

# Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 1º ano – 2º Bimestre 2013

## Tarefa 2

Plano de trabalho: Relações Trigonométricas no  
Triângulo Retângulo

Cursista: Vania Cristina de Souza Mello

Tutora: Lezieti Cubeiro da Costa

## Introdução

O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado da seguinte forma:

***Equilátero: possui os lados com medidas iguais.***

***Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.***

***Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.***

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

***Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que  $90^\circ$***

***Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que  $90^\circ$ .***

***Retângulo: possui um ângulo com medida de  $90^\circ$ , chamado ângulo reto.***

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o **Teorema de Pitágoras**, que diz o seguinte: “*A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*”. Essa relação é muito importante na geometria, atende inúmeras situações envolvendo medidas.

## DESENVOLVIMENTO

### Atividade 1

\_ HABILIDADE RELACIONADA: Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

\_ PRÉ-REQUISITOS: Propriedades e definições de acordo com o tamanho dos seus lados e medidas dos ângulos internos. Teorema de Pitágoras.

\_ TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

\_ RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Aula expositiva

\_ ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

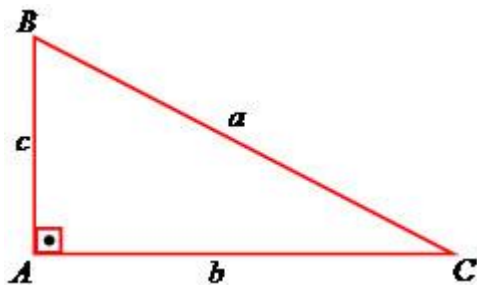
\_ OBJETIVOS: Conhecer os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) e usá-los no cálculo do seno, cosseno e tangente.

\_ METODOLOGIA ADOTADA: Após a explicação os alunos farão os exercícios do livro didático adotado.

As relações trigonométricas existentes no triângulo retângulo admitem três casos: seno, cosseno e tangente.

$$\text{Seno} : \frac{\text{cateto\_oposto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\text{Cosseno} : \frac{\text{cateto\_adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\text{Tangente} : \frac{\text{cateto\_oposto}}{\text{cateto\_adjacente}}$$

Vamos determinar as relações de acordo com o triângulo BAC com lados medindo a, b e c.



$$\text{seno}B = b/a \quad \text{cosseno}B = c/a \quad \text{tangente}B = b/c$$

$$\text{seno}C = c/a \quad \text{cosseno}C = b/a \quad \text{tangente}C = c/b$$

A trigonometria possui diversas aplicações no cotidiano, abrange áreas relacionadas à Astronomia, Física, Geometria, Navegação entre outras.

### Ângulos notáveis

Para obter o seno, o co-seno e a tangente dos ângulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , construa a seguinte tabela:

X	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen x				
cos x				

Na linha dos senos escreva os números de 1 a 3 e na dos co-senos de 3 a 1:

X	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen x	1	2	3
cos x	3	2	1

Tire a raiz quadrada de cada um:

X	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen x	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
cos x	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$

Divida tudo por 2:

X	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen x	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

Simplifique, pois,  $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$  logo:

X	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Como a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o co-seno

$$tgx = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$$

Você pode deduzir os valores das tangentes dividindo o seno pelo co-seno. O resultado será a tabela a seguir:

x	30°	45°	60°
Sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## Atividade 2

\_ HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.

\_ PRÉ-REQUISITOS: Cálculo de seno ,cosseno e tangente .

\_ TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

\_ RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Data-show

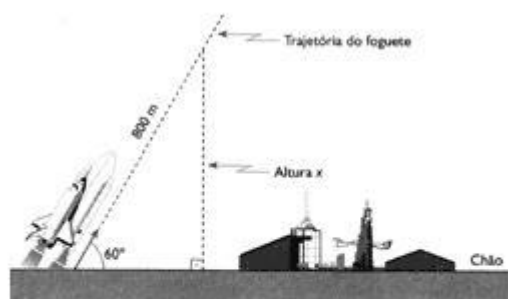
\_ ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

\_ OBJETIVOS: Interpretar e resolver problemas com razões trigonométricas.

\_ METODOLOGIA ADOTADA: Após a explicação os alunos farão os exercícios do livro didático adotado.

### Aplicação

1) Um foguete é lançado a 200m/s, segundo um ângulo de inclinação de  $60^\circ$  (ver figura). Determinar a altura do foguete após 4s, supondo a trajetória retilínea e a velocidade constante.



