Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano – 2º Bimestre / 2013

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Disponível em: http://matematicajunior301.wordpress.com/2011/08/29/trigonometria-8%C2%AA-abcd/**.Acessado em 23/05/2013**

Tarefa 2

Cursista: Rosângela Luiz Ferreira

Tutora: Analia Maria Ferreira Freitas

Grupo: 2

S u m á r i o

Introdução

Encontrar caminhos matemáticos para resolução de problemas de astronomia, navegação e construção sempre despertou interesse humano. Mas a questão é: Como medir uma grandeza inacessível?

O ponto de partida está no estudo de trigonometria no triângulo retângulo que já foi estudada no final do Ensino Fundamental. Agora, o tema será aprofundado para estudos posteriores e também para auxiliá-los no estudo da Física. O conteúdo será retomado observando semelhança e proporcionalidade para que sejam definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Estudar as razões trigonométricas e saber aplicá-las na resolução de situação-problema é fundamental para o aprofundamento da Trigonometria (funções trigonométricas e outras razões e aplicações).

E importante que fique evidente para os alunos que o conhecimento sobre trigonometria tem propiciado diversos avanços tecnológicos, desde os antigos astrônomos até os dias atuais.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- **HABILIDADE RELACIONADA:** H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).
H05 – Identificar figuras semelhantes, mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade

- **PRÉ-REQUISITO:**. Identificar os lados de um triângulo retângulo; saber utilizar o transferidor e régua para efetuar medições; efetuar cálculos com números reais; reconhecer triângulos semelhantes.

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 200 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades / Software GeoGebra / Laboratório de Informática .

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** dupla ou trio para um trabalho mais dinâmico.

- **OBJETIVO:** O Objetivo com a atividade (Razões trigonométricas no triângulo retângulo) que os alunos investiguem as propriedades e características das razões trigonométricas nos triângulos retângulos, através do processo de construção e visualização na tela do computador. E a partir daí os alunos construíram os triângulos e passaram a investigar e fazer suas conjecturas e discutir e com assim ter uma aprendizagem significativa.

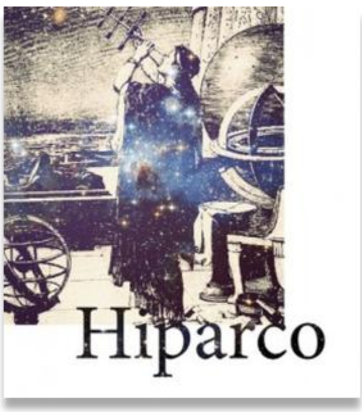
Relações trigonométricas em triângulo retângulo

Para dar início ao estudo da Trigonometria vamos ver que este estudo se deu devido a necessidade que o ser humano tinha de entender o mundo ao seu redor e de vencer certos desafios que exigiam medições de grandes distâncias e orientação para se aventurar por terra ou mar. Então vamos ver como tudo começou.

Um pouco da História da Trigonometria

[...]

É bem provável que o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a. C. Embora se tenha m dados de um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria, no ano 146 a. C., suas observações notáveis foram feitas no famoso observatório de Rodes, importante centro comercial. Hiparco era um observador extremamente cuidadoso e creditam-se a ele, em astronomia, feitos como a determinação da duração do mês lunar médio (o afastamento entre seus valores e aquele presentemente aceito não vai além de 1”), um cálculo acurado da inclinação da eclíptica e a descoberta e uma estimativa da precessão anual dos equinócios. Consta ainda que ele calculou a



paralaxe lunar, fez a determinação do perigeu e do movimento médio da Lua e organizou um catálogo de 850 estrelas. Foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c..180 a. C.), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°; sabe-se ainda que Hiparco propugnava a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes. Como quase nenhum dos escritores de Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas.

[...] O comentador Têon de Alexandria (séc. IV) atribui a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupa da cosntrução de uma tábua de cordas. [...]

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino. Domingues, Campinas: Editora da Unicamp, 2007. P. 202-3.

