Geometria Espacial: Prismas e Cilindros

Jacqueline Garcia Pereira

2ª serie do Ensino Médio

Grupo: 2

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes.

Sumário

Introdução

O pensamento espacial desenvolve a habilidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais. Pessoas com senso espacial apreciam a arte, a arquitetura. Elas são capazes de descrever e analisar o mundo em que vivem usando as idéias geométricas.

Esse desenvolvimento espacial está presente na sala de aula, principalmente nas aulas de matemática onde são propostos os trabalhos com a geometria.

É fundamental que ao se aprofundar nesses conhecimentos os alunos conheçam melhor os poliedros e suas propriedades e a importância da leitura de uma planificação na resolução de um problema.

Esse trabalho apresenta mais dois poliedros: o cilindro e o prisma, o cálculo de suas áreas e volumes, bem como suas propriedades e suas planificações.

Estas atividades serão aplicadas nas aulas de matemática, na turma do 2º Ano do Ensino Médio, do C.E.Brasil no segundo bimestre de 2013.

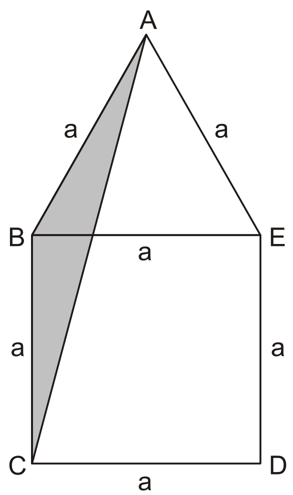
Desenvolvimento

Atividade 1 – Revisão das áreas das figuras planas.

- **Habilidade Relacionada:** Calcular áreas de figuras planas por composição e decomposição de outras figuras.
- **Pré-requisitos:** operações com números reais.
- **Tempo de duração:** 100 minutos.
- **Recursos utilizados:** folhas de atividades e vídeo aula.
- **Organização da turma:** Dispostas em duplas, de forma a propiciar trabalho organizado e colaborativo.
- **Objetivos:** Resolver problemas significativos envolvendo o cálculo de área das principais figuras planas.
- **Metodologia adotada:** Será exibido para a turma, com o auxílio do Data-show, a vídeo aula(site: WWW.mundovestibular.com.br>matematica), com o objetivo de revisar alguns conceitos, já vistos em séries anteriores, sobre o cálculo das áreas das principais figuras planas. A seguir, os alunos, em duplas, deverão resolver as atividades.
- **Avaliação:** Será feita mediante a correção dos exercícios propostos e a análise dos resultados obtidos pela turma.

Exercícios– Áreas de Figuras Planas

1) (Ufmg 2010) Nesta figura plana, há um triângulo equilátero, ABE, cujo lado mede *a*, e um quadrado, BCDE, cujo lado também mede *a* :



Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que a área do triângulo ABC é

a) $\frac{a^2}{3}$

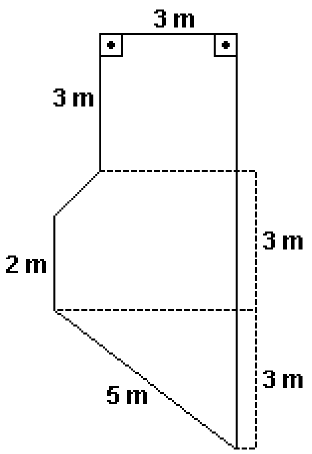
b) $\frac{a^2}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3a^2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3a^2}}{8}$

Alternativa B

2) A área de uma sala com a forma da figura a seguir é de:



a) 30 m^2

b) 26,5 m^2

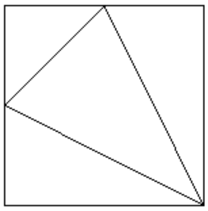
c) 28 m^2

d) 24,5 m^2

e) 22,5 m^2

Alternativa B

3) (Pucmg-09) Para fazer um modelo de ladrilho, certo desenhista une um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contêm esse vértice, obtendo um triângulo isósceles. A razão entre a medida da área desse triângulo e a medida da área desse quadrado é igual a:

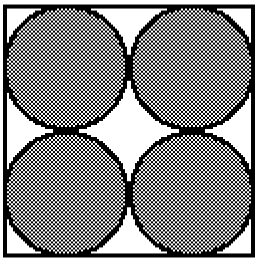


a) 0,350 c) 0,380 e) 0,456

b) 0,375 d) 0,385

Alternativa B

4) De uma chapa quadrada de papelão recortam-se 4 discos, conforme indicado na figura. Se a medida do diâmetro dos círculos é 10 cm, qual a área (em cm^2) não aproveitada da chapa?



a) 40 - 20 π

b) 400 - 20 π

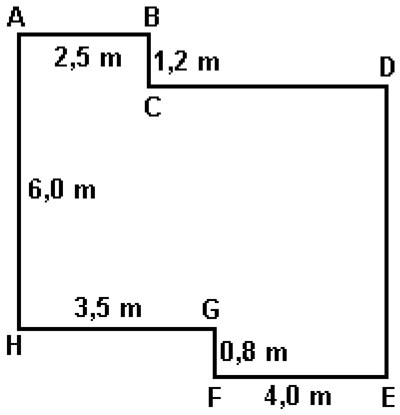
c) 100 - 100 π

d) 20 - 20 π

e) 400 - 100 π

AlternativaE

5) A figura adiante mostra a planta baixa da sala de estar de um apartamento. Sabe-se que duas paredes contíguas quaisquer incidem uma na outra perpendicularmente e que AB = 2,5 m, BC = 1,2 m, EF = 4,0 m, FG = 0,8 m, HG = 3,5 m e AH = 6,0 m

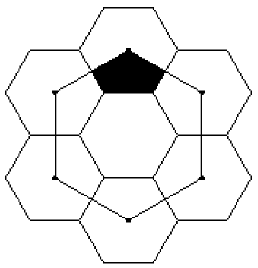


Qual a área dessa sala em metros quadrados?

a) 37,2. b) 38,2. c) 40,2. d) 41,2. e) 42,2.

Alternativa E

6) (Fuvest-09) A figura a seguir representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a:



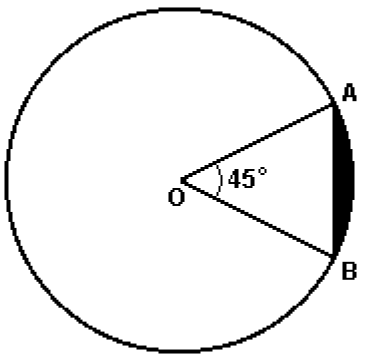
a) $3\sqrt{3}$ c) $3(\sqrt{3})/2$ e) $(\sqrt{3})/2$

b) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$

Alternativa E

7) Na figura a seguir tem-se uma circunferência C de centro O e raio de medida 3 cm. Os pontos A e B pertencem a C, e a medida do ângulo AÔB é 45°.

A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a:



a) 3/4 . (π- √2/2)

b) 3/2 . (π/4 - √3)

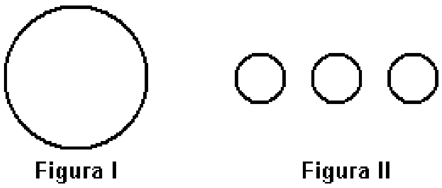
c) 9/4 . (π/2 - √2)

d) 9/2 . (π/4 - √2)

e) 9/2 . (π/2 - 1)

Alternativa C

8) (Unifesp-08) Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura I, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura II.



Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por :

a) S = 3s.

b) S = 4s.

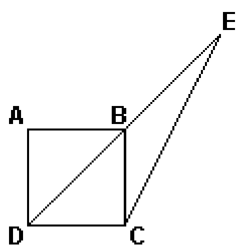
c) S = 6s.

d) S = 8s.

e) S = 9s.

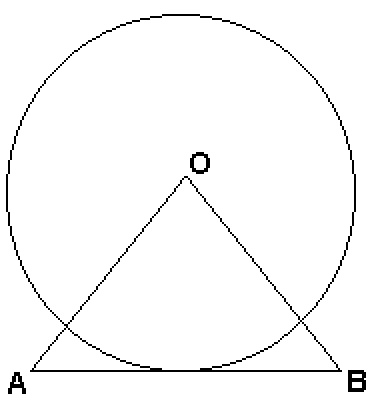
Alternativa E

9) (Ufla-08) Dado um quadrado ABCD de área 4 cm^2 em que B é o ponto médio do segmento DE, calcule a medida do segmento CE .



Resp:2√5 cm

10) A área do triângulo equilátero OAB, representado na figura a seguir é 9√3 cm^2. A área do círculo de centro O e tangente ao lado AB do triângulo é, em centímetros quadrados.



a) 27 π **b) 32 π** **c) 36 π** **d) 42 π** **e) 48 π**

Alternativa A

Atividade 2 – Roteiro de Ação 1.

- **DURAÇÃO PREVISTA**: 100 minutos.
- **ÁREA DE CONHECIMENTO**: Matemática.
- ***ASSUNTO****: Geometria Espacial - Prismas e Cilindros.*
- ***OBJETIVOS:*** *Manipular e reconhecer diferentes prismas e cilindros e suas planificações.*
- ***PRÉ-REQUISITOS****: Figuras geométricas planas.*
- ***MATERIAL NECESSÁRIO****: Folha de atividades, tesoura, cola e embalagens do nosso dia a dia, tais como: caixinhas de remédio, de sabão em pó ou de sapato, rolos de papel, lata de achocolatado, etc.*
- ***ORGANIZAÇÃO DA CLASSE****: Turma disposta em grupos de 3 a 4 alunos, de forma a propiciar trabalho organizado e colaborativo.*
- **Avaliação:** Será feita mediante a observação do interesse e participação dos alunos nas atividades propostas.

Este roteiro de ação apresenta uma sugestão de como iniciar o estudo de prismas e cilindros a partir de objetos presentes no nosso dia a dia que, possivelmente, se encaixam nessa classificação. O objetivo deste roteiro é trabalhar o reconhecimento e a identificação desses sólidos, através da manipulação de embalagens trazidas pelos alunos tais como caixinhas (de remédio, sapato, pasta de dente, sabão em pó, etc.), rolos de papel higiênico, embalagens de achocolatado, dentre outras.

Oriente-os a levar objetos, de preferência, com a forma de paralelepípedo e de cilindros. Para que o aluno tenha tempo de conseguir tais objetos, o professor deve solicitá-los com certa antecedência. Sugerimos que cada aluno leve pelo menos um objeto. É importante que o professor também leve alguns objetos de reserva e que, dentre eles contenha pelo menos dois de cada tipo: dois cilindros, dois prismas e dois que não sejam cilindro nem prisma, garantindo também o contraexemplo.

Antes de começar a atividade, sugerimos que o professor organize os grupos tentando mesclar os objetos trazidos – se possível deixar cada grupo com pelo menos um objeto cilíndrico. Caso isso não seja possível, o professor pode fornecer algum dos que ele levou.

1ª Parte – Reconhecendo Prismas e Cilindros

1) Em grupo, coloque seu objeto, que representa um sólido geométrico, à sua frente, de forma que todos os colegas possam vê-lo.

2) Antes de iniciar a atividade, converse com seu grupo, e juntos, escolham um colega para ser o narrador da atividade em voz alta. (ou cada um lê um item)

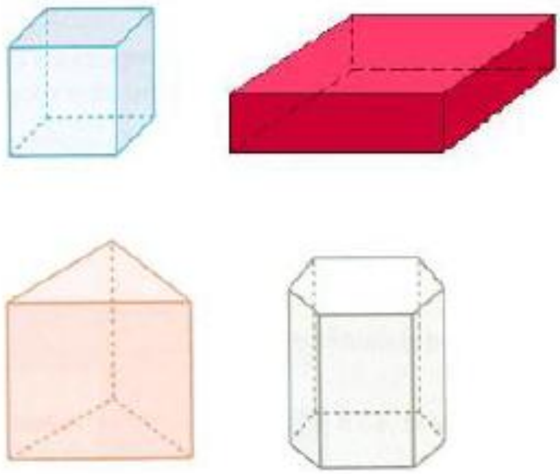
3) Observe todos os objetos trazidos. Procure semelhanças entre eles e separe em dois grupos de acordo com as características observadas.

Como vocês realizaram essa separação? Converse com seus colegas e verifique se, em um grupo, ficaram os objetos que possuem todas as partes planas e, no outro grupo, os que são "arredondados".

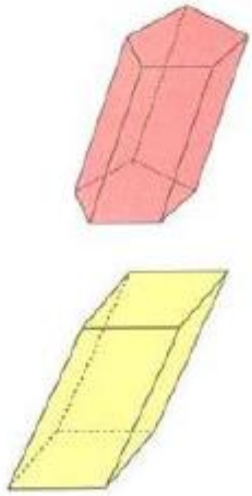
Neste momento, você deve verificar se os alunos conseguiram fazer a separação corretamente e ajudar os que não tiverem conseguido. É importante verificar se algum grupo possui algum objeto que não seja cilindro ou prisma. Caso isso aconteça, oriente-os para que eles formem grupos de objetos do tipo que têm partes planas ou que têm alguma parte não plana ou

4) Pegue duas folhas e escreva a palavra "PRISMA" em uma delas e "CILINDRO" na outra com letra de forma bem grande.

5) Leia com atenção as características de cada uma das ilustrações a seguir.

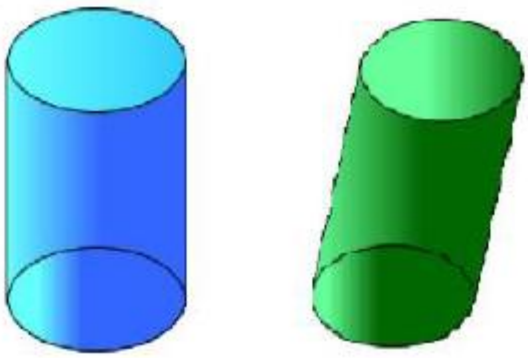


Prismas retos



Prismas oblíquos

> Um prisma é um poliedro convexo que possui duas faces paralelas, formadas por polígonos convexos congruentes (iguais) – chamadas de bases – e cujas faces restantes, chamadas faces laterais, são compostas por retângulos (no caso do prisma ser reto) ou paralelogramos (nos prismas oblíquos).



Cilindro reto Cilindro oblíquo

> A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte "curva" (arredondada), que é a superfície lateral.

Professor, é importante você verificar se os alunos lembram o que é polígono, poliedro, poliedro convexo e polígono convexo, já que este conteúdo foi trabalhado no 1º bimestre, de acordo com o currículo mínimo.

6) Agora, reveja os objetos de cada grupo e de acordo com as definições anteriores, coloque cada folha diante de cada grupo de objetos.

7) Vocês conseguem observar algumas características comuns aos prismas e aos cilindros? Quais? Discutam em grupo.

Professor, é importante verificar se os alunos percebem que, tanto os prismas quanto os cilindros, possuem duas bases paralelas e congruentes. Caso não o percebam é necessário mostrar-lhes essa característica comum.
É interessante pegar um sólido que não se enquadre no grupo dos prismas nem dos cilindros, o "contraexemplo", e mostrar aos alunos o porquê de eles não pertencerem a esses grupos, ou até mesmo propor que eles expliquem.

2ª Parte – Construindo outros Prismas

1) Agora você irá construir alguns sólidos geométricos. Para isso, colocamos ao final (anexos) desta atividade três planificações para a montagem.

2) Destaque as folhas em anexo, no final desta atividade, recorte nas linhas externas e dobre todas as outras.

3) Depois que estiver tudo dobrado corretamente, passe cola apenas nas abas em branco e cole por dentro das faces.

4) Tanto os cilindros quanto os primas são classificados de acordo com sua base. Exemplo:

- Prisma triangular (possui base triangular);
- Prisma retangular ou paralelepípedo (tem como base um retângulo);
- Paralelepípedo reto-retângulo (todas as faces são retangulares);
- Prisma hexagonal (possui um hexágono na base);
- Cilindro circular (a base é um círculo);

Nomeie os prismas e cilindros que vocês possuem de acordo com essa classificação.

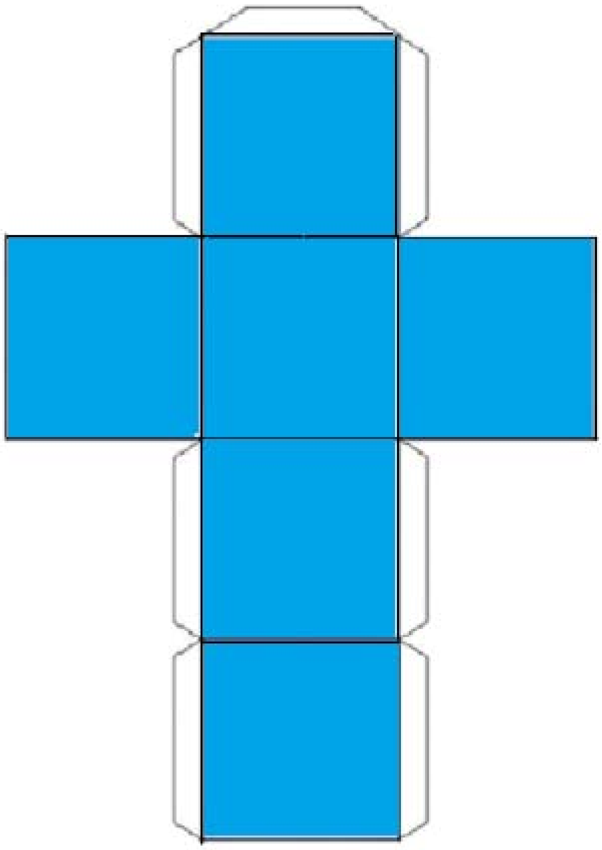
5) Observe o cubo. Ele é um prisma? Em caso afirmativo, podemos encaixá-lo em qual das classificações já citadas?

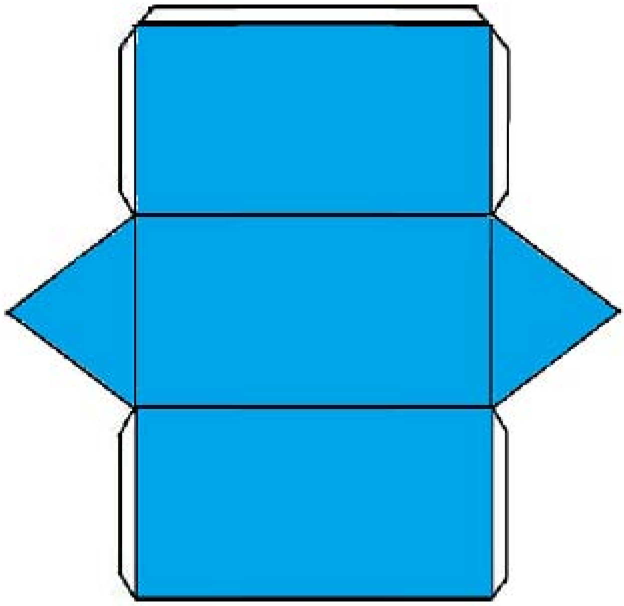
6) Observe, agora, o cubo e o paralelepípedo reto-retângulo. Ambos são paralelepípedos, correto? Mas qual é a diferença entre eles?

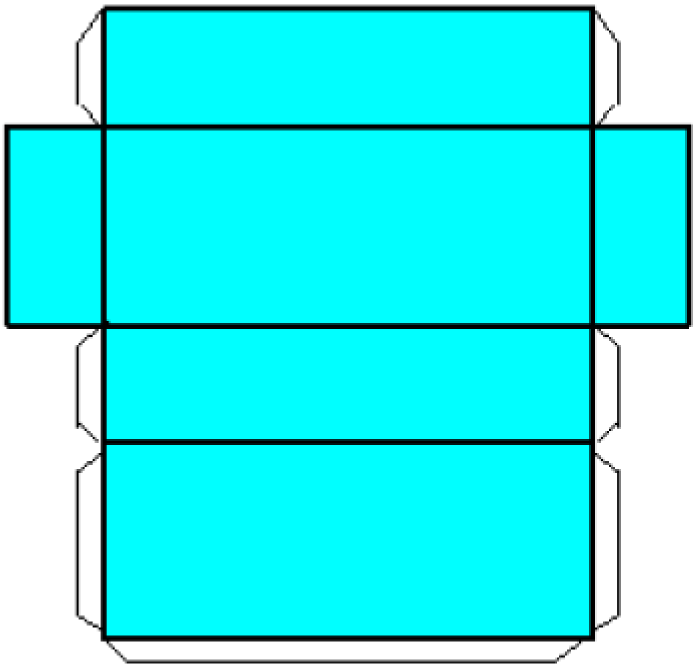
Professor, neste momento, você pode relembrar que um quadrado é também um retângulo, pois tem todas as suas propriedades: é um polígono de 4 lados, dois a dois paralelos e com mesma medida e possui 4 ângulos com 90 graus. Além dessas propriedades, ele possui todos os lados com a mesma medida. Os alunos deverão perceber a inclusão de classes: o quadrado é retângulo e é losango, o retângulo e o losango são paralelogramos e os paralelogramos são quadriláteros.

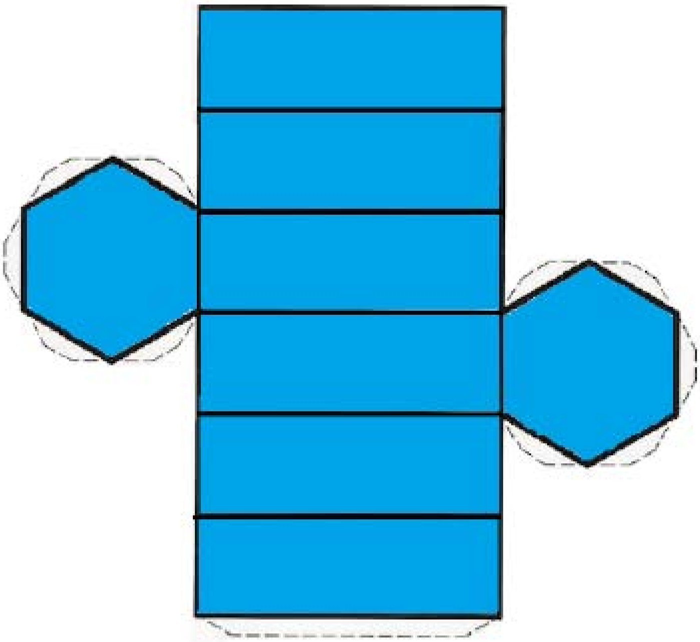
Entre os prismas quadrangulares também pode-se observar a inclusão de classes. Um prisma quadrangular (ou paralelepípedo) possui faces que são paralelogramos. O paralelepípedo reto-retângulo é um prisma que possui todas as suas faces retangulares, logo é um prisma quadrangular. O quadrado é um retângulo, assim, o cubo é um paralelepípedo reto-retângulo que tem todas as faces quadradas.

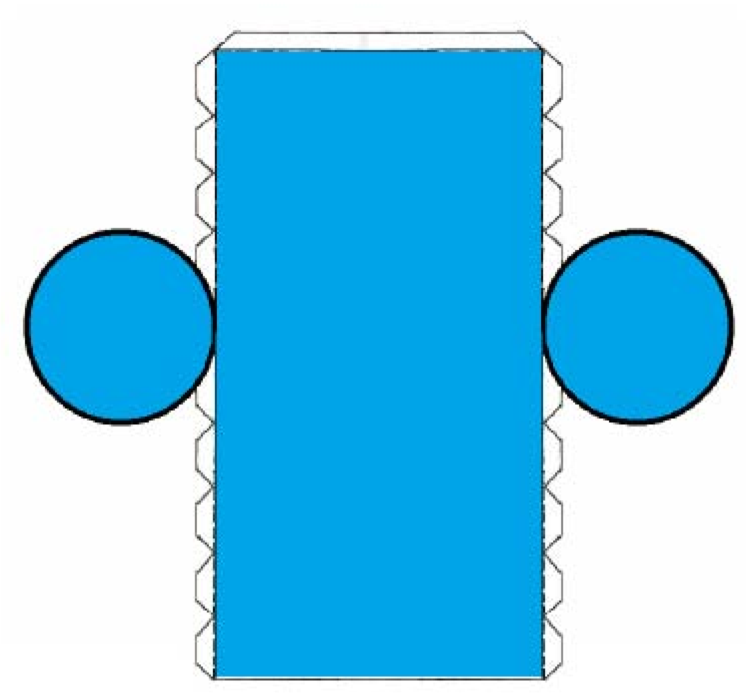
7) Agora que você já aprendeu o que é um prisma e já viu algumas planificações, tente construir uma planificação de um prisma diferente dos que foram apresentados. Escolha qualquer polígono regular para ser a base, diferente de triângulo, quadrado e hexágono.











Atividade 3 – Prisma.

- **Habilidade Relacionada:** H04 – reconhecer prismas por meio das suas principais características; H24 – resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um prisma; H25 – resolver problemas envolvendo noções de volume.
- **Pré-requisitos:** operações com números reais e área das principais figuras planas.
- **Tempo de duração:** 100 minutos.
- **Recursos utilizados:** livro didático e Data-show.
- **Organização da turma:** individual.
- **Objetivos:** o aluno deverá utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
- **Metodologia adotada:** utilizando o Data-showserãoapresentados aos alunos os tópicos descritos abaixo:
- **Exercícios de Fixação:**exercícios do livro páginas 191 e 192.
- **Avaliação:** será feita mediante a correção dos exercícios propostos.

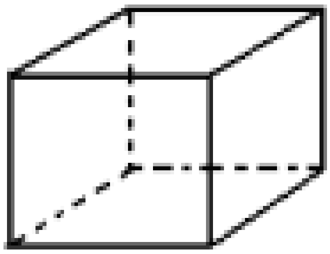
Geometria Espacial

Relação de Euler

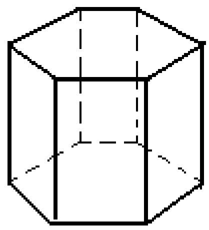
Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte:

$$\mathbf{V - A + F = 2}$$

em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.
Observe os exemplos:



V=8   A=12   F=6
8 - 12 + 6 = 2



V = 12 A = 18   F = 8
12 - 18 + 8 = 2

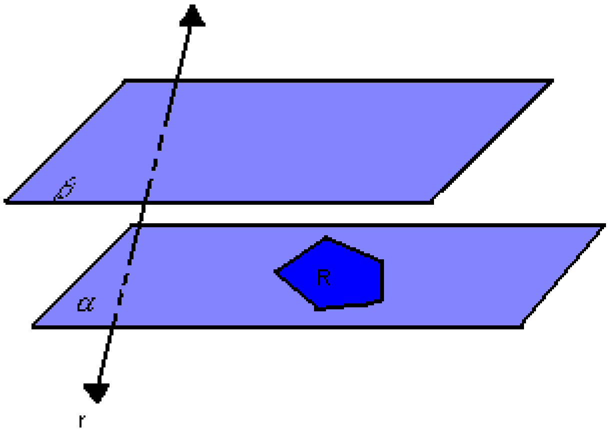
Poliedros platônicos

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:
a) for convexo;
b) em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;
c) toda face tiver o mesmo número de arestas;
d) for válida a relação de Euler.

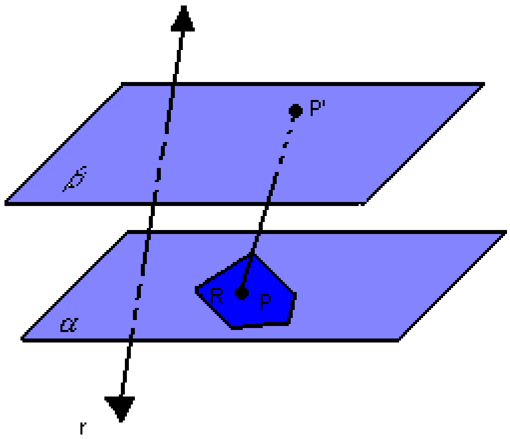
Assim, nas figuras acima, o primeiro poliedro é platônico e o segundo, não-platônico.

Prismas

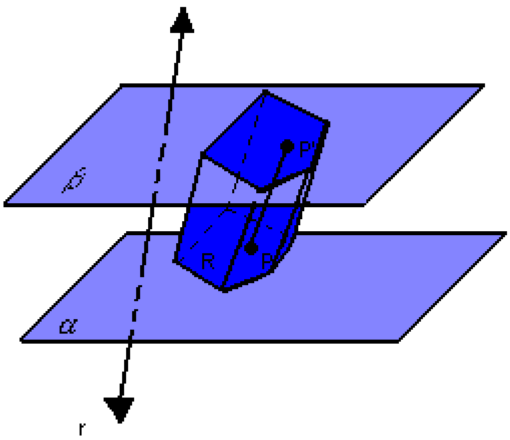
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo **R** contido em α e uma reta **r** que intercepta α e β, mas não **R**:



Para cada ponto **P** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$, paralelo à reta **r** $(P' \in \beta)$**:**



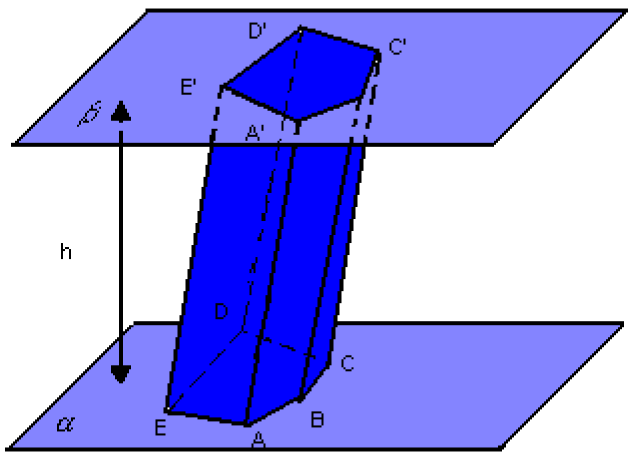
Assim, temos:



Chamamos de prisma ou prisma limitado o conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{PP'}$ paralelos a **r**.

Elementos do prisma

Dados o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:



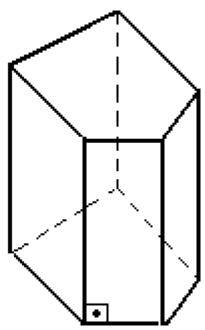
- bases:as regiões poligonais **R** e **S**
- altura:a distância **h** entre os planos α e β
- arestas das bases:os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$ (dos polígonos)
- arestas laterais:os segmentos $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$
- faces laterais: os paralelogramos AA'BB', BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A

Classificação

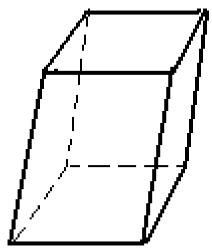
Um prisma pode ser:

- reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;
- oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Veja:

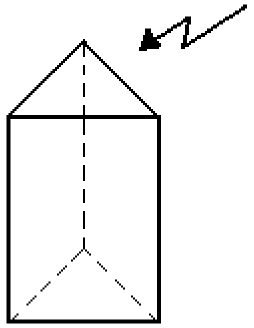


prisma reto

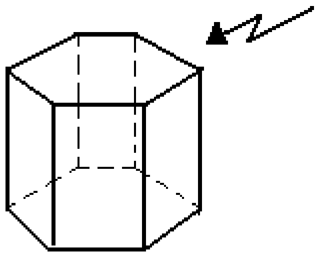


prisma oblíquo

Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares:



prisma regular triangular



prisma regular hexagonal

Observação: As faces de um prisma regular são retângulos congruentes.

Secção

Um plano que intercepte todas as arestas de um prisma determina nele uma região chamada secção do prisma.

Secção transversal é uma região determinada pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases (figura 1). Todas as secções transversais são congruentes (figura 2).

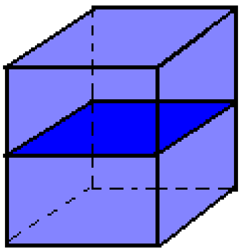


figura 1

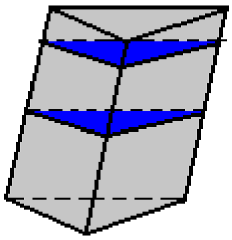


figura 2

Áreas

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície:as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área de uma face ($\mathbf{A_F}$):área de um dos paralelogramos que constituem as faces;

b) área lateral ($\mathbf{A_L}$):soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma.

No prisma regular, temos:

$$A_L = n \cdot A_F \text{ (n = número de lados do polígono da base)}$$

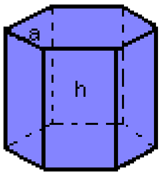
c) área da base ($\mathbf{A_B}$): área de um dos polígonos das bases;

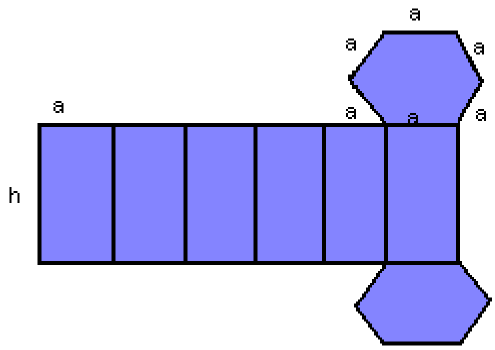
d) área total ($\mathbf{A_T}$): soma da área lateral com a área das bases

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Vejamos um exemplo.

Dado um prisma hexagonal regular de aresta da base **a** e aresta lateral **h**, temos:





$$A_F = ah$$

$$A_L = 6ah$$

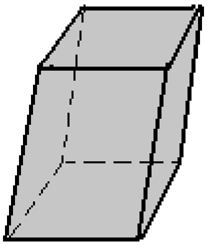
$$A_B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \text{ (área do hexágono regular)}$$

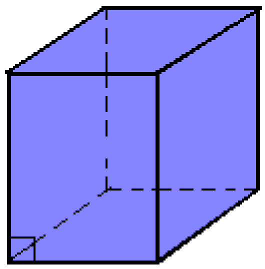
Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo.Assim, podemos ter:

b) paralelepípedo reto

a) paralelepípedo oblíquo

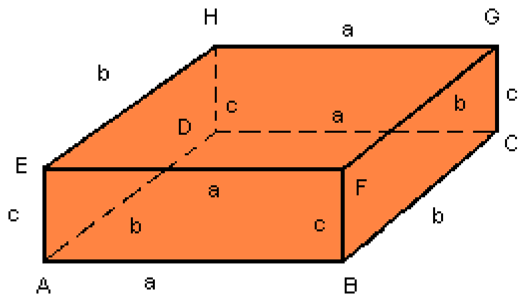




Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo *reto-retângulo,ortoedro ou paralelepípedo retângulo.*

Paralelepípedo retângulo

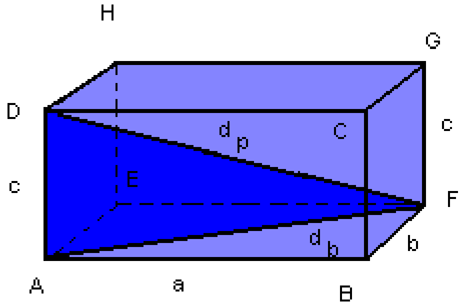
Seja o paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura:



Temos quatro arestas de medida **a**, quatro arestas de medida **b** e quatro arestas de medida **c**; as arestas indicadas pela mesma letra são paralelas.

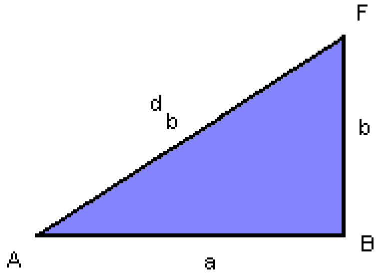
Diagonais da base e do paralelepípedo

Considere a figura a seguir:



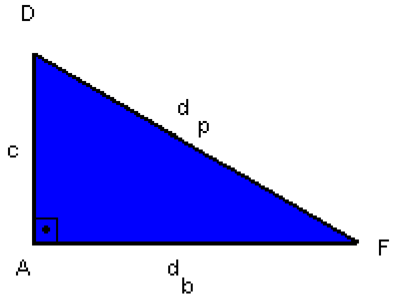
d_b = diagonal da base
d_p = diagonal do paralelepípedo

Na base ABFE, temos:



$$d_b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

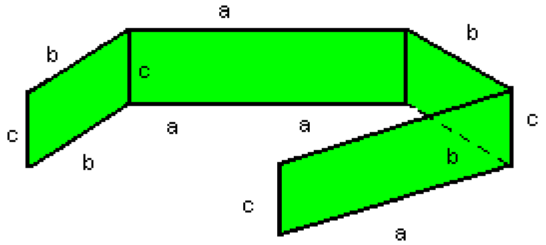
No triângulo AFD, temos:



$$d_p^2 = d_b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Área lateral

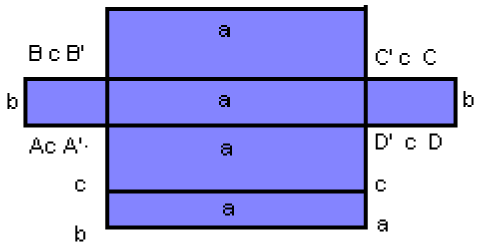
Sendo $\mathbf{A_L}$ a área lateral de um paralelepípedo retângulo, temos:



$A_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = A_L = 2(ac + bc)$

Área total

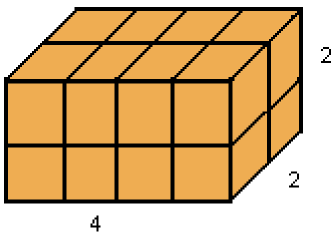
Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:



$A_T = 2(ab + ac + bc)$

Volume

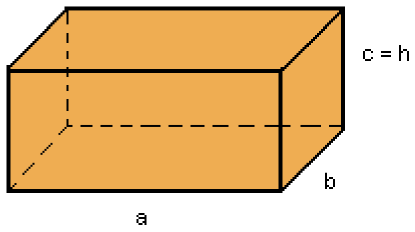
Por definição, unidade de volume é um cubo de aresta 1. Assim, considerando um paralelepípedo de dimensões 4, 2 e 2, podemos decompô-lo em 4 . 2 .2 cubos de aresta 1:



Então, o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** é dado por:

$$V = abc$$

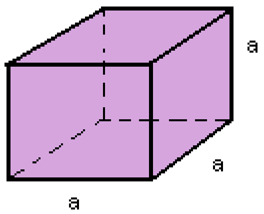
Como o produto de duas dimensões resulta sempre na área de uma face e como qualquer face pode ser considerada como base, podemos dizer que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto da área da base $\mathbf{A_B}$ pela medida da altura **h:**



$$V = A_B h$$

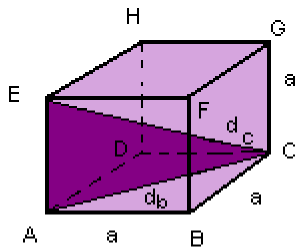
Cubo

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes (a= b = c) recebe o nome de cubo. Dessa forma, as seis faces são quadrados.



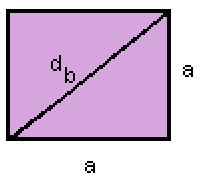
Diagonais da base e do cubo

Considere a figura a seguir:



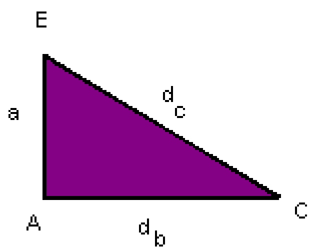
d_c=diagonal do cubo
d_b = diagonal da base

Na base ABCD, temos:



$$d_b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

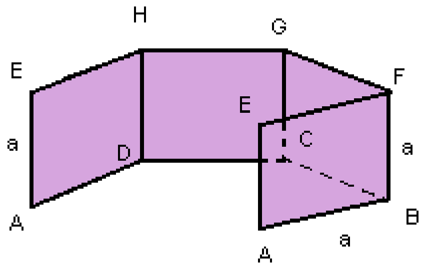
No triângulo ACE, temos:



$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

Área lateral

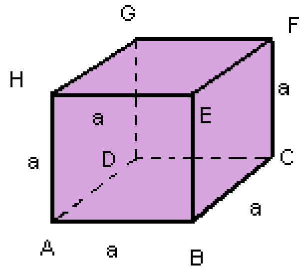
A área lateral $\mathbf{A_L}$ é dada pela área dos quadrados de lado **a**:



$A_L=4a^2$

Área total

A área total $\mathbf{A_T}$ é dada pela área dos seis quadrados de lado **a**:



$A_T=6a^2$

Volume

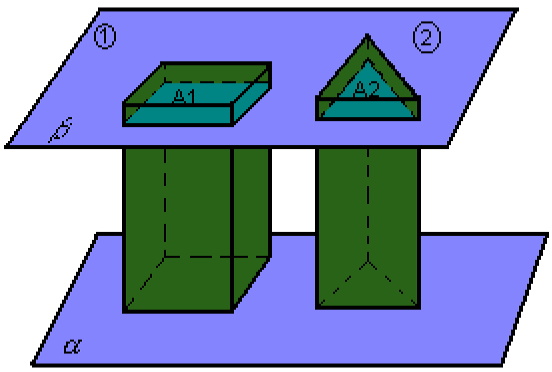
De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta **a** é dado por:

$$V= a .a . a = a^3$$

Generalização do volume de um prisma

Para obter o volume de um prisma, vamos usar o princípio de Cavalieri (matemático italiano, 1598 - 1697), que generaliza o conceito de volume para sólidos diversos.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo a α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



$\alpha // \beta$ e $A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo prisma e de todo paralelepípedo é o produto da área da base pela medida da altura:

$$\boxed{V_{prisma} = A_B h}$$

Atividade 4 – Roteiro e ação 2.

- **DURAÇÃO PREVISTA**: 100 minutos.
- **ÁREA DE CONHECIMENTO**: Matemática.
- ***ASSUNTO****: Geometria Espacial – Prismas e Cilindros.*
- ***OBJETIVOS****: Proporcionar a visualização da construção de um cilindro de revolução.*
- ***PRÉ-REQUISITOS****: Classificação de cilindro (reto e obliquo).*
- ***MATERIAL NECESSÁRIO****: Folha de atividades, duas folhas A4, computador com programa de geometria dinâmica, Geogebra, instalado e com os arquivo “*cilindrorevol.ggb*” disponibilizado, lápis, borracha.*
- ***ORGANIZAÇÃO DA CLASSE****: Turma disposta em duplas, propiciando trabalho organizado e colaborativo.*

- **Avaliação:** Será feita mediante a observação do interesse e participação dos alunos nas atividades propostas.

Um cilindro pode ser chamado também de cilindro de revolução, pois ele pode ser obtido por uma rotação completa de uma região retangular em torno de uma reta que contém um de seus lados.

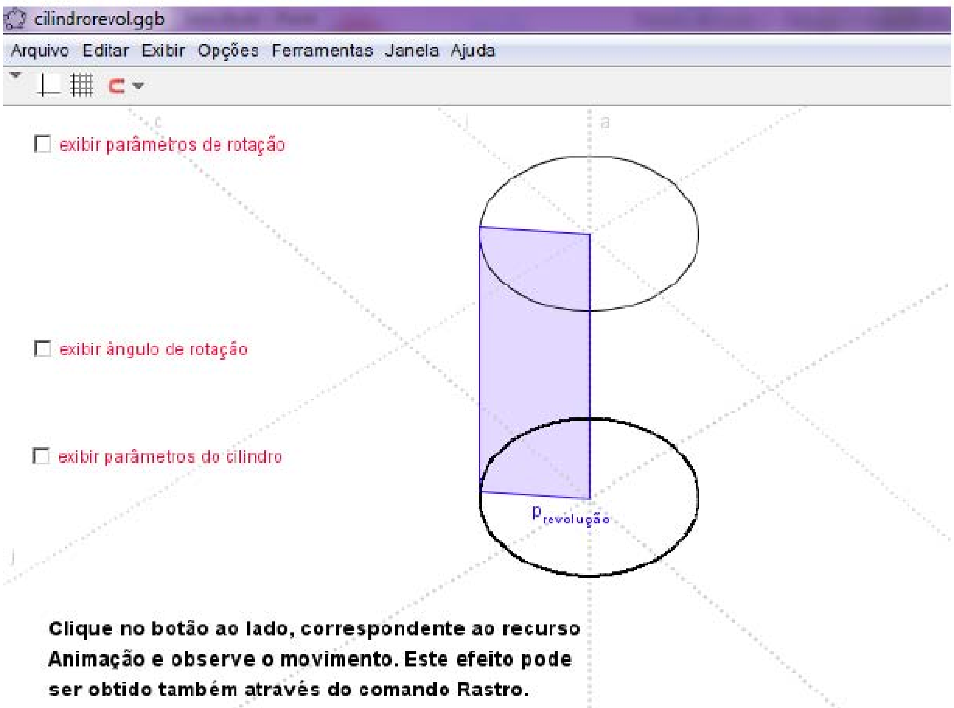
1) Você consegue visualizar a formação do cilindro a partir da rotação do retângulo?

2) Algumas pessoas possuem facilidade para a visualização (imaginar o que não podemos ver) e outras não. Para auxiliar neste processo, utilizaremos um *applet,* criado no GeoGebra. Para isto, abra o arquivo "cilindrorevol.ggb" disponibilizado, ou se preferir acesse o ***applet*** através do seguinte link: https://sites.google.com/site/geogebrando/fundamental/geoespacial/cilindro-de-revolucao.

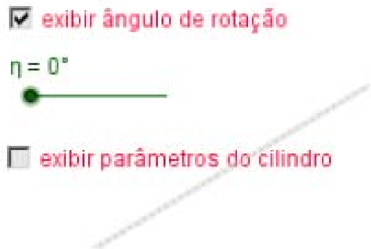
Applet

Software do tipo aplicativo que é executado no contexto de outro programa. Exemplos comuns de *applets* são o Java e os vídeos em *Flash*. Outro exemplo é o *applet* do *Windows Media Player* que é usado para exibir arquivos de vídeo embutidos no *Internet Explorer* (e outros navegadores).

3) Após abrir o arquivo você verá a seguinte imagem:



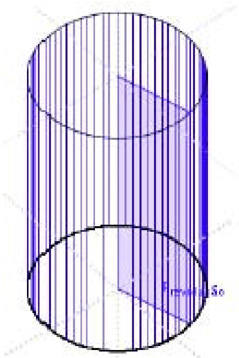
4) Marque a segunda opção (exibir ângulo de rotação). Aparecerá uma barra de rolagem como abaixo:

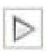