**Solução:**

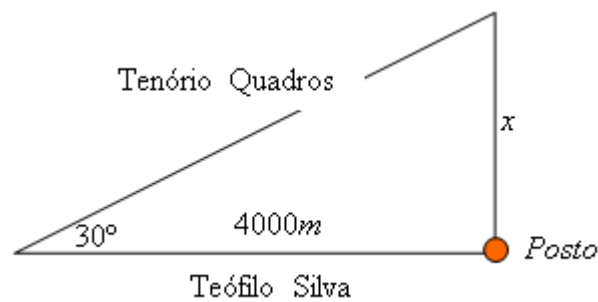
Após 4s, ele percorre  $4 \cdot (200m) = 800m$ .

Temos que:

$$\frac{x}{800} = \text{sen}60^\circ \Rightarrow x = 800 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \cong 692,8$$

A altura é aproximadamente 692,8m.

2) A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de  $30^\circ$ . O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?



$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{CO}{CA}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4000}$$

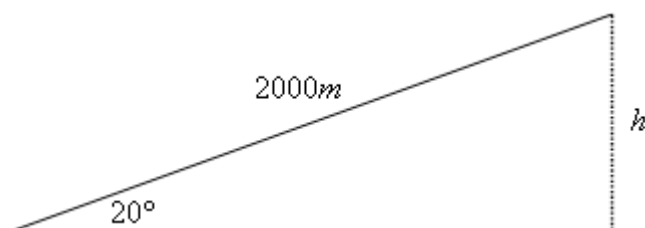
$$3x = 4000\sqrt{3}$$

$$x = \frac{4000\sqrt{3}}{3}$$

$$x \cong 2.309,40m$$

$$x \cong 2,3km$$

3) Um avião levanta voo sob um ângulo constante de  $20^{\circ}$ . Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize:  $\operatorname{sen} 20^{\circ} = 0,342$ ;  $\cos 20^{\circ} = 0,94$  e  $\operatorname{tg} 20^{\circ} = 0,364$ )



$$\operatorname{sen} 20^{\circ} = \frac{h}{2000}$$

$$0,342 = \frac{h}{2000}$$

$$h = 2000 * 0,342$$

$$h = 684m$$

A altura atingida pelo avião será de 684 metros.

## **Atividade 3**

\_ HABILIDADE RELACIONADA: Utilizar os teorema do seno e cosseno para resolver problemas significativos.

\_ PRÉ-REQUISITOS: Cálculo de seno e cosseno de um ângulo .

\_ TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

\_ RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Data-show

\_ ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

\_ OBJETIVOS: Resolução de Problemas.

\_ METODOLOGIA ADOTADA: Após a explicação os alunos farão os exercícios do livro didático adotado.

Não há sentido em aprender diversos conceitos matemáticos sem que exista uma compreensão da aplicação destes conceitos, mesmo que em situações hipotéticas. Por hora veremos a aplicação de duas leis trigonométricas que se aplicam em qualquer situação em que se tenha um triângulo, seja ele qual for.

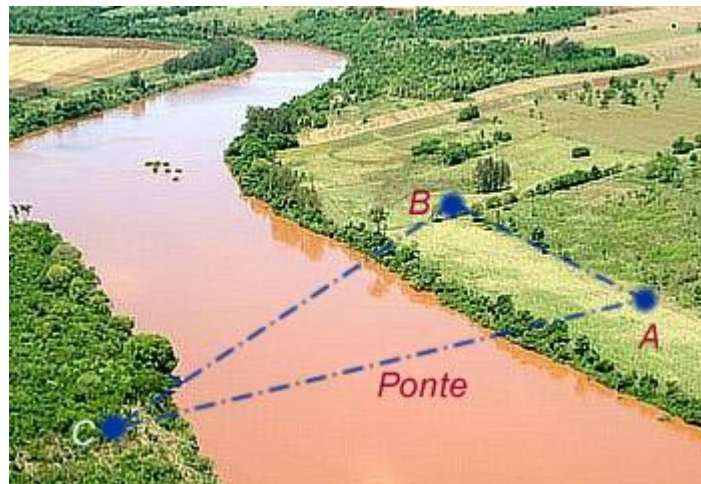
Os conceitos são os das leis do seno e do cosseno, conceitos que trabalham com apenas dois elementos: ângulo e medida do lado.

