

**Nome: Rodolfo da Costa Neves**  
**Série: 1º ano do ensino médio / 2º Bimestre**  
**Grupo: 5**  
**Tutor: Lezieti Cubeiro da Costa**  
**Tema: Relações trigonométricas no triângulo retângulo**

## INTRODUÇÃO

---

### Abordagem ao tema

A geometria nasceu de questões que envolviam tarefas diárias dos povos antigos. Desde partilha de terras férteis, passando por construções e até mesmo vislumbrando o espaço. O berço do nascimento da geometria é a antiga mesopotâmia, lugar onde se encontra as civilizações que mais contribuíram para o desenvolvimento: Egito, Babilônia, Grécia e etc. Mas é na Grécia que nasce o grande Gênio Euclides, que foi quem deu forma definitiva a Geometria.

Desde o tempo da antiga Grécia, a geometria sempre foi uma ciência aplicada, empregada para resolver problemas práticos.

Em particular, esse plano de trabalho tratará das relações trigonométricas no triângulo retângulo, assim como as suas aplicações e consequências no dia a dia.

Essas relações são utilizadas em diversos campos da ciência, em especial na física, engenharia e astronomia.

### Pré-requisitos

---

Vamos abordar algumas questões que servirão de base para o estudo das relações trigonométricas. Aqui iremos conhecer melhor o triângulo retângulo e suas relações métricas. Esse contato inicial vai proporcionar um aprendizado melhor deste conteúdo.

**Duração: (Duração: 2 aulas/tempos de 50 minutos)**

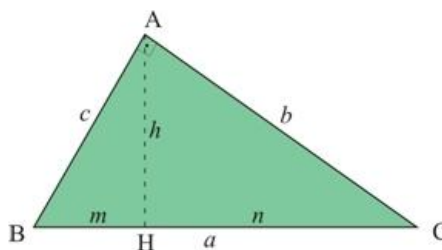
**Material: Quadro negro.**

**Assunto: Triângulo retângulo e relações métricas no triângulo retângulo.**

**Objetivo: Facilitar a aprendizagem do conteúdo a ser abordado: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.**

### ➤ *Conhecendo o triângulo retângulo*

Todo triângulo que tem um ângulo de  $90^\circ$  (ângulo reto) é denominado **triângulo retângulo**. O triângulo ABC tem um ângulo reto e é denominado triângulo retângulo.



Onde:

$a$ : hipotenusa;

$b$  e  $c$ : catetos;

$h$ : altura relativa à hipotenusa;

$m$  e  $n$ : projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

### ➤ *Relações métricas no triângulo retângulo*

As relações que existem entre os diversos segmentos do triângulo retângulo são chamadas de relações métricas. Essas relações podem ser demonstradas por semelhança de triângulo, mas isso não será abordado aqui, já que o objetivo é trabalhar as relações trigonométricas e iremos utilizar deste tópico apenas com o objetivo de revisar esse pré-requisito.

Assim, para um triângulo retângulo ABC, podemos estabelecer as seguintes relações entre as medidas de seus elementos:

- O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

- O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

- O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. (**Teorema de Pitágoras**)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O teorema de Pitágoras será fundamental para trabalharmos com as relações no círculo trigonométrico, mas isso será abordado nos próximos bimestres.

## DESENVOLVIMENTO

---

**Duração:** (Duração: duas aula/tempos de 50 minutos)

**Material:** Material impresso, Geogebra com computador e data show.

**Assunto:** Relações Trigonômétricas no Triângulo Retângulo

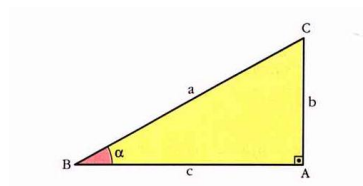
**Pré-requisitos:** Triângulo retângulo

**Metodologia:** Definiremos as relações trigonométricas e utilizaremos exercícios para aplica-las.

**Objetivo:** Fazer com que os alunos despertem interesse pelo conteúdo através de uma visão inicial simples.

### Relações Trigonômétricas no Triângulo Retângulo

Num triângulo retângulo podemos estabelecer razões entre as medidas dos seus lados: catetos (lados que formam o ângulo reto) e a hipotenusa (lado que se opõe ao ângulo reto).



As medidas (a mesma unidade) **a**, **b** e **c**, são, respectivamente, da hipotenusa, cateto oposto ao ângulo B ( $\alpha$ ) e do cateto adjacente ao ângulo B.

#### ➤ Seno

Seno de um ângulo agudo.

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.

Então:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

### ➤ Cosseno

Cosseno de um ângulo agudo.

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.

Então:

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$$

### ➤ Tangente

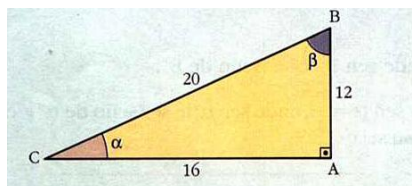
Tangente de um ângulo agudo.

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a esse ângulo.

Então:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

Exemplo: Considere o triângulo ABC, retângulo em A.

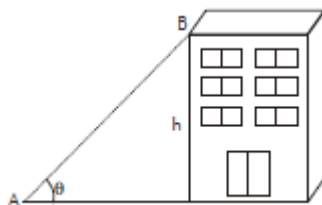


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{20} = 0,6 ; \cos \alpha = \frac{16}{20} = 0,8 ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{16} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{16}{20} = 0,8 ; \cos \alpha = \frac{12}{20} = 0,6 ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{12} = 1,33$$

### Exercícios de fixação

**Questão 01:** Observe a figura a seguir e determine a altura  $h$  do edifício, sabendo que a distância do ponto A ao ponto B é 25 cm e  $\operatorname{sen} \theta = 0,6$ .

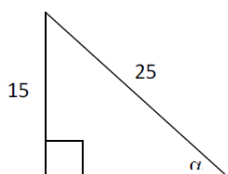


Solução:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{h}{25} = 0,6 \rightarrow h = 15 \text{ m}$$

Logo o prédio tem 15 metros de altura.

**Questão 02:** Calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo indicado na figura.



Solução:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Para calcularmos o cosseno do ângulo, precisamos saber a medida do cateto adjacente, logo utilizaremos o teorema de Pitágoras para descobri-lo e chamaremos de  $x$ .

$$25^2 = x^2 + 15^2 \rightarrow x = \sqrt{625 - 225} \rightarrow x = \sqrt{400} \rightarrow x = 20.$$

Logo:

$$\cos \alpha = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

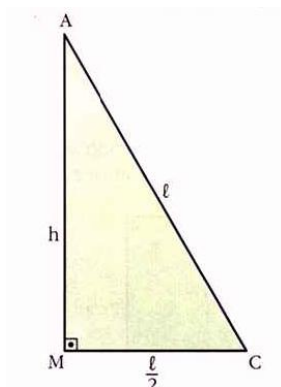
### ➤ Ângulos Notáveis

Alguns ângulos, devido ao seu uso constante, merecem uma atenção especial. É o caso daqueles que medem  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

- $30^\circ$  e  $60^\circ$

Para analisarmos esses dois ângulos, iremos considerar um triângulo equilátero onde a mediana, a altura e a bissetriz relativas a um mesmo ângulo interno coincidem.

Antes, vamos calcular a altura desse triângulo.



$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

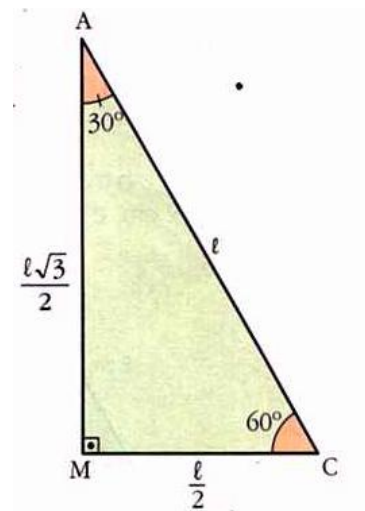
### ❖ Cálculo do seno, cosseno e tangente de $30^\circ$ e $60^\circ$ .

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} \rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

❖ **Cálculo do seno, cosseno e tangente de 45°.**

Para o cálculo com o ângulo de 45° iremos considerar um triângulo retângulo isóscele.

Vamos calcular o valor da hipotenusa e mais uma vez utilizaremos o teorema de Pitágoras.

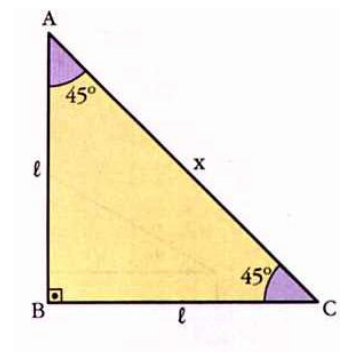
$$x^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow x = \sqrt{2l^2} \rightarrow x = l\sqrt{2}$$

Então:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{l}{l} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

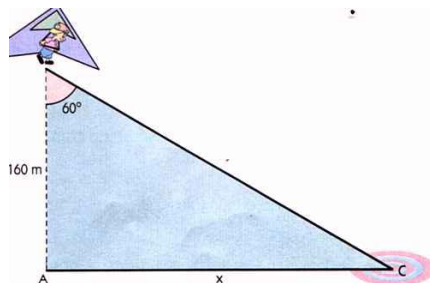


Podemos resumir esses valores na tabela abaixo:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## Exercícios

**Questão 01:** Num campeonato de asa-delta, um participante se encontra a uma altura de 160 m e vê o ponto de chegada a um ângulo de  $60^\circ$ , conforme a figura. Calcule a componente horizontal  $x$  da distancia aproximada em que ele está desse ponde de chegada.

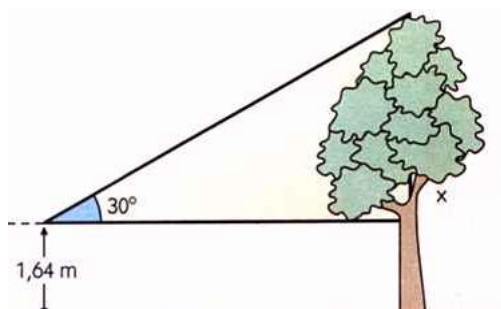


Solução:

A medida  $x$  é o cateto oposto ao ângulo de  $60^\circ$  no triângulo retângulo formado na figura acima e 160 m é o cateto adjacente. Nesse caso iremos utilizar uma relação trigonométrica que envolva essas duas medidas, a tangente. Vamos considera a  $\sqrt{3} = 1,7$ .

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{160} = \sqrt{3} \rightarrow x = 160\sqrt{3} = 160 \cdot 1,7 = 272.$$

**Questão 02:** Uma pessoa de 1,64 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Conhecendo a altura da de 6,0 m. Qual a distancia entre o observador r o topo da árvore?



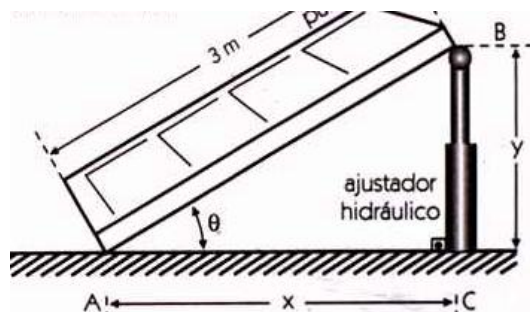
Solução:

O valor que queremos descobrir é o comprimento da hipotenusa da figura acima. Sabemos que a altura da arvore (6m) é o cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$ . Iremos utilizar o seno.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 12m$$



**Questão 03:** A figura abaixo mostra um painel solar de 3m de largura equipado com um ajustador hidráulico. À medida que o Sol se eleva, o painel é ajustado automaticamente de modo que os raios de Sol incidam perpendicularmente nele. Determine o valor de  $x$  e  $y$ . Considere  $\theta = 45^\circ$  e  $\sqrt{2} = 1,41$



Solução:

Os valores que queremos descobrir,  $x$  e  $y$ , são respectivamente, catetos adjacentes e opostos ao ângulo de  $45^\circ$ . Temos também que 3 m é a medida da hipotenusa desse triângulo retângulo. Iremos utilizar o seno e o cosseno.

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{y}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2y = 3\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{3 \cdot 1,41}{2} = \frac{4,23}{2} \rightarrow y = 2,11.$$

Como esse triângulo é isóscele, temos que  $x = y = 2,11$ .

### Avaliação

**Duração:** (Duração: duas aulas/tempos de 50 minutos)

**Material:** Atividade avaliativa impressa. Utilizar as atividades relacionadas ao conteúdo abordado.

**Metodologia:** Será entregue aos alunos a atividade proposta abaixo. Os mesmos farão em grupo (três alunos) com consulta, obedecendo ao tempo de duração.

**Apresentar uma situação prática.**

**Desenvolver o conteúdo para a solução da atividade prática.**

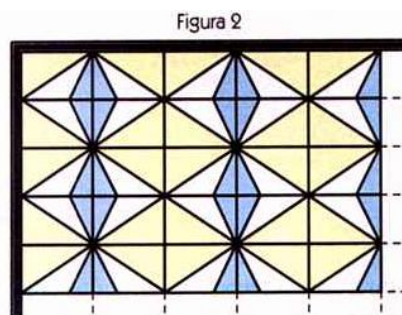
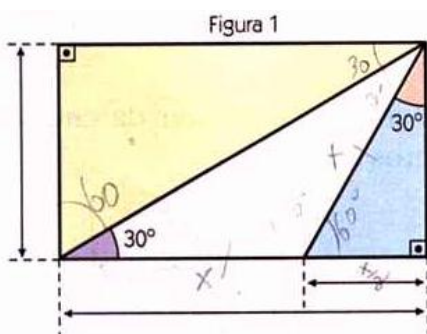
**Solucionar a atividade prática.**

**Objetivo:** Investigar a capacidade da utilização dos conhecimentos adquiridos para resolver problemas do cotidiano envolvendo as relações trigonométricas, observando as competências e habilidades adquiridas por eles em sala de aula.

### Proposta

**Questão 1 :** Para forrar o chão da garagem da casa de dona Inês são assentados 8 colunas com 28 fileiras de piso cerâmico retangular, do tipo da figura 1, conforme a

disposição da figura 2. Qual é a razão entre as áreas da cor predominante para aquela que menos aparece?



**Habilidade 12** - Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).

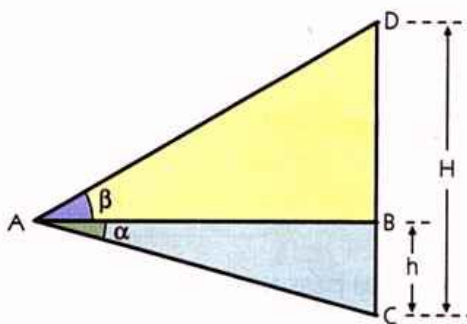
**C1** - Calcular um dos lados de um triângulo retângulo em um problema contextualizado ou não, com o auxílio do seno, cosseno ou tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Caso a resposta seja numérica, devem ser dados o seno, o cosseno e a tangente do ângulo correspondente.

**Questão 2:** Num trabalho prático de topografia, um estudante de Engenharia Civil deve determinar a altura de um prédio situado em terreno plano. Instalado o aparelho adequado num ponto do terreno, o topo do prédio é visto sob um ângulo de  $60^\circ$ . Afastando-se o aparelho mais 10 metros do edifício, seu topo passa a ser visto sob um ângulo de  $45^\circ$ . Desprezando-se a altura do aparelho, determine a altura do edifício.

**Habilidade 12** - Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).

**C1** - Calcular um dos lados de um triângulo retângulo em um problema contextualizado ou não, com o auxílio do seno, cosseno ou tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Caso a resposta seja numérica, devem ser dados o seno, o cosseno e a tangente do ângulo correspondente.

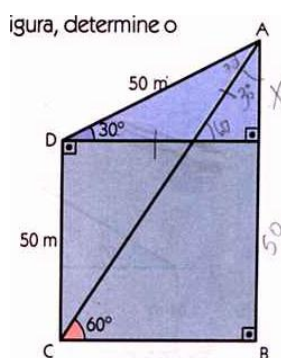
**Questão 3:** Para determinar a altura  $H$  de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal  $AB$  e mediu os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , tendo a seguir medido  $BC = h$ . Determine a altura da chaminé



**Habilidade 12** - Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).

**C1** - Calcular um dos lados de um triângulo retângulo em um problema contextualizado ou não, com o auxílio do seno, cosseno ou tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Caso a resposta seja numérica, devem ser dados o seno, o cosseno e a tangente do ângulo correspondente.

**Questão 4:** Na figura determine o valor de AB.



**Habilidade 12** - Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ).

**C1** - Calcular um dos lados de um triângulo retângulo em um problema contextualizado ou não, com o auxílio do seno, cosseno ou tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Caso a resposta seja numérica, devem ser dados o seno, o cosseno e a tangente do ângulo correspondente.



## Bibliografia

---

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Volume Único. São Paulo: Ática, 2000.

IEZZI, GELSON. Matemática – Volume Único. São Paulo: Atual, 1997.

PAIVA, MANOEL. Matemática – Volume Único. São Paulo: Moderna, 2008.