FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: Colégio Estadual Leopoldo Fróes
PROFESSOR: Edna Flauzino Garcia Marques
MATRÍCULAS: 0954946-0 e 0964921-1
SÉRIE: 2º Ano – Turma 2003
TUTOR: Maria Cláudia Padilha Tostes

PLANO DE TRABALHO:Prismas e Cilindros
[Edna Flauzino Garcia Marques]
[ednafgm@hotmail.com]

**INTRODUÇÃO**

Para trabalhar prismas comecei com a parte histórica e, em seguida, passei os vídeos Abelhas Matemáticas Disponível em:http://www.youtube.com/watch?v=sDc6T4EVrFo e a Lenda de Dido disponível em:http://www.youtube.com/watch?v=WAWPSY3_IaA, depois fiz com os alunos o experimento para determinar qual o prisma de maior volume.

O processo de otimização de embalagens, peças e recipientes é um assunto frequente em indústrias de maneira geral. Ele pode ser resumido tanto em obter o maior volume possível consumindo uma quantidade fixa de material, quanto em construir um objeto com determinado volume consumindo a menor quantidade possível de material. Os alunos levarão caixas para serem desmontadas e estudarem área e volume de prismas.

Em geral, a construção de materiais contribui para a aprendizagem.Em cada etapa da construção, por exemplo, faz-se necessário, entre outros, reflexões e tomadas de decisões, habilidade manual, visualização, uso de conteúdos e habilidades já adquiridos.

O trabalho em equipe enriquece também o conhecimento e favorece a cooperação de todos. Isso tudo será valorizado na construção dos prismas.

Realizei uma oficina de construção de um porta-lápis e porta retrato com dobraduras onde cada aluno construiu seis prismas triangulares regulares e depois os colou formando um prisma de base hexagonal.

Para determinar volume trabalhei o princípio de Cavalieri com o vídeo: “Misterio - Princípio de Cavalieri”, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A e para trabalhar o princípio de Arquimedes passei o vídeo disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=_N4wKnCwuq4 .

**OBJETIVOS**

- Manipular e reconhecer diferentes prismas e cilindros e suas planificações.
- Reconhecer e nomear prismas e cilindros.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de áreas lateral e total de prismas e cilindros.
- Resolver problemas envolvendo cálculo do volume de prismas e cilindros.
- Proporcionar o entendimento do conceito de volume dos Cilindros e de como calcular o volume de um objeto qualquer pela submersão do mesmo no líquido.

**DESENVOLVIMENTO:**

Em duas aulas passei os vídeos Geometria das Abelhas e a Lenda de Dido, trabalhei um pouco da história e realizamos um experimento para cálculo de área de prisma triangular.

Textos históricos mostram que o prisma é uma figura geométrica conhecida desde antes de 2000 a.C., pois, segundo Eves (2004), os estudiosos da época já mostram-se familiarizados com o volume do paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume do prisma reto de base trapezoidal.

Estudos produzidos historicamente mostram que diversos estudiosos dedicaram-se ao estudo do prisma. Dentre estes estudiosos podemos destacar Platão, Demócrito e Arquimedes.

Platão, que viveu no IV século a.C., dentre os seus estudos geométricos mostrou interesse pelo estudo do cubo quando estudou os poliedros regulares. Ele associava cada poliedro com um dos elementos naturais, sendo que o cubo era associado com o elemento terra. Enquanto, Demócrito, comparou o volume do prisma com o volume da pirâmide e Arquimedes (287 – 212 a.C.) definiu os sólidos arquimedianos.

Passarei os vídeos e depois faremos o experimento:

O processo de otimização de embalagens, peças e recipientes é um assunto frequente em indústrias de maneira geral. Ele pode ser resumido tanto em obter o maior volume possível consumindo uma quantidade fixa de material, quanto em construir um objeto com determinado volume consumindo a menor quantidade possível de material.

Neste experimento, trataremos da otimização do volume em função de uma quantidade fixa de material. Os alunos terão que construir vários prismas retos de bases triangulares sempre usando a mesma quantidade de papel e, a partir dessas construções e de algumas análises, poderão, experimentalmente, levantar hipóteses de como o sólido deveria ser construído para que ele tivesse o maior volume possível.

Trabalhando em grupos, os alunos construíram seis prismas de basetriangular diferentes usando papel A4 e os organizaram em ordem de volume. Feito isso, calcularam os volumes dos prismas a partir de suas medidas e tentaram descobrir qual seria a forma do prisma para que se obtivesse o maior volume possível. Eles tiveram bastante dificuldade.

**Objetivos**

1. Investigar qual prisma de base triangular pode ser montado com meia folha de papel A4 para que se obtenha o maior volume possível;
2. Rever algumas formas de calcular a área de um triângulo.

**O Problema**

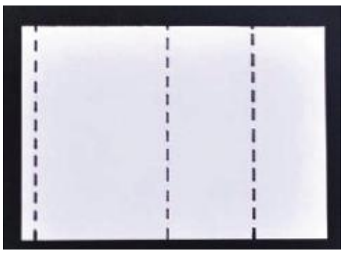
Queremos saber: qual é o prisma de base triangular com maior volume que podemos montar usando meia folha de papel A4?

Este experimento consiste de duas etapas, nas quais os alunos trabalharam em grupos para resolver o problema de otimização.

Na primeira etapa, estão envolvidas a construção de alguns prismas de base triangular e a organização aproximada de seus volumes, segundo a intuição dos alunos que os construíram.

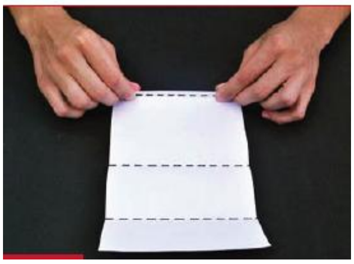
Já na segunda etapa, os alunos calcularamos volumes dos prismas e tentaram descobrir quais deveriam ser suas medidas para que tivessem o maior volume possível.

Os alunos fizeram os seguintesprocedimentos:



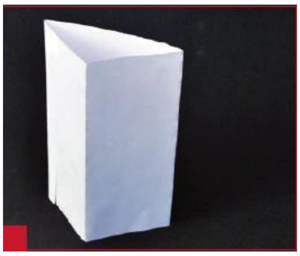
_ Dividir cada folha A4 ao meio;

_ Com meia folha, fazer, com a régua, um traço paralelo ao lado menor 1,0 cm antes da extremidade e dobrar. Fazer mais dois traços paralelos no restante da folha.

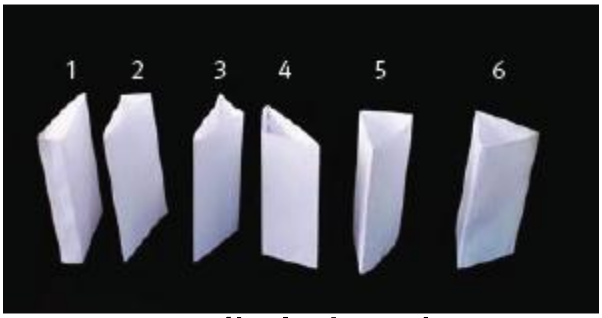


_ Dobrar de modo que se possa juntar as extremidades do papel e montar um prisma de base triangular

_ Colar a aba de 1,0 cm na outra extremidade;



_ Fazer o mesmo com as outras 5 metades de modo que cada prisma tenha bases diferentes.




Agora, os alunos organizaram, intuitivamente, os prismas construídosem ordem crescente de volume, e queos numeraram de 1 a 6. Essa numeração foi usada na tabela da etapa seguinte.

Etapa 2 **Cálculo dos volumes**

Com ajuda da régua e do transferidor, meça o comprimento dos lados (a, b e c) e os ângulos (Â, $\hat{B}$ e $\hat{C}$) das bases dos prismas, preenchendo a tabela 1.

| Prisma | $a$ | $b$ | $c$ | Â | B̂ | Ĉ | Volume |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |

**TABELA 1** *Tabela comum. Será utilizada para o registro dos dados dos prismas.*

Depois de preencherem a tabela:

***Pense e responda***

Sobre o prisma com maior volume encontrado: Qual a relação entre as medidas dos lados da base? E dos ângulos? Que tipo de triângulo ele é: escaleno, isósceles ou equilátero? Será que há algum outro prisma que possui um volume maior ainda? Se sim, qual seria?

Para preencher a coluna do volume na tabela acima, vocês precisarão usar algum método conhecido para calcular a área dos triângulos na base dos prismas.

Usando essas medidas e a altura dos prismas (que é a mesma para todos), os alunos deverão calcular os respectivos volumes e preenchê-los na tabela anterior.

Para calcular as áreas dos triângulos da base, os alunos têm essencialmente três alternativas, cada uma com características diferentes:

$$A_b = \frac{l \cdot h_l}{2}$$

1. área da base é igual a metade do produto de um lado pela altura relativa a ele. Essa fórmula é a mais comum, conhecida pelos alunos desde o ensino fundamental, mas exige que se meça a altura do triângulo, o que pode acarretar um pequeno erro ou dificuldade.

$$A_b = \frac{a.\,b.\sin\beta}{2}$$

2. área da base é igual a metade do produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo entre eles. Essa fórmula envolve o seno de um ângulo e isto poderia ser considerado um complicante, uma vez que devem aparecer ângulos diferentes dos notáveis. Por isso, há uma tabela de senos em anexo que pode ser fornecida aos alunos se necessário.

$$A_b = p\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)},$$

3.com *p* sendo o semi-perímetro e *a, b* e *c* os lados do triângulo (Fórmula de Heron). Essa fórmula envolve uma quantidade maior de cálculos, porém, demanda apenas a medição dos lados do triângulo.

## Tabela de senos

**Os ângulos estão dados em graus.**

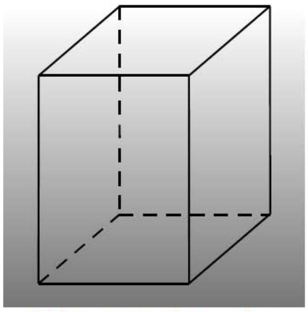
| $\beta$ | sen $\beta$ | $\beta$ | sen $\beta$ | $\beta$ | sen $\beta$ | $\beta$ | sen $\beta$ | $\beta$ | sen $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01745 | 21 | 0,35837 | 41 | 0,65606 | 61 | 0,87462 | 81 | 0,98769 |
| 2 | 0,03490 | 22 | 0,37461 | 42 | 0,66913 | 62 | 0,88295 | 82 | 0,99027 |
| 3 | 0,05234 | 23 | 0,39073 | 43 | 0,68200 | 63 | 0,89101 | 83 | 0,99255 |
| 4 | 0,06976 | 24 | 0,40674 | 44 | 0,69466 | 64 | 0,89879 | 84 | 0,99452 |
| 5 | 0,08716 | 25 | 0,42262 | 45 | 0,70711 | 65 | 0,90631 | 85 | 0,99619 |
| 6 | 0,10453 | 26 | 0,43837 | 46 | 0,71934 | 66 | 0,91355 | 86 | 0,99756 |
| 7 | 0,12187 | 27 | 0,45399 | 47 | 0,73135 | 67 | 0,92050 | 87 | 0,99863 |
| 8 | 0,13917 | 28 | 0,46947 | 48 | 0,74314 | 68 | 0,92718 | 88 | 0,99939 |
| 9 | 0,15643 | 29 | 0,48481 | 49 | 0,75471 | 69 | 0,93358 | 89 | 0,99985 |
| 10 | 0,17365 | 30 | 0,50000 | 50 | 0,76604 | 70 | 0,93969 | 90 | 1 |
| 11 | 0,19081 | 31 | 0,51504 | 51 | 0,77715 | 71 | 0,94552 | | |
| 12 | 0,20791 | 32 | 0,52992 | 52 | 0,78801 | 72 | 0,95106 | | |
| 13 | 0,22495 | 33 | 0,54464 | 53 | 0,79864 | 73 | 0,95630 | | |
| 14 | 0,24192 | 34 | 0,55919 | 54 | 0,80902 | 74 | 0,96126 | | |
| 15 | 0,25882 | 35 | 0,57358 | 55 | 0,81915 | 75 | 0,96593 | | |
| 16 | 0,27564 | 36 | 0,58779 | 56 | 0,82904 | 76 | 0,97030 | | |
| 17 | 0,29237 | 37 | 0,60182 | 57 | 0,83867 | 77 | 0,97437 | | |
| 18 | 0,30902 | 38 | 0,61566 | 58 | 0,84805 | 78 | 0,97815 | | |
| 19 | 0,32557 | 39 | 0,62932 | 59 | 0,85717 | 79 | 0,98163 | | |
| 20 | 0,34202 | 40 | 0,64279 | 60 | 0,86603 | 80 | 0,98481 | | |

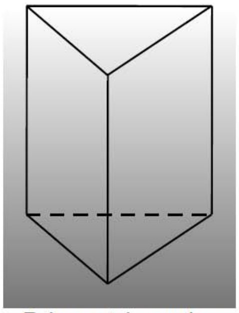
Em uma aula trabalhei definição, classificação e elementos de um prisma.

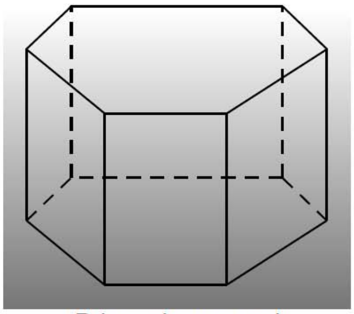
DEFINIÇÃO:

“Um prisma é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas. As laterais de um prisma são paralelogramos. A nomenclatura dos prisma é dada de acordo a forma da bases. Assim, se temos hexágonos nas bases, teremos um prisma hexagonal. O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases, e oblíquo quando não são.”. (PRISMA, Wikipédia)

Podemos concluir que o prisma é umpoliedro que consta de duas faces poligonais idênticas e paralelas entre si e, ainda, circundada por quadriláteros, tanto quanto o número de lados das faces poligonais idênticas.

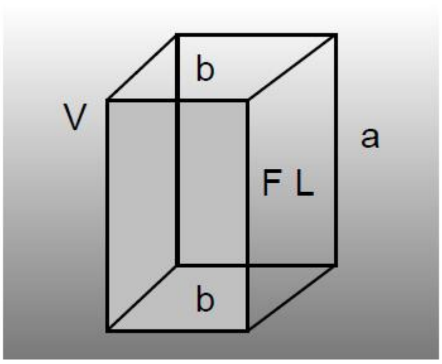

Prisma quadrangular


Prisma triangular


Prisma hexagonal

ELEMENTOS DE UM PRISMA

- Bases (b) são as duas superfícies poligonais paralelas que caracteriza o prisma;
- Altura é à distância entre os planos que contém as bases;
- Faces Laterais (F L) são todas as superfícies (paralelogramos) que contornam as bases do prisma;
- Superfície lateral é a união de todos os paralelogramos que formam as faces laterais, cuja medida chama-se área lateral do prisma;
- Superfície das Bases é a união das duas bases, cuja medida chama-se área das bases do prisma;
- Superfície Total é a união entre a superfície lateral e a superfície das bases, cuja medida chama-se área total do prisma;
- Vértices (V) são os pontos de encontro entre três faces, ou seja, duas faces laterais e a face de uma das bases;
- Arestas (a) são os segmentos de reta comum entre duas faces;



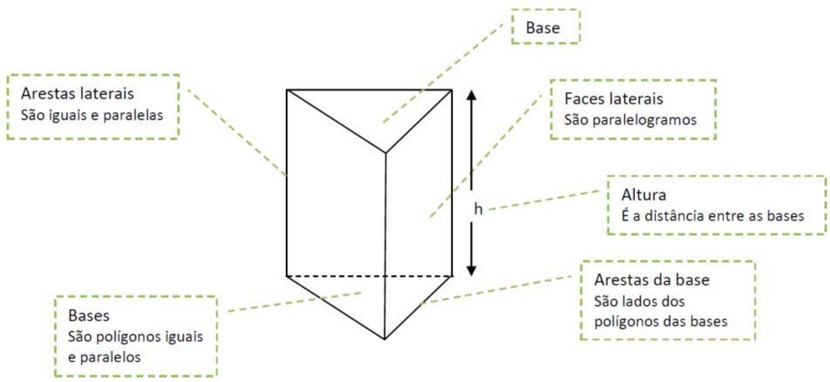



**Figura 1** - Prisma de base triangular e suas partes.

CLASSIFICAÇÃO

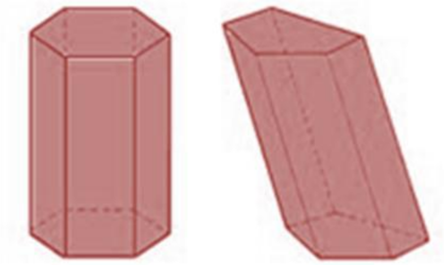
Um prisma pode ser classificado de acordo com o polígono que contém a sua base e a sua inclinação.

- Prismas triangulares (cujas bases são triângulos).

- Prismas cujas bases são quadriláteros em especial retângulos e quadrados destacando seus nomes especiais: paralelepípedo reto-retângulo (que denominaremos simplesmente paralelepípedo) ou bloco retangular e cubo, respectivamente.
- Prismas pentagonais (cujas bases são pentágonos).
- Prismas hexagonais (cujas bases são hexágonos).

E assim por diante, de acordo com o número de lados da base.

Quanto a inclinação um prisma pode ser reto ou oblíquo. No prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases e todas as faces laterais são retângulos, enquanto o prisma oblíquo, as arestas laterais são oblíquas aos planos da base e as faces laterais são paralelogramos.



A figura geométrica da esquerda é um prisma reto, e a da direita um prisma oblíquo.

Em duas aulas trabalhei com desmontagem de embalagens e cálculo de área, volume e diagonal do paralelepípedo e do cubo.

Embalagens são todos os materiais que envolvem um determinado produto e tem como objetivo proteger e ao mesmo tempo manter as características originais do produto, durante o seu transporte e armazenamento até chegar ao consumidor final. Podemos observar que alguns produtos se apresentam com mais de uma embalagem, por exemplo: os medicamentos, que, geralmente, veem dentro de uma caixa de papel, entretanto, não é o remédio que vem dentro dessa caixa, mas uma outra embalagem que o contém, por exemplo: um frasco, um tubo e assim por diante. Essa embalagem é chamada de secundária.

A função principal da embalagem secundária é fazer com que o medicamento chegue até o consumidor sem alterar as suas características e validades. Além disso, essas embalagens trazem impressas muitas informações importantes para quem vai fazer uso desse medicamento. Aliás, essas informações não são impressas aleatoriamente, mas existem determinações legais para tais impressões, por exemplo: o número do lote, data de fabricação, dosagem, registro do Ministério da Saúde e etc..., totalizando mais de vinte informações obrigatórias.

Portanto, podemos verificar que essas embalagens não servem apenas para proteger os medicamentos no transporte, mas também para informar, controlar e ao mesmo tempo proteger o consumidor de possíveis adulterações.

Na Geometria Espacial, o formato da embalagem secundária da maioria dos medicamentos representa prisma.

Os alunos deverão desmontar as caixas e, em grupo calcular área, volume e diagonal.

1) “Abra” ou corte nas arestas necessárias para fazer sua planificação. Retire as abas usadas para colar a caixa. Cuidado para não destruir o objeto.

2) Como já sabemos, todo prisma possui duas bases. Identifique as bases do seu prisma planificado e escreva a palavra “base” com a caneta vermelha.

3) Cada uma das outras faces é chamada face lateral. Nomeie-as também.

4) Quantas faces laterais o seu prisma possui?
_______________________________________________

5) Quantos lados o polígono da base possui?

______________________________________________________________________

6) A área lateral de um prisma é dada pela soma das áreas de todas as faces laterais. Dessa forma, utilizando uma régua e a planificação obtida, calcule a área lateral do prisma que você escolheu. (lembrando que a área de um retângulo de lados “a” e “b” é dada por A = a.b, no caso do prisma reto).

______________________________________________________________________

7) Agora, precisamos calcular a área da base do prisma. Mas antes, diga: qual é a forma do polígono que constitui a base?

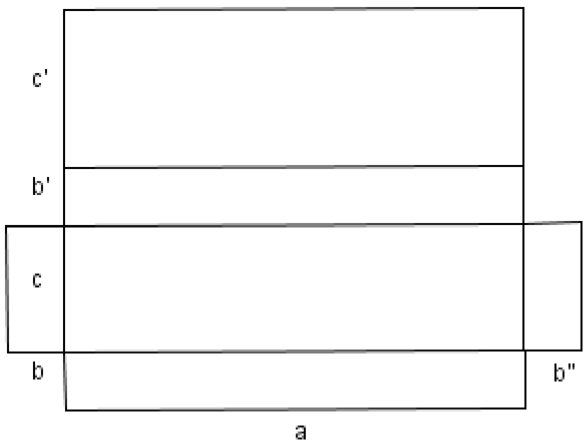
8) Com o auxílio da régua, calcule a área de cada base. Que valor você obteve?

9) A área total de um prisma é dada pela soma da área lateral com a área das duas bases. Dessa forma, calcule a área total do prisma escolhido.

**ÁREA TOTAL DO PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO**

Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas. Assim temos:

**At = 2(ab + ac + bc),** onde At = área total.




O paralelepípedo reto-retângulo planificado corresponde justamente a sua superfície poliédrica.

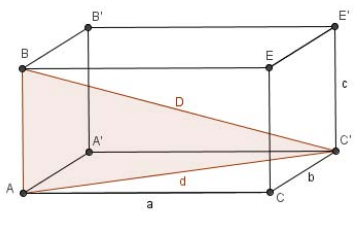
Lembre-se que**: b = b’ = b’’** e **c = c’**

A área lateral **Al = 2(bc + ac),** onde Al = área lateral.

Volume do paralelepípedo reto-retângulo**:**

**Vparal = a.b.c**, onde Vparal = volume.

**DIAGONAL DE UM PARALELEPÍPEDO RETO–RETÂNGULO**



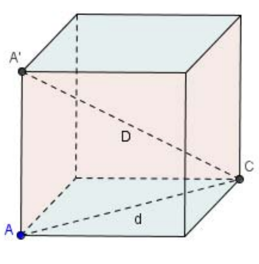

Observe o paralelepípedo de dimensões **a, b** e **c**:

$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{d} = \sqrt{a^2+b^2}}$, onde **d** é a diagonal da face.

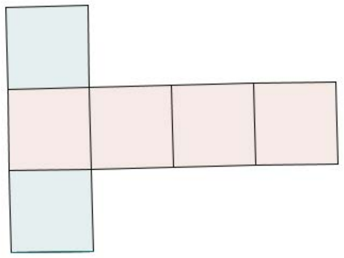
Se considerarmos o triângulo ABC’, temos:

$D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{D} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, onde **D** é diagonal do paralelepípedo.

**CUBO OU HEXAEDRO**



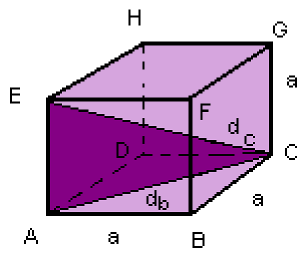

**CUBO** é um poliedro convexo regular, onde suas arestas são congruentes e perpendiculares entre si, seus vértices são retângulos, possui seis faces, oito vértices e doze arestas. É um caso especial de prisma.



OBS: a) Todas as arestas têm as mesmas medidas (a).
b) A distância de AH = diagonal da base (d).
c) A distância de EH = diagonal de cubo (D).

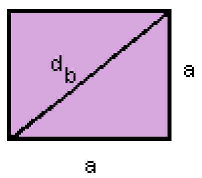
**Diagonais da base e do cubo**

Considere a figura a seguir:



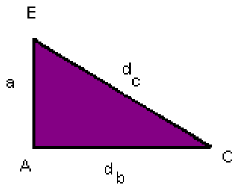

$d_c$=diagonal do cubo
$d_b$ = diagonal da base

Na base ABCD, temos:




$$d_b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

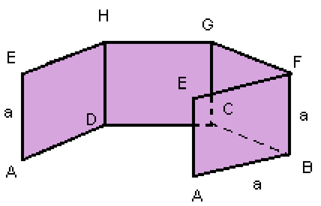
No triângulo ACE, temos:




$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

## Área lateral

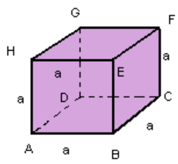
A área lateral $A_L$é dada pela área dos quadrados de lado **a**:




$\boxed{A_L=4a^2}$

## Área total

A área total $A_T$é dada pela área dos seis quadrados de lado **a**:




$\boxed{A_T=6a^2}$

## Volume

De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta **a** é dado por: V= a . a . a = $a^3$

**Podemos verificar que:**

a) Todas as suas arestas têm as mesmas medidas, logo a área da base é: $A_b = a^2$

b) A área lateral é: Al = 4.Ab, pois cada face tem a mesma área , então: $A_l = 4 \cdot a^2$

c) O volume é: Ab.h, logo, $V = a^3$

d) A diagonal da base é: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$

Em duas aulas foram feitos exercícios sobre prismas

LISTA DE EXERCÍCIOS: PRISMAS

1) Calcule o volume de um cubo que tem 10cm de aresta.
2) Um prisma pentagonal regular tem 20cm de altura. A aresta da base mede 4cm. Determine sua área lateral.
3) Um prisma quadrangular regular tem sua aresta da base medindo 6m. Sabendo que a área lateral do prisma mede 216m², calcule sua altura.
4) Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles de 8cm de base por 3cm de altura. Sabendo que a altura do prisma é igual a $\frac{1}{3}$ do perímetro da base, calcule sua superfície total.
5) Calcule a área total de um prisma reto, de 10 cm de altura, cuja base é um hexágono regular de 6cm de lado.
6) As dimensões a, b e c de um paralelogramo são proporcionais aos números 2,4 e 7. Determine essas dimensões sabendo que a área total desse sólido é de 900cm².
7) Um armário, com a forma de um paralelepípedo de dimensões 0,5m, 2,5m e 4m, deve ser pintado. O rendimento da tinta empregada é de 5m² por litro. Determine a quantidade de tinta necessária para pintar toda a parte interna do armário.
8) A garagem subterrânea de um edifício tem 18 boxes retangulares, cada um com 3,5m de largura e 5m de comprimento. O piso da garagem é de concreto e tem 20cm de espessura. Calcule o volume de concreto utilizado para o piso da garagem.
9) Dispondo-se de uma folha de cartolina, de 70cm de comprimento por 50cm de largura, pode – se construir uma caixa, sem tampa, cortando-se um quadrado de 8cm de lado em cada lado. Determine o volume desta caixa.
10) Em um paralelepípedo retângulo, de 15 cm de altura o comprimento da base mede o dobro da largura. Sabendo que a área total desse sólido mede 424cm², calcule as dimensões da base.

11) Um tanque em forma de paralelepípedo tem por base um retângulo de lados 0,8m por 1,2m e esta parcialmente cheio de água. Um objeto maciço, de formato indeterminado, ao ser mergulhado completamente no tanque, faz o nível da água subir 7,5cm. Determine, em m³, o volume desse objeto.
12) Uma caixa de fósforos tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões 4,5cm, 3,2cm e 1,2cm. Na caixa há em média, 40 palitos.
a) Qual é, aproximadamente, o volume ocupado por um palito de fósforos?
b) Quantos cm² de papel serão necessários para forrar todas as faces internas da caixa (sem a tampa)?
13) À razão de 25 litros de água por minuto, quanto tempo será necessário para o enchimento de uma piscina de 7m de comprimento, 4m de largura e 1,5m de profundidade?
14) Uma barra de chocolate tem a forma de um prisma quadrangular reto de 12cm de altura. A base tem a forma de um trapézio isósceles na qual os lados paralelos medem 2,5cm e 1,5cm e os lados não paralelos medem, cada um, 2cm. Qual o volume do chocolate?

15) Calcule o volume de um prisma quadrangular regular de 25cm² de base sabendo que a medida de sua altura é igual ao dobro da medida da aresta da base.

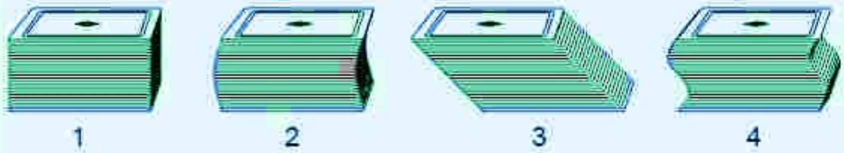
Em duas aulas corrigi e tirei dúvidas dos exercícios anteriores.

Em uma aula trabalhei o princípio de Cavalieri apresentando o vídeo Mistério da série Matemática Multimídia e através do texto:

AULA
63

**A pilha entorta e o volume se mantém**

Para compreender as idéias de Cavalieri (matemático italiano que viveu na Itália no século XVII), vamos imaginar uma pilha formada com as cartas de quatro ou cinco jogos de baralho. Podemos formar pilhas de várias formas, que tenham a mesma base e a mesma altura.




Partindo de qualquer uma das pilhas, podemos raciocinar assim: o volume da pilha é a soma dos volumes das cartas e, como as cartas são as mesmas, as pilhas têm o mesmo volume, apesar de terem formas diferentes.
A primeira pilha tem a forma de um bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo). É um sólido delimitado por seis retângulos; as faces opostas são retângulos idênticos. A terceira pilha tem a forma de um paralelepípedo oblíquo: suas bases são retângulos, mas suas faces laterais são paralelogramos. Da pilha 1 para a pilha 3 houve mudança de forma, mas o volume permaneceu inalterado. Como os paralelepípedos das pilhas 1 e 3 têm a mesma base, a mesma altura e o mesmo volume, e como o volume do paralelepípedo da pilha 1 é igual ao produto da área da sua base pela sua altura, concluímos que o volume do paralelepípedo da pilha 3 também é igual ao produto da área da sua base pela sua altura.
Desse modo, conseguimos calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo, que não pode ser decomposto em cubinhos unitários. O cálculo do volume desse sólido ilustra a idéia central de Cavalieri, já trabalhada por Arquimedes. Essa idéia consiste em imaginar um sólido decomposto em camadas muito finas, como as cartas de um baralho. Se dois sólidos forem constituídos por camadas iguais, de mesma área e de mesma espessura, então seus volumes são iguais.

(Fonte: Telecurso 2º grau 6ª ed. 1989 - FRM. Aula 64, pág. 423)

Construí dois prismas de mesma altura e bases iguais, sendo um prisma de base quadrada de 6cm de lado e um de base retangular 4cm por 9cm, ambos com 8cm de altura. Levei para sala e perguntei qual deles os alunos achavam que tinha maior volume. As respostas divergiram, mas nenhum aluno percebeu que o os dois tinham a mesma capacidade.
Enchi um deles de arroz e depois virei o arroz no outro prisma provando assim o Princípio de Cavalieri.

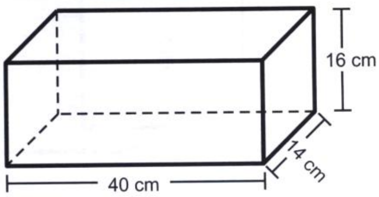
Duas aulas foram usadas para Teste

Habilidade: H07 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
Habilidade: H24 - Resolver problemasenvolvendo amedida da áreatotal e/ou lateral deum sólido (prisma)

Competência: C1 - Calcular a medida da área lateral de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.
Competência: C5 - Calcular a medida da área total de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.
Habilidade: H25 - Resolver problemasenvolvendo noçõesde volume
Competência C1 - Calcular a medida do volume de um prisma, com ou sem a informação de fórmulas.

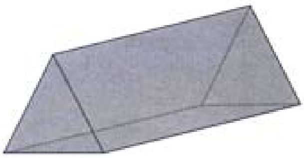
COLÉGIO ESTADUAL LEOPOLDO FRÓES
**Avaliação de Matemática** – 2º Ano **Valor:4,0** **Nota** _______
Professora: Edna Flauzino Garcia Marques
Aluno: ____________________________ nº :______ Turma _____

1) Um reservatório de água tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo e suas dimensões estão indicadas na figura abaixo.

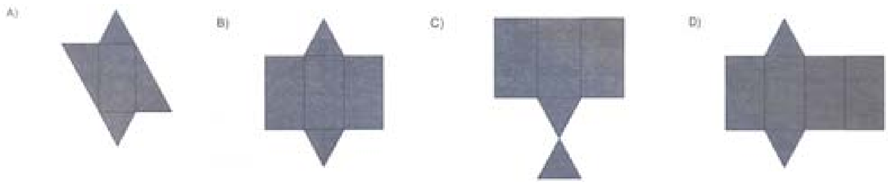



Quantos centímetros cúbicos de água, no máximo, podem ser armazenados nesse reservatório?
A) 8 960
B) 3 360
C) 2 848
D) 1 424
E) 1 120

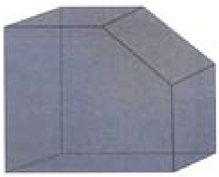
2) A figura abaixo representa um prisma de base triangular.



A forma planificada desse prisma é




3) Observe o desenho de um sólido obtido após ser efetuado um corte em um paralelepípedo.



A alternativa que indica o número de vértices "V", de faces "F" e de arestas "A" desse sólido é
A) V= 4, F= 9 e A= 12.
B) V= 9, F= 4 e A= 12.
C) V= 10, F= 7 e A= 15.
D) V= 10, F= 15 e A= 7.
E) V= 15, F= 7 e A= 10.

4) Dado um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 3 m, 4 m e 5 m, calcule sua área total, seu volume e sua diagonal.

5) Determine a área da base, área lateral, área total e volume de um prisma reto de altura igual a 12 cm e cuja base é um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm.

6) Se o volume de um cubo é 27 cm³, calcule a aresta e a área total desse cubo.

7) Se a área total de um cubo é 150 m², calcule a aresta e o volume desse cubo.

Em duas aulas ministrei uma oficina onde os alunos aprenderam e montaram através de dobradura um prisma triangular e depois colaram seis destes prismas formando um prisma de base hexagonal que serve como porta-lápis e porta-retratos. Este trabalho foi exposto juntamente com os poliedros confeccionados com canudo na Mostra de Matemática que aconteceu dia 7 de junho. Os alunos realizaram esta oficina com os demais alunos da escola durante a mostra.

As duas aulas do dia da mostra foram usadas na apresentação da atividade.
Algumas fotos do evento:



Em duas aulas trabalhei um pouco da história, o conceito, classificação, elementos de um cilindro e diferenças e semelhanças entre prismas e cilindros.

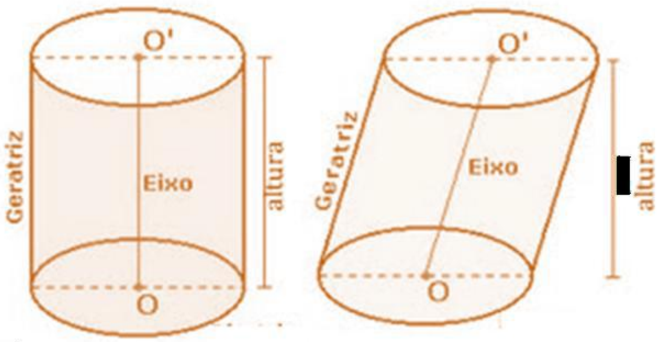
CILINDRO

A maior quantidade de registros que conhecemos da matemática antigaforam escritos em papiros, dentre eles destaca-se o papiro de Moscou, que consiste em uma tira de 5,5 metros de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas e um desses problemas faz o cálculo do volume do cilindro reto determinando como sendo o produto da área da base pelo comprimento da altura. Esta relação é a que utilizamos até nossos dias.

No trabalho remanescente de Arquimedes sobre esfera e cilindroencontramos uma relação entre a área da superfície esférica com a superfície lateralde um cilindro, assim como, uma relação do volume da esfera com o volume docilindro. Arquimedes também defendeu a ideia de Eudoxo que relacionava o volumedo cilindro com o volume do cone de mesma base e mesma alturaArquimedes, por ter descoberto e provado a razão dos volumes docilindro e da esfera, pediu para que sobre seu túmulo fosse esculpida uma esferainscrita num cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro.

Portanto, devemos a Arquimedes boa parte dos conhecimentos daGeometria Espacial que estudamos hoje. Sendo assim, torna-se justificável a importância do texto que se segue.

Há cilindros retos, cuja geratriz é perpendicular aos planos das bases e cilindros oblíquos, cuja geratriz é oblíqua aos planos das bases. Também destaque, em um esquema, os elementos do cilindro.




Cilindro reto Cilindro oblíquo

Os elementos formadores do cilindro.

- A altura do cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
- A reta que passa pelo centro das bases é chamada eixo do cilindro.
- As geratrizes são segmentos de reta paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.

As geratrizes recebem esse nome por gerarem a superfície lateral do cilindro.

**Prismas e cilindros: semelhanças e diferenças**

- A principal diferença entre os dois sólidos é que as bases dos prismas são regiões poligonais e as do cilindro são círculos.
- Em ambos os casos, tanto prismas como cilindros podem ser retos ou oblíquos e a altura é dada pela distância entre as bases.
- O cilindro não possui arestas como os prismas, e sim geratrizes.
- A superfície lateral do cilindro é “arredondada” e as faces laterais dos prismas são planas.
- Tanto a superfície lateral como as faces laterais planificadas de ambos são paralelogramos.

Em duas aulas trabalharei o roteiro de Ação 4

**Cálculo de Área de Cilindros com Tubos de Papel**

OBJETIVOS: Apresentar o conceito de área do cilindro.

*MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, lápis, calculadora, folhas de papel A4, régua, compasso, fita adesiva.*

Pegue uma folha de papel A4 e una dois lados paralelos (sem dobrar, como na figura a seguir) para formar um cilindro. Você irá unir os lados de acordo com a figura da esquerda (com o papel na vertical), e seu colega irá fazer conforme a figura da direita (com o papel na horizontal), formando dois cilindros diferentes. Não é necessário colar!

Observe que o formato cilíndrico obtido é apenas a superfície lateral do cilindro.

Compare seu cilindro com o do seu colega. Eles possuem a mesma altura? E quanto ao diâmetro da circunferência formada pela borda da superfície cilíndrica, são iguais? Para verificar estes itens, use régua e compare as medidas nos dois cilindros.

___________________________________________________________________________
________________________________________

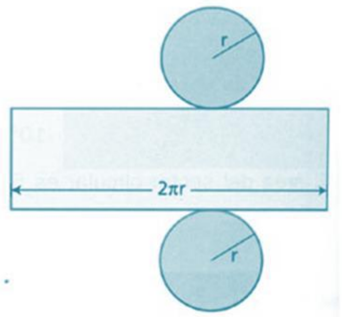
Você consegue identificar alguma característica comum? Dica: reflita sobre a área lateral e leve em consideração que ambos foram construídos com a mesma folha de papel. Discuta com seu colega!
Você sabe calcular a área lateral desta forma cilíndrica? Observe que a superfície lateral, que é "arredondada", foi construída a partir de um retângulo (folha de papel A4).

Abra a folha, meça as dimensões do retângulo com a régua e calcule a área lateral do sua forma cilíndrica, lembrando que a área de um retângulo de lados "a" e "b" é dada por A = a.b.

___________________________________________________________________________
______________________________________________

Iremos agora construir as bases desse cilindro. Para isso, precisamos saber o raio da circunferência da base. Você sabe como calcular esse raio? (sem precisar medir o diâmetro com a régua).
____________________________________________________________

Note que o comprimento da circunferência da base é igual ao comprimento do lado do retângulo que lhe formou. Por outro lado, sabemos que o comprimento da circunferência de raio r é:
$C = 2\pi r$.




Sendo assim, para encontrar o raio da base do cilindro basta resolver a equação $2\pi r$ = "valor do lado do retângulo usado para formar o círculo".

Aproxime $\pi$ para 3,14 e calcule o valor do raio utilizando a calculadora.

___________________________________________________________________________
__________________________________

Agora, vamos completar a construção do cilindro:

a) Pegue o compasso, a régua e uma folha de papel e faça duas circunferências com o raio encontrado. (utilize a régua para acertar a abertura do compasso).

b) Recorte os dois círculos.

c) Feche novamente o retângulo para formar o cilindro colando com a fita adesiva. (com cuidado para não sobrepor os lados, eles precisam apenas encostar um no outro).

d) Prenda os círculos, formando as bases do seu cilindro com a fita adesiva.

Para finalizar esta atividade, calcule a área total do seu cilindro.

Em duas aula trabalhei volume de cilindro.

VOLUME DO CILINDRO

Como todo sólido geométrico o cilindro possui volume. O volume de um cilindro é dado através da multiplicação da área da base pela altura. O cilindro possui está presente em diversas situações cotidianas pela sua capacidade de armazenamento de substâncias, por exemplo, botijão de gás, reservatório de água ou combustível entre outros. As duas bases de um cilindro possuem a forma circular e a área do círculo é determinada pela expressão $\pi * r^2$. Assim temos que o volume do cilindro é dado pela seguinte expressão matemática:

**$V = \pi * r^2 * h$**

Construí uma caixa de 10cm x 10cm x 10cm e com ela realizei com os alunos o seguinte experimento:
Primeiro pedi que eles calculassem área e o volume da caixa, lembrando que a mesma não possui tampa.
Depois perguntei se eles sabiam calcular a capacidade da caixa. Trabalhei a diferença entre volume e capacidade.
Depois coloquei em um copo graduado 1l de arroz e perguntei se naquela caixa era possível colocar o equivalente a 1l, se eles acham que ia sobrar arroz ou faltar para encher a caixa.
Depois de feita e experiência e provar que na caixa de $1000cm^3$ cabe 1l, fiz a relação:
Como 10cm equivalem a 1dm e um cubo com arestas 1dm tem volume igual a $1dm^3$ logo,
$1dm^3 = 1000cm^3 = 1l$.




***Exemplo 1***

Uma empresa irá fabricar latinhas de alumínio para uma indústria de refrigerantes. A lata precisa comportar a quantidade de 450 ml de refrigerante. Considerando que o formato da lata é semelhante a um cilindro e que a altura seja de 10 cm, qual será a medida do raio da base?

Temos que 450 ml corresponde a 450 cm , pois $1 \text{ cm}^3 = 1$ ml

$V = \pi * r^2 * h$
$450 = 3,14 * r^2 * 10$
$450 = 31,4 * r^2$
$450/31,4 = r^2$
$r^2 = 14,3$
$r = 3,8$ cm (aproximadamente)

O raio da base devera medir aproximadamente 3,8 cm

***Exemplo 2***

Uma indústria irá produzir dois tipos de copos com formato cilíndrico. O copo azul terá as seguintes medidas 5 cm de raio da base e 12 cm de altura e o copo verde 3 cm de raio da base e 18 cm de altura. Qual dos copos possuirá o maior volume?

Copo azul
$V = \pi * r^2 * h$
$V = 3{,}14 * 5^2 * 12$
$V = 3{,}14 * 25 * 12$
$V = 942\ cm^3$

Copo verde
$V = \pi * r^2 * h$
$V = 3{,}14 * 3^2 * 14$
$V = 3{,}14 * 9 * 18$
$V = 508{,}68\ cm^3$

O copo azul possuirá o maior volume.

***Exemplo 3***

Uma lata de óleo de soja possui as seguintes dimensões: raio da base medindo 4,5 cm e altura igual a 16 cm. Considerando que o conteúdo da lata seja de 900 ml, calcule a parte não ocupada da lata de óleo.
Vamos determinar o volume total da lata

$V = \pi * r^2 * h$
$V = 3{,}14 * 4{,}5^2 * 16$
$V = 3{,}14 * 20{,}25 * 16$
$V = 1017{,}36\ cm^3$
Obtendo o volume da parte não ocupada
1 017,36 – 900 = 117,36 ml

A parte não ocupada da lata corresponde a 117,36 ml.


Em duas aulas passarei o vídeo que conta a história de Arquimedes e a coroa do rei e exercícios sobre cilindros:

Exercícios

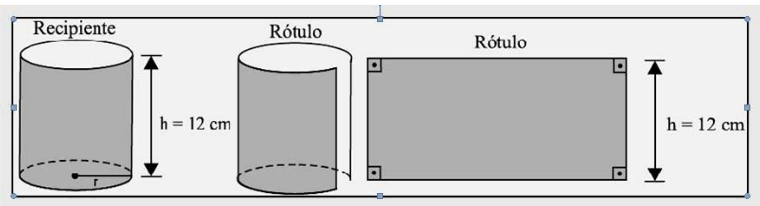
1) (UEMG)O diâmetro da base de um cilindro reto tem 10cm. Sabendo que a altura do cilindro é 12cm, o seu volume é:

a) 120 $\pi cm^3$ b ) 1440$\pi cm^3$ c)300$\pi cm^3$ d) 1200$\pi cm^3$

2) Qual é a altura de um cilindro reto de 12,56$cm^2$ de área da base sendo a área lateral o dobro da área da base? Use $\pi = 3,14$.

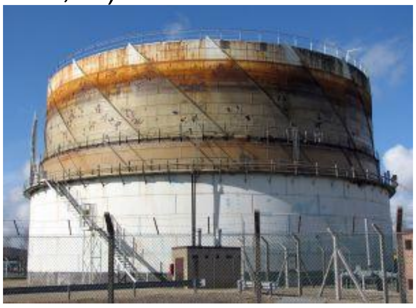
3) Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem 10m de diâmetro e 15m de profundidade?

4) Um rótulo retangular, contendo a prescrição médica, foi colado em toda a superfície lateral de um recipiente de forma cilíndrica de um certo remédio, contornando-o até as extremidades se encontrarem, sem haver superposição. Sabendo-se que o volume do recipiente (desprezando-se a sua espessura) é 192$\pi$ $cm^3$, pode-se afirmar que a área do rótulo, em $cm^2$, é igual a




a) 96$\pi$ b) 80$\pi$ c) 76$\pi$ d) 72$\pi$ e) 70$\pi$

5) Um reservatório de combustíveis apresenta o formato de um cilindro circular reto de 15 metros de diâmetro e 6 metros de altura. Determine a capacidade, em litros, desse reservatório. (Utilize $\pi=3,14$)



6) Uma indústria de embalagens deseja fabricar uma lata de tinta cilíndrica com raio da base medindo 5 cm de comprimento e com capacidade para 1 litro. Qual deverá ser o comprimento da altura dessa embalagem? (Use $\pi = 3,1$)

7) Um poço com a forma de um cilindro reto deve ser construído em um terreno plano. Se ele deve ter 24dm de diâmetro por 140 dm de profundidade, quantos metros cúbicos de terra deverão ser removidos para a sua construção?

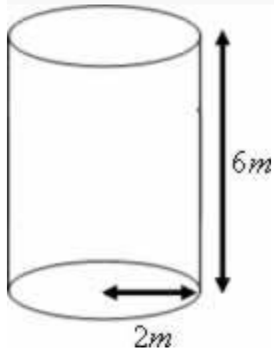
8) Numa feira livre, o caldo de cana é vendido em dois recipientes cilíndricos: o copo grande, que tem 5 cm de raio da base e 12 cm de altura, e o copo médio, com 3 cm de raio da base e

altura de 10 cm. Para o consumidor, qual copo é mais vantajoso, se o maior custa o triplo do médio?

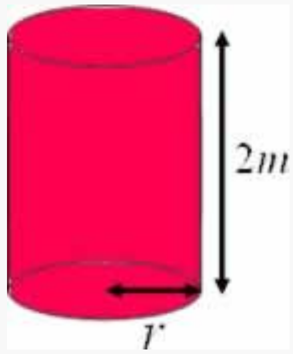
9) O dono de um posto de combustíveis deseja adquirir um tanque com formato cilíndrico com capacidade de, aproximadamente, 250 $m^3$. Para fabricar esse tanque, constatou-se que sua altura deveria ser de 9 metros. Determine qual deverá ser a medida do raio da base. (Use $\pi$ = 3,14)

10) O tanque de combustível de um caminhão tem a forma de um cilindro circular com diâmetro interno igual a 70cm e comprimento interno igual a 130cm.Calcule, em litros,a capacidade desse tanque de combustível.

11) Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine o volume e a capacidade desse reservatório.

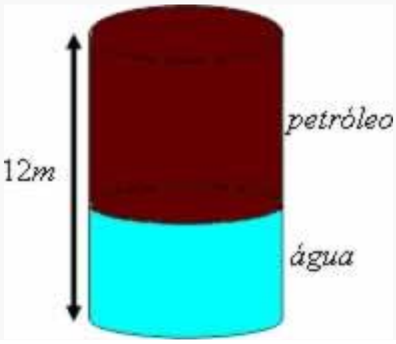



12) Cefet – SP) A figura indica o tambor cilíndrico de um aquecedor solar com capacidade de 1 570 litros.




Sabendo que 1 000 litros de água ocupam um volume de 1 m³ e adotado $\pi$ = 3,14, determine a medida do raio r do cilindro.

13) (Vunesp – SP) Um tanque subterrâneo, que tem o formato de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m³ de água e 42 m³ de petróleo. Considerando que a altura do tanque é de 12 metros, calcule a altura da camada de petróleo.



Duas aulas foram usadas para correção de exercícios e revisão de matéria.

Duas aulas para avaliação.

**Avaliação:**
Os alunos foram avaliados na execução das atividades propostas, individualmente, em grupo ou em dupla, na realização da oficina na Mostra de Matemática e por um teste.

**Número de aulas previstas:** 28 aulas

**Recursos didáticos:** folhas de atividades, hidrocor, quadro, vídeos, livro didático, folhas de papel A4, régua, tesoura, cola, transferidor calculadora, encarte de revistas.

**Referências:**

BUCCHI, Paulo – Matemática – Volume Único – São Paulo: Editora Moderna, 1992 – 1ª edição
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de; *Matemática Ciência e Aplicações* – volume 2 – São Paulo – Editora Saraiva – 2010 - 6ª edição.
PAIVA, Manoel – *Matemática Atual* – volume 2 – São Paulo: Editora Moderna, 2009 – 1ª edição
SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno – *Matemática Aula por Aula* - 2ª série – São Paulo: FTD, 2005
SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez - *Matemática Ensino Médio* – volume 2 – São Paulo: Saraiva, 2010 – 6ª edição
SOUZA, Joamir – Matemática – Coleção Novo Olhar - volume 2 – São Paulo : FTD , 2010 – 1ª edição
Material da Formação Continuada
http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/volume-cilindro.htm acesso em 20 de maio de 2013
Vídeo: A Lenda de Dido. Disponível em:http://www.youtube.com/watch?v=WAWPSY3_IaA
Vídeo: Abelhas Matemáticas. Disponível em:http://www.youtube.com/watch?v=sDc6T4EVrFo
Vídeo: "Misterio - Princípio de Cavalieri",
disponível em http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A
Vídeo: Princípio de Arquimedes. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=_N4wKnCwuq4