Veremos uma mesma situação, onde um construtor de pontes deseja calcular o tamanho da ponte que será construída, entretanto, em cada uma das situações as informações serão diferentes. Com isso veremos os casos nos quais é possível a aplicação da Lei do Seno e da Lei do Cosseno.

**Situação 1)** O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde a ponte será construída, entretanto ele não possui nenhuma ferramenta que meça essa distância, mas ele conhece de matemática e teve a seguinte ideia. “Como eu possuo uma ferramenta que calcula ângulos, conseguirei determinar o comprimento desta ponte”. Com isso ele marcou um ponto B, calculou o ângulo  $\widehat{BAC}$  que foi igual a  $85^\circ$ , caminhou até o ponto B, uma distância de 2km, e calculou o ângulo  $\widehat{ABC}$  obtendo um ângulo de  $65^\circ$ . O construtor acredita que com essas informações será possível calcular o comprimento da ponte.



Veja como será realizado esse cálculo:



Note que as únicas informações dadas foram:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2km \\ \widehat{BAC} &= 85^\circ \\ \widehat{ABC} &= 65^\circ\end{aligned}$$

Vejamos as expressões das Leis trigonométricas que podem ser aplicadas.

Lei do seno:

$$\frac{\overline{BC}}{\widehat{\text{sen } \hat{A}}} = \frac{\overline{AB}}{\widehat{\text{sen } \hat{C}}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{\text{sen } \hat{B}}}$$

Lei do cosseno:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{B}$$

Veja que com os dados que temos não é possível aplicar a lei do cosseno, pois precisamos das medidas de dois lados e temos apenas a medida de um lado e de dois ângulos, portanto, aplicaremos a lei dos senos.

$$\frac{\overline{BC}}{\widehat{\text{sen } 85^\circ}} = \frac{2}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{\text{sen } 65^\circ}}$$

O objetivo é determinar o valor do segmento AC, sendo assim utilizaremos as duas últimas proporções.

$$\frac{2}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{\text{sen } 65^\circ}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{2 \cdot \widehat{\text{sen } 65^\circ}}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \overline{AC} = 3,65 \text{ km}$$

**Situação 2)** O construtor deseja calcular a distância do ponto A ao ponto C, pontos onde a ponte será construída, entretanto, com a ferramenta que ele

possui só foi possível calcular as medidas dos segmentos AB e BC, no qual o segmento AB é igual a 2km e o segmento BC 3,99km. Utilizou novamente a ferramenta de medir ângulos e obteve que o ângulo do vértice B é igual a 65°. Com isso, o construtor conseguiu determinar o comprimento da ponte. Faça você também esses cálculos.

Vejamos as informações que temos:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2 \text{ km} \\ \overline{BC} &= 3,99 \text{ km} \\ \hat{B} &= 65^\circ\end{aligned}$$

Temos a medida de dois lados e apenas um ângulo. Um fato importante que nos permite aplicar a lei dos cossenos é o ângulo informado ser determinado pelos dois lados que são conhecidos.

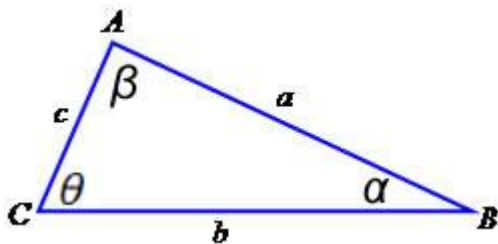
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{B} \\ \overline{AC}^2 &= 2^2 + 3,99^2 - 2 \cdot (2) \cdot (3,99) \cos 65^\circ \\ \overline{AC}^2 &= 4 + 15,9201 - 15,96 \cdot \cos 65^\circ \\ \overline{AC}^2 &= 19,9201 - 6,745 \\ \overline{AC}^2 &= 13,1751 \\ \overline{AC} &= 3,63\end{aligned}$$

Assim, devemos nos atentar às informações que a situação nos passa, para que saibamos qual relação devemos utilizar. Esse é o ponto crucial para diferenciar essas duas leis quanto à sua aplicação.

Resumo:

### Lei do cosseno

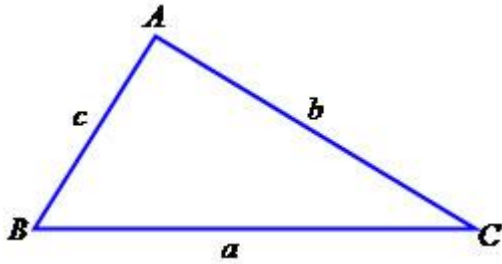
Fórmula que representa a lei dos cossenos:



$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

### Lei do seno

Fórmula que representa a lei dos senos:



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

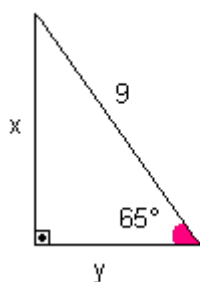
Na lei dos senos utilizamos relações envolvendo o seno do ângulo e a medida oposta ao ângulo.

## Avaliação

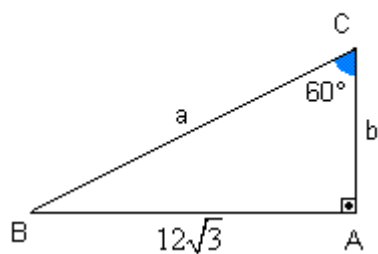
A avaliação será realizada em três tempos de 50 minutos. A turma se dividirá em grupos de 4 alunos para resolver uma lista de exercícios e em seguida cada grupo resolverá uma questão no quadro.

### Exercícios

1) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use:  $\text{sen } 65^\circ = 0,91$ ;  $\text{cos } 65^\circ = 0,42$ ;  $\text{tg } 65^\circ = 2,14$ )

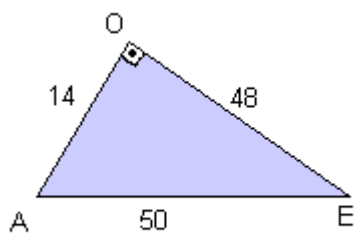


2) Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. ( $\text{Sen } 60^\circ = 0,866$ )

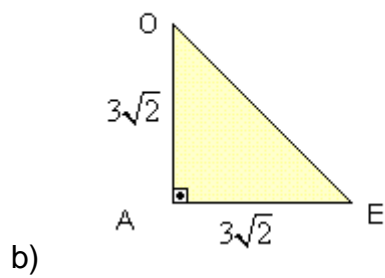


3) Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

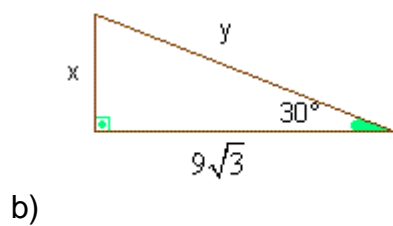
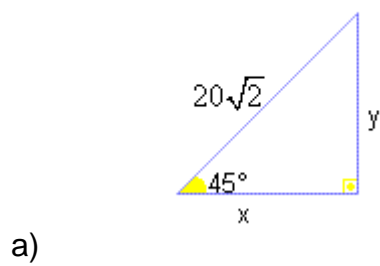
4) Nos triângulos das figuras abaixo, calcule  $\text{tg } \hat{A}$ ,  $\text{tg } \hat{E}$ ,  $\text{tg } \hat{O}$ :



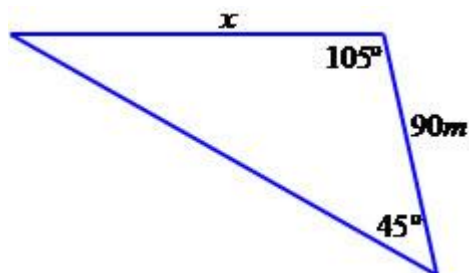
a)



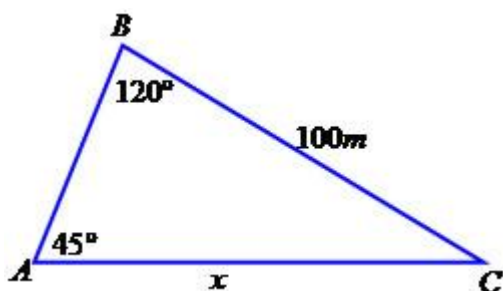
5) Encontre **x** e **y**:



6) No triângulo a seguir temos dois ângulos, um medindo  $45^\circ$ , outro medindo  $105^\circ$ , e um dos lados medindo 90 metros. Com base nesses valores determine a medida de **x**.



7) Determine o valor de  $x$  no triângulo a seguir.



8) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de  $30^\circ$  (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

### Referência eletrônicas :

[WWW.educação.uol.com.br](http://WWW.educação.uol.com.br)

[www.brasilescol.com](http://www.brasilescol.com)

[WWW.somatematica.com.br](http://WWW.somatematica.com.br)