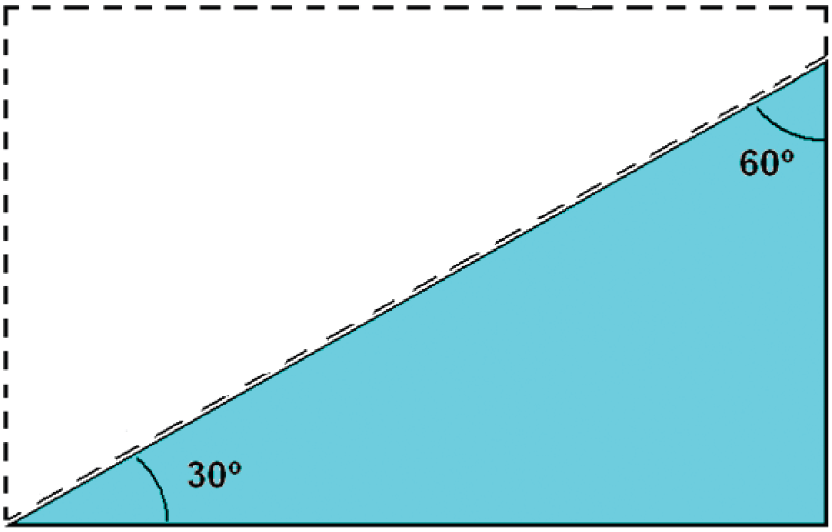


Figura 4

9. Com o auxílio de uma régua e de uma calculadora, preencha as tabelas a seguir, encontrando experimentalmente o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30° e 60°.

ÂNGULO DE 30º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 30º (cm)	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 30º (cm)	
Medida da hipotenusa (cm)	
$sen\ 30°$	
$\cos 30°$	
$tg\ 30°$	

ÂNGULO DE 60º	
Medida do cateto oposto ao ângulo 60º (cm)	
Medida do cateto adjacente ao ângulo 60º (cm)	
Medida da hipotenusa (cm)	
$sen\ 60°$	
$\cos 60°$	
$tg\ 60°$	

10. Observe e compare os resultados encontrados para as razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º. Você percebe alguma relação entre os valores encontrados?

a) Existe alguma relação entre o valor do $\boldsymbol{sen\ 30°}$ e do $\mathbf{cos\,60°}$? Que relação é essa?

b) E entre $\boldsymbol{sen\ 60°}$ e $\mathbf{cos\,30°}$? Que relação é essa?

11. Discuta com os seus colegas e tente descobrir por que isso acontece. Registre suas conclusões.

12. Preencha a tabela a seguir e tente encontrar alguma relação entre o seno e o cosseno e a tangente de um mesmo ângulo.

ÂNGULOS DE 30º e 60°

30º	$\frac{sen\ 30°}{cos\ 30°} =$	$tg\ 30° =$
60°	$\frac{sen\ 60°}{cos\ 60°} =$	$tg\ 60° =$

Atividade 3

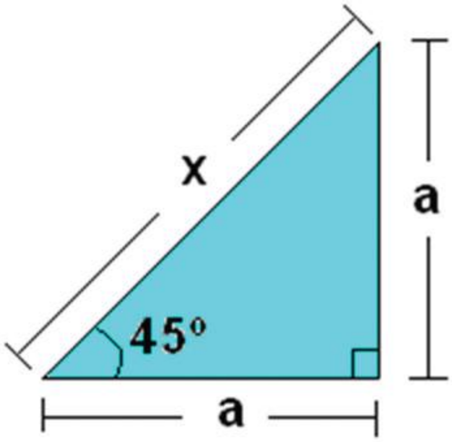
Encontrando os Valores Exatos das Razões Trigonométricas do Ângulo de 45º

Como você pode ter observado, as razões trigonométricas em um triângulo retângulo independem do tamanho que ele possui. Estas razões dependem unicamente do ângulo. Por este motivo, em triângulos retângulos semelhantes, as razões trigonométricas dos ângulos correspondentes são iguais.

Usaremos este argumento para calcular de forma exata, as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Nos dois próximos itens não use calculadora. Deixe as suas respostas em forma de fração, racionalizando os denominadores, caso seja necessário. Apenas no item final, você deverá usar a calculadora para verificar e confirmar as respostas experimentais obtidas.

Como já sabemos todos os triângulos retângulos que possuem seus ângulos agudos iguais a 45º, são triângulos isósceles. Portanto, eles têm dois lados com a mesma medida. Sendo assim, consideremos o seguinte triângulo isóscele:



13. Usando o Teorema de Pitágoras, determine o valor da hipotenusa **x**.
14. Com o valor encontrado no item anterior, determine o valor das seguintes razões trigonométricas:

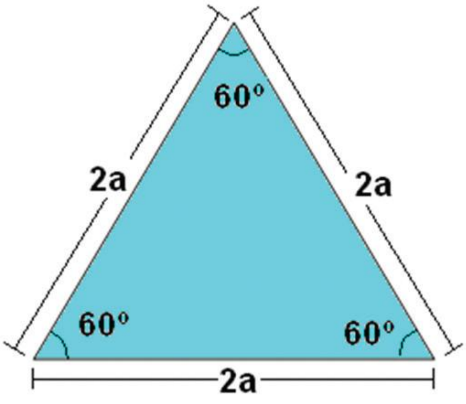
	45º
Seno	
Cosseno	
Tangente	

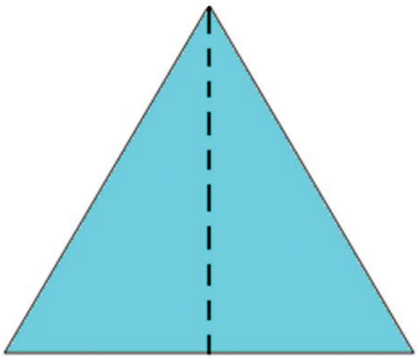
Não se esqueça de racionalizar os denominadores de suas respostas!

Atividade 4

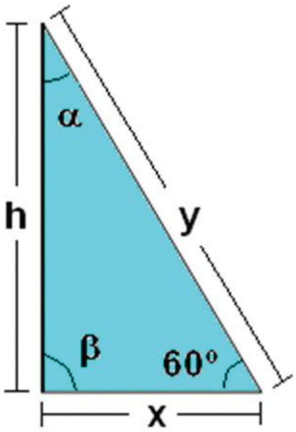
Encontrando os Valores Exatos para as Razões Trigonométricas dos Ângulos de 30º e 60º.

15. Considere o triângulo equilátero da figura 5 e trace uma altura. Lembre-se que a altura de um triângulo equilátero é eixo de simetria desse triângulo.





16. Observe o triângulo (veja figura 7), complete a tabela com os valores correspondentes.



A	
B	
H	
X	
Y	

Dica: Verifique se é possível utilizar o Teorema de Pitágoras nesse triângulo!

17. Usando os valores obtidos no item anterior, determine as razões trigonométricas dos ângulos 30º e 60º e preencha a tabela seguinte:

	30°	60°
Seno		
Cosseno		
Tangente		

Dica: Não se esqueça de racionalizar os denominadores de suas respostas!

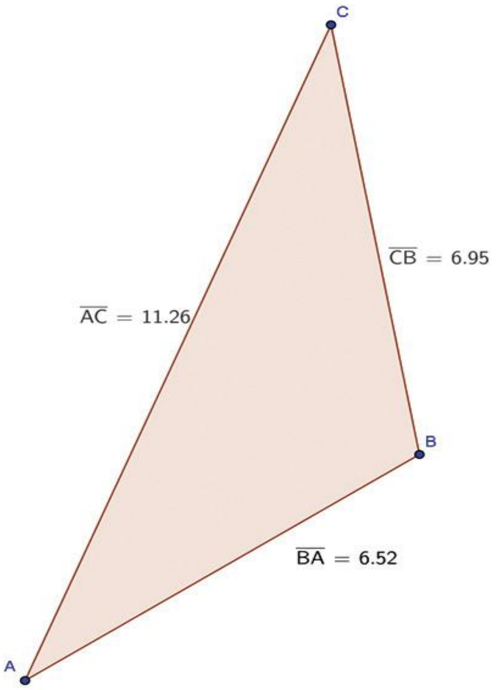
18. Usando uma calculadora, compare se os valores encontrados por você, experimentalmente, estão de acordo com os valores exatos.

Atividade II: (Roteiro 5 do curso formação continuada lei dos cossenos.)

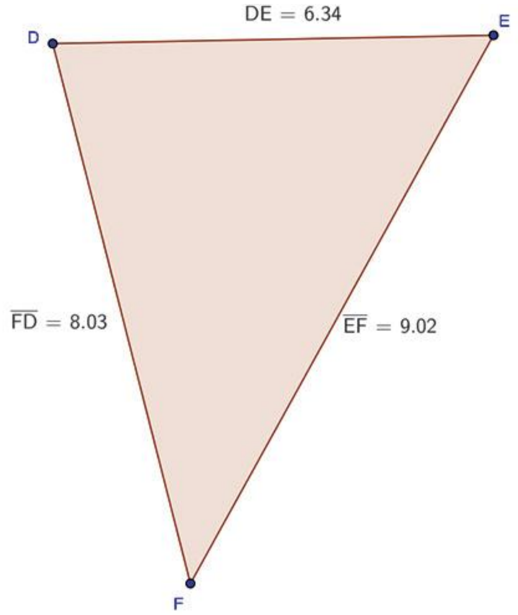
Podemos usar o Teorema de Pitágoras em qualquer triângulo?

- **Objetivos:** Apresentar a Lei dos Cossenos como uma generalização do Teorema de Pitágoras que pode ser usada em qualquer triângulo
- **Pré-requisitos:** Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, cálculos com números reais.
- **Material necessário:** Folha de atividade, calculadora científica.
- **Organização da classe:** Turma organizada em grupos de dois ou três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- **Descritores associados:** H13 – Resolver problemas, envolvendo a lei dos cossenos ou a lei dos senos.
- **Tempo de duração**: 2 aulas de 50 minutos

1. Para começar nossa atividade, observe com atenção os três triângulos a seguir:

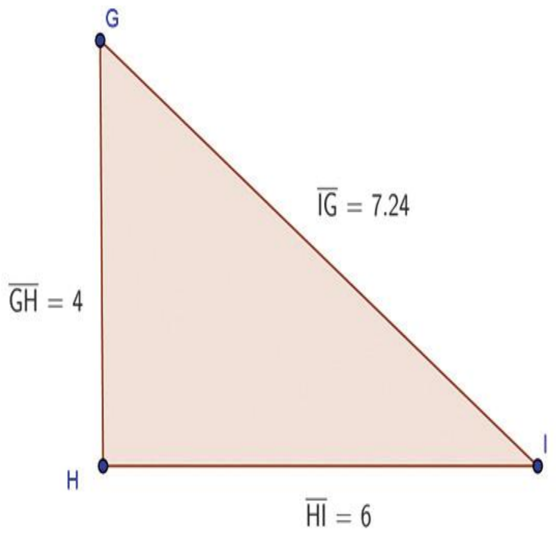


Triângulo 1



Triângulo 2

Triângulo
3



Atividade 1

1. Será que a relação de Pitágoras vale nesses triângulos?
   Use a Tabela 1 para organizar os valores e verifique!

Triângulo 1		Triângulo 2		Triângulo 3	
AC	11,26	EF	9,02	IG	7,24
CB	6,95	FD	8,03	GH	4
BA	6,52	DE	6,34	HI	6
$\overline{AC}^2$		$\overline{EF}^2$		$\overline{IG}^2$	
$\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2$		$\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2$		$\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2$	

2. Observe os valores que você completou nas 4ª e 5ª linhas. Eles são iguais? Troque ideias com seus colegas e registre as conclusões.
3. Os triângulos ABC, EFD e GHI são triângulos retângulos?
4. Será que esse fato está relacionado com o fato de os valores das linhas 4 e 5 serem diferentes? Discuta com seus colegas.
5. Com a ajuda de um transferidor verifique os ângulos dos triângulos 1, 2 e 3. Agora apresente um argumento para o triângulo 3 ter o valor de $\overline{IG}^2$ mais próximo de $\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2$.

Vamos descobrir o que está acontecendo?

6. Calcule as diferenças indicadas na Tabela abaixo:

Triângulo 1	$\overline{AC}^2 - (\overline{CB}^2 + \overline{BA}^2)$	
Triângulo 2	$\overline{EF}^2 - (\overline{FD}^2 + \overline{DE}^2)$	
Triângulo 3	$\overline{IG}^2 - (\overline{GH}^2 + \overline{HI}^2)$	

7. Utilizando uma calculadora científica, calcule os valores dos cossenos dos ângulos indicados nos triângulos. (Aproveite para verificar suas medidas.)

Triângulo 1	$\cos 113{,}38$	
Triângulo 2	$\cos 76{,}81$	
Triângulo 3	$\cos 90{,}57$	

8. Com os valores dos cossenos obtidos no item anterior, preencha a Tabela abaixo.

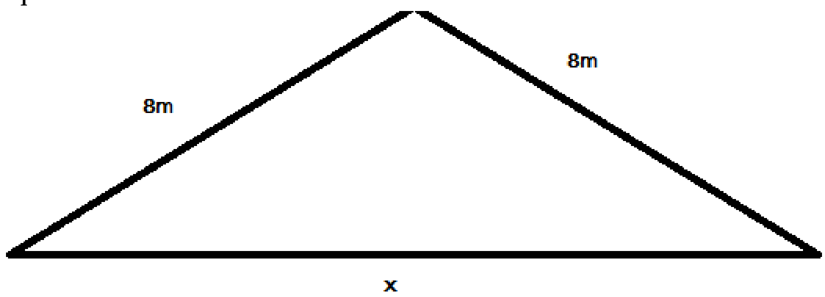
Triângulo 1	$2CB.BA.\cos\hat{B}$	
Triângulo 2	$2FD.DE.\cos\hat{D}$	
Triângulo 3	$2GH.HI.\cos\hat{B}\overline{H}$	

9. Compare os valores das tabelas 2 e 4. Notou alguma semelhança? Registre suas observações.
10. E se o triângulo for retângulo? O que acontece com a Lei dos Cossenos? Troque ideias com seus colegas e registre sua conclusão a seguir.

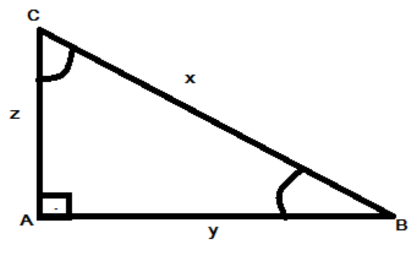
Avaliação:

- **Objetivos:** Avaliar o conteúdo absorvido com a aplicação desse plano de trabalho e as aulas sobre trigonometria. Verificando se o aluno é capaz de identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo, entender as razões trigonométricas e aplica-las na obtenção de distâncias e finalmente resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.
- **Pré-requisitos:** Ter participado ativamente do plano de trabalho
- **Material necessário:** Folha de atividade, caneta, lápis e borracha.
- **Organização da classe:** Turma organizada em grupos de dois alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- **Tempo de duração**: 50 minutos

1. É possível aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a distância x no triângulo abaixo? Por quê?



2. Qual é o melhor caminho para encontrar o tamanho x? Você é capaz de encontrá-lo?
3. Responda com base na análise do triângulo retângulo da figura abaixo.



a) Qual é o valor da soma $\hat{B} + \hat{C}$?

b) Indique as frações correspondentes a $sen\ \hat{B},\ \cos\hat{B}$ e $tg\hat{B}$.

c) Indique agora as frações correspondentes a $sen\ \hat{C},\ \cos\hat{C}$ e $tg\hat{C}$.

4. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

Referências Bibliográficas:

Livro didático:

- Dante - Matemática Contexto e Aplicações volume 1.
  Editora Ática.

Sites:

- http://www.brasilescola.com/matematica/trigonometria-num-triangulo-qualquer.htm

Material didático:

- Roteiros do curso formação continuada 2° bimestre 2° ciclo.