Retomando os estudos!!

- Vídeo – Um caminho para o curral. www.youtube.com/watch?v=t1yxIlaraQg

  Uma tempestade destrói a ponte usada para ir da casa de uma fazenda até o curral. A única solução aparente é ir através da plantação de milho, mas o risco de se perder é grande, porque a visibilidade é pequena, mas conceitos básicos de Geometria Plana e Trigonometria podem ajudar a determinar a direção que deve ser seguida e como manter essa direção ao longo do trajeto.

Disponível em: http://reginaldocariolano.blogspot.com.br/2010/08/pesquisa-operacional-modelagem-de.html**Acessado em 23/05/2013**

Na atividade a seguir o tema trigonometria será abordado de maneira simples e prática e o principal objetivo é que com essa atividade o aluno investigue as propriedades e características das razões trigonométricas nos triângulos retângulos através do processo de construção e visualização na tela.

Roteiro da Atividade 1:

a) Trace um segmento de reta AB (clique no botão).

b) Trace uma reta b perpendicular ao segmento AB passando por A (clique no botão e, em seguida, no segmento AB e no ponto A).

c) Marque um ponto C sobre a reta b, (clique no botão).

d) Construa o triângulo (clique no botão polígono da barra de ferramentas e, em seguida, nos pontos A, B, C e A).

e) Determine o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos.

f) Encontre a razão entre os lados do triângulo, digite na caixa de entrada (distância [A, C]/distância [B, C]), em seguida digite (distância [A, B]/distância [B, C]), aparecerá na janela algébrica a razão entre os lados do triângulo.

g) Arraste o vértice B do triângulo, o que você observa em relação às razões? Justifique suas conclusões.

Ao realizar a atividade serão feitos questionamentos de como se deu o processo de construção; o que aconteceu quando eles moveram o objeto na tela?
Eles deverão perceber que os valores das razões entre os lados do triângulo não se modificam. E serão realizados vários testes com valores arbitrários mantendo o triângulo inicialmente construído.

Atividade 2.

Roteiro da atividade.

a) Abra a Construção (applet) do arquivo, em seguida arraste um dos vértices dos triângulos. O que você observa? Agora, arraste o vértice A do triângulo e investigue o que acontece com o ângulo α e com as razões trigonométricas. O que você observou? Por que isso acontece? Discuta com seus colegas sobre suas investigações e anote as conclusões.

b) Arraste o vértice C do triângulo, o que você observa em relação ao ângulo α e as razões trigonométricas? Por que isso acontece? Discuta com seus colegas sobre suas investigações e anote as conclusões.

Ao realizar a atividade o alunos estarão investigando as propriedades e ter a noção dos conceitos das razões trigonométricas nos triângulos retângulos e que quando se clica e arrasta um dos vértices dos triângulos, entenderam como cresce e decresce o ângulo agudo do triângulo usado como base para calcular as razões trigonométricas.

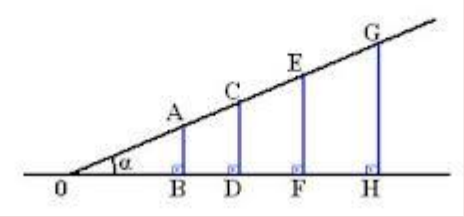
Agora, vamos passar para o papel, para tal feito vamos precisar de:

- transferidor
- régua
- calculadora

Agora vamos ao experimento:

Desenhe três ou quatro triângulos retângulos semelhantes.
I

Espera-se que o aluno desenhe triângulos retângulos semelhantes como do desenho a seguir:



Disponível em:http://www.clickescolar.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm. Acessado em 23/05/13

Em seguida, medindo com a régua e com o auxílio da calculadora, calcule as razões:

$\frac{\text{cateto oposto a O}}{\text{hipotenusa}}$ $\frac{\text{cateto adjacentea O}}{\text{hipotenusa}}$ $\frac{\text{cateto oposto a O}}{\text{cateto adjacente a O}}$

em cada triângulo.

Espera-se que ao realizar os cálculos os alunos encontrem valores iguais (ou próximos, em função da medição e aproximação) para essas três razões em cada triângulo e perceba que deverá realizar as medições em cada triângulo. Caso haja necessidade será solicitado ao aluno que "desmembre" os triângulos para um melhor entendimento.

Agora, troque o desenho com um colega e construa um triângulo retângulo qualquer com um ângulo congruente a $\hat{O}$ do desenho do colega e meça novamente os lados para calcular as três razões.

Após a atividade os alunos deverão perceber que as razões estabelecidas são iguais à uma constante e que cada uma delas recebe um nome especial que será "apresentado".

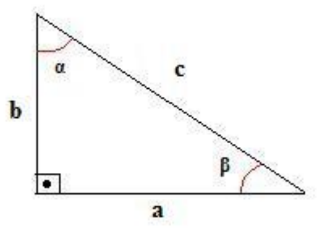
Quando se estabelece a razão entre a medida do ***cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa*** *é chamada de* ***seno de α;***

Quando se estabelece a razão entre a medida do ***cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa*** *é chamada de* ***cosseno de α;***

E quando se estabelece a razão entre a medida do ***cateto oposto ao ângulo α e do cateto adjacente*** *é chamada de* ***tangente de α.***

Exercícios sobre Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1. Considere o triângulo retângulo com os ângulos agudos α e β, e as medidas dos lados representadas por a, b e c:



$c^2 = a^2 + b^2$

a) Complete:

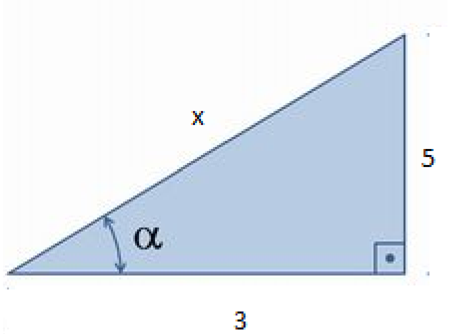
sen α =
cos α =
tg α =

sen β=
cos β =
tg β =

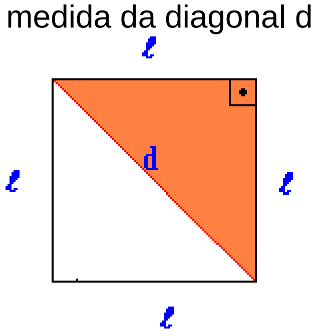
b) Qual a relação entre as medidas dos ângulos α e β?

c) Qual a relação entre tg α e $\frac{sen\alpha}{cos\alpha}$?

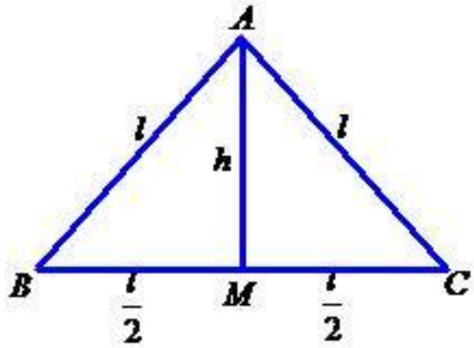
2. Se α é a medida de um ângulo agudo, obtenha sem α.

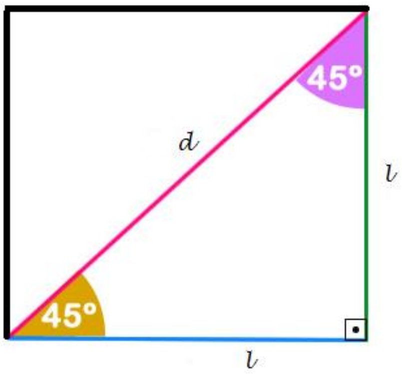


a) A medida da diagonal do quadrado em função da medida do lado:



b) A medida da altura de um triângulo equilátero em função da medida do lado:

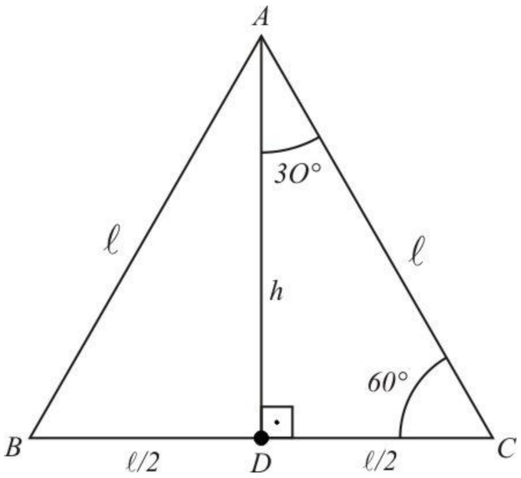




Agora, observando os triângulos retângulos e os ângulos agudos nas figuras, complete:

d = $\ell\sqrt{2}$

sen 45° = 　　　　cos 45° = 　　　　tg 45° =



h = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

sen 30° = 　　　　cos 30° = 　　　　tg 30° =

sen 60° = 　　　　cos 60° = 　　　　tg 60° =

Você obteve algumas razões trigonométricas para os ângulos notáveis e cuja aplicação é muito importante. Agora, complete a tabela com os valores obtidos!

	30°	45°	60°
seno			
cosseno			
tangente			

Atividade 2

HABILIDADES RELACIONADAS: H11 – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno,cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°).

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Papel A4 branco ou colorido, transferidor, régua de 30 cm, caneta e calculadora simples.

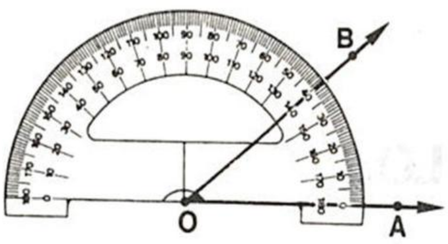
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Duplas

- **OBJETIVO:** Retomar ao estudo dos diversos campos numéricos e suas propriedades.

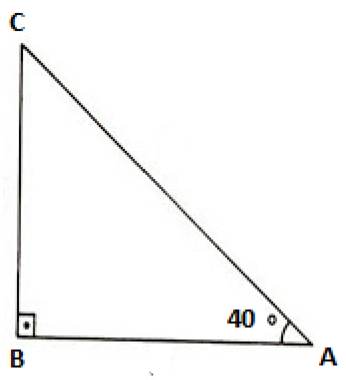
O Cálculo de Razões Trigonométricas

É possível com auxílio de uma régua graduada e com um transferidor calcular o seno, o cosseno e a tangente de outros ângulos. Para exemplificar, vamos obter sen 40°, cos 40° e tg 40°. Observe:

- Construímos, inicialmente, um ângulo de 40°.



- Com o auxílio de uma régua (pode ser esquadro), traçamos um segmento BC, perpendicular ao Aldo AB, formando assim o triângulo ABC.



- Obtemos, utilizando uma régua, as medidas dos lados do triângulo, ou seja:

AB = ____

BC = ____

AC = ____

- Calculando assim as razões trigonométricas para o ângulo de 40°:

sen 40° = $\frac{BC}{AC}$ = ____

cos 40° = $\frac{AB}{AC}$ = ____

tg 40° = $\frac{BC}{AB}$ = ____

É importante que o aluno observe que a falta de precisão dos instrumentos de medida (régua e transferidor) possibilitam diferenças nesses valores.

Por processo análogo é possível a construção de uma tabela de razões trigonométricas, como a que está logo a seguir:

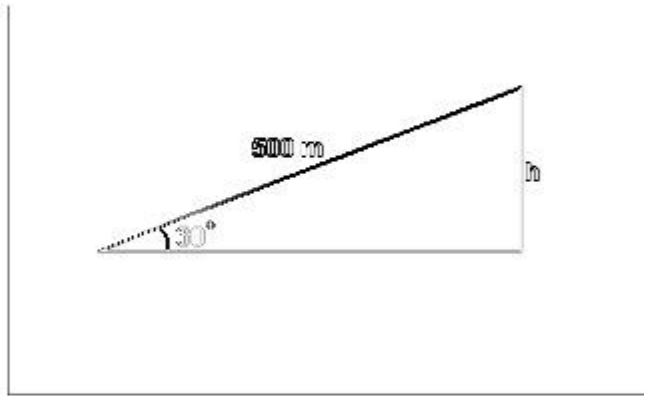
Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

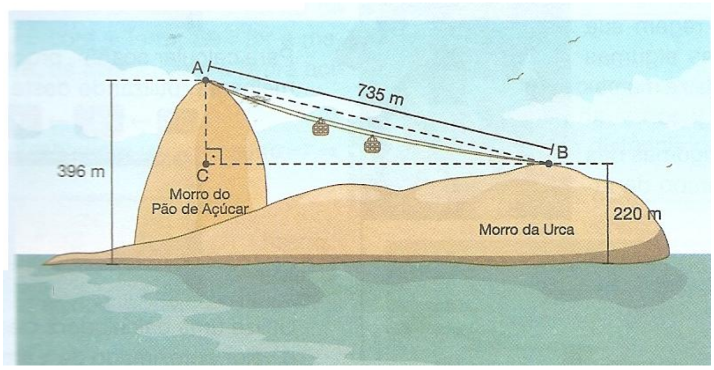
Disponível em: http://professorandrios.blogspot.com.br/2012/11/trigonometria-no-triangulo-retangulo.html Acessado em 23/05/13

Exercícios sobre o cálculo Razões trigonométricas

1. Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°. Então , depois que tiver percorrido 500 m, conforme indicado na figura, qual será sua altura h em relação ao solo?

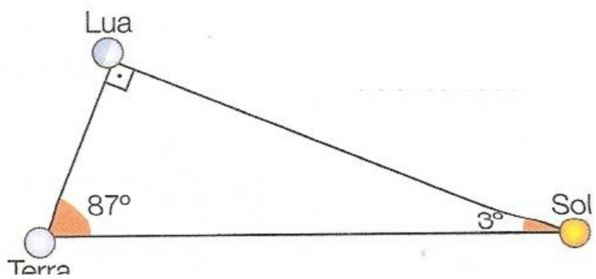


2. O teleférico mais famoso do Brasil é o Bondinho do Pão de Açúcar, localizado na cidade do Rio de Janeiro. O teleférico é formado por três estações: a da Praia Vermelha, a do Morro da Urca, com 220 m de altura, e a do Morro do Pão de Açúcar, com 396 m de altura. O esquema a seguir apresenta as estações do Morro da Urca no ponto B e do Morro do Pão de Açúcar no ponto A. determine os ângulos agudos do triângulo ABC.



3. Conforme já foi mencionado, o estudo inicial da Trigonometria está diretamente relacionado à astronomia. Por isso, quando, estudamos História da Matemática, nos deparamos com diversos problemas astronômicos envolvendo as relações trigonométricas. Um desses problemas, que lidava com as distâncias da Terra e do Sol e da Terra e da Lua, foi tratado por Aristarco de Samos (c. 310-230 a. C.) em cerca de 260 a. C.
Aristarco observou que quando a Lua estava com a metade iluminada e a outra metade escura, a Terra, o Sol e a Lua formavam um triângulo retângulo. O ângulo reto era localizado no vértice ocupado pela Lua; no vértice ocupado pela Terra havia um ângulo de 87°; e no vértice ocupado pelo Sol, um ângulo de 3°.

Aristarco de Samos



a) De acordo com os dados obtidos por Aristarco, a distância da Terra ao Sol corresponde à quantas vezes a distância da Terra à Lua?

b) Atualmente, com equipamentos mais modernos e precisos, verificou-se que o ângulo no vértice ocupado pela Terra é de aproximadamente 89,83°, e não 87°, como estimativa Aristarco. Considerando este ângulo, calcule novamente quantas vezes aproximadamente a distância da Terra ao Sol corresponde à distância da Terra à Lua?

c) Responda as questões:

- Um avião levanta voo formando um ângulo de 20° com o solo. Depois de percorrer 1000 m, que altura ele atinge?

- E ao final de 1 500 m?

- O piloto deseja atingir uma altura superior a 700 m ao final de 2 000 m de percurso. Para isso, ele terá que levantar voo com um ângulo superior ou inferior a 20°?

- Elabore mais duas perguntas para este problema: um envolvendo altitude e outra, o ângulo que o avião faz com o solo quando levanta voo.

d) Cada item traz as medidas dos lados de um triângulo retângulo em que a representa a medida da hipotenusa, e b e c são as medidas dos catetos. Determine o cosseno de cada um dos ângulos agudos, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos, respectivamente, a, b e c.

- b = 3 cm e c = 4 cm
- a = 12 cm e b = 7 cm
- a = 25 cm e b = 7 cm

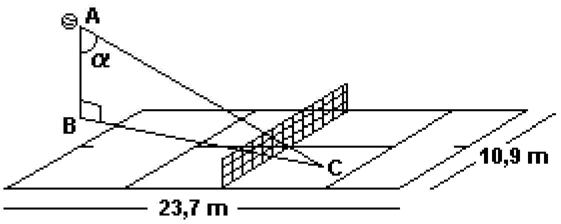
e) Calcule a altura do escorregador que 10 m de comprimento e 50° de inclinação.

AB = 10 m
$\hat{B}$ = 50°

f) De um ponto de observação localizado no solo, vê-se o topo de um edifício em um ângulo de 30°. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a ser 45°. Determine: (faça o esboço da situação para um melhor entendimento)

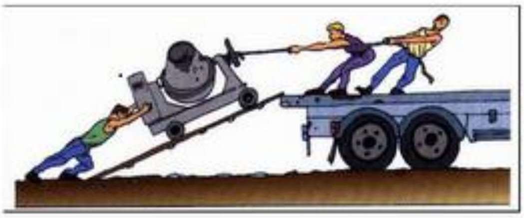
- a altura do edifício;
- a distância do edifício ao primeiro ponto de observação.

g) Uma quadra de tênis tem 23,7m de comprimento por 10,9m de largura. Na figura a seguir, está representado o momento em que um dos jogadores dá um saque. Sabe-se que este atinge a bola no ponto A, a 3m do solo, e que a bola passa por cima da rede e toca o campo adversário no ponto C, a 17m do ponto B.



Tendo em vista os dados apresentados, é possível afirmar que o ângulo ‘, representado na figura, mede quanto aproximadamente?

h) A plataforma do caminhão dista 80 cm do chão. Para conseguir carregar facilmente a betoneira, a tábua que serve de rampa não deve fazer com o chão um ângulo superior a 20°. Qual o comprimento que a tábua deve ter?

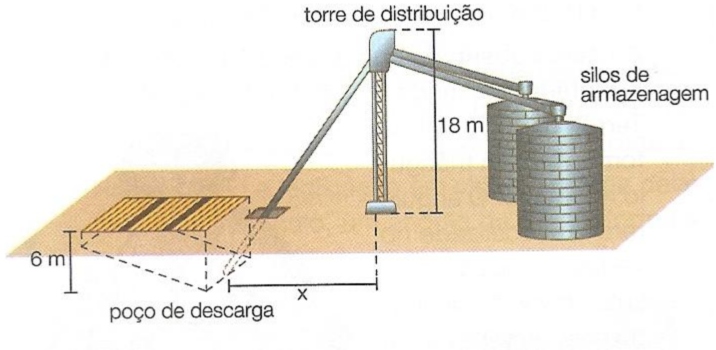


i)Os funcionários de uma companhia de energia elétrica irão demarcar uma circunferência ao redor de uma torre de transmissão para que sejam fixados alguns ganchos sobre ela, e posteriormente colocados estais, ligando os ganchos ao topo da torre. De acordo com o projeto, os estais devem ter 57,7 m de comprimento cada e formar com a horizontal um ângulo de 60°.

*A que distância do centro da base da torre, aproximadamente, devem ser fixados os ganchos para a colocação dos estais?
*Qual a altura aproximada da torre de transmissão?

*Calcule, aproximadamente, a área interna `a circunferência a ser demarcada pelos funcionários?

j)Uma cooperativa deseja construir um poço com profundidade máxima de 6 m para descarga de grãos. Do fundo desse poço deve partir um tubo, cuja finalidade é transportar os grãos até o topo de uma torre de distribuição. O tubo que será instalado não deverá formar um ângulo maior que 50° com o solo. De acordo com essas informações, calcule a distância mínima x que deve haver entre a torre e o poço a ser construído.



k)Para fazer a ligação entre dois andares de um shopping, deseja-se instalar uma escada rolante, cuja inclinação seja 28°. Sabendo que a diferença de altura entre os pisos desses andares é 4 m, calcule a que distância horizontal do topo deverá estar situada a parte inferior da escada? (Dados sen 28° $\cong 0{,}469$, cos 28° $\cong 0{,}883$ e tg 28° 0,532)

Para complementar o estudo, os alunos deverão fazer uma pesquisa sobre: **Medindo distâncias inacessíveis.**
Através de orientações recebidas os alunos irão criar uma situação problema e fazer a maquete da mesma e apresentar para turma.

É importante que o aluno observe que a falta de precisão dos instrumentos de medida (régua e transferidor) possibilitam diferenças nesses valores.
Que eles terão que trabalhar com escala.

AVALIAÇÃO

.

A avaliação deve ser contínua e processual e isso se dará mediante observações feitas em sala de aula e através de grupos de discussões sobre as questões matemáticas; nesse tipo de discussão, podem ser avaliadas a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, a aptidão para interpretar e discutir situações em que tais ideias estejam presentes.

E neste conteúdo espero que os alunos aprendam:

*Utilizar as Relações trigonométricas para resolver problemas;

*Calcule área de triângulos quaisquer e distância inacessíveis;

* Busque estratégias para resolver problemas.

Enfim, vale resaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos alunos nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avaliação Diagnóstica -2° Bimestre – Saerjinho- Junho 2011 - SAERJ

Roteiro de Ação 1 – *Relembrando as Proporções em Triângulos Semelhantes*– *Curso de Aperfeiçoamento oferecido* por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 1° bimestre/2013

Roteiro de Ação 3 – Estudando as Razões Trigonométricas no GeoGebra- | 2º Bimestre | 2º Campo Conceitual – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 2013

DANTE, Luiz Roberto. MATEMÁTICA Contexto & Aplicações,1ª Edição – São Paulo : Ática, 2011

IEZZI, Gelson, et al, MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÃO, Volume 1 / – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2010.

SMOLE, Kátia.S; DINIZ, Maria Ignez . Matemática Ensino Médio – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2009.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e problemas Elementares. Rio de Janeiro 2ª Ed. SBM, 2005.

SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. Ensino Médio, Volume 1 – 1ª Edição- São Paulo :FTD, 2010.

Endereços eletrônicos acessados de 23/05/2013 a 28/05/2013, citados ao longo do trabalho:

http://matematicajunior301.wordpress.com/2011/08/29/trigonometria-8%C2%AA-abcd/

http://amatematicagrega.blogspot.com.br/2012/01/hiparco.html

. http://www.mais.mat.br/wiki/Um_caminho_para_o_curral

http://professorandrios.blogspot.com.br/2012/11/trigonometria-no-triangulo-retangulo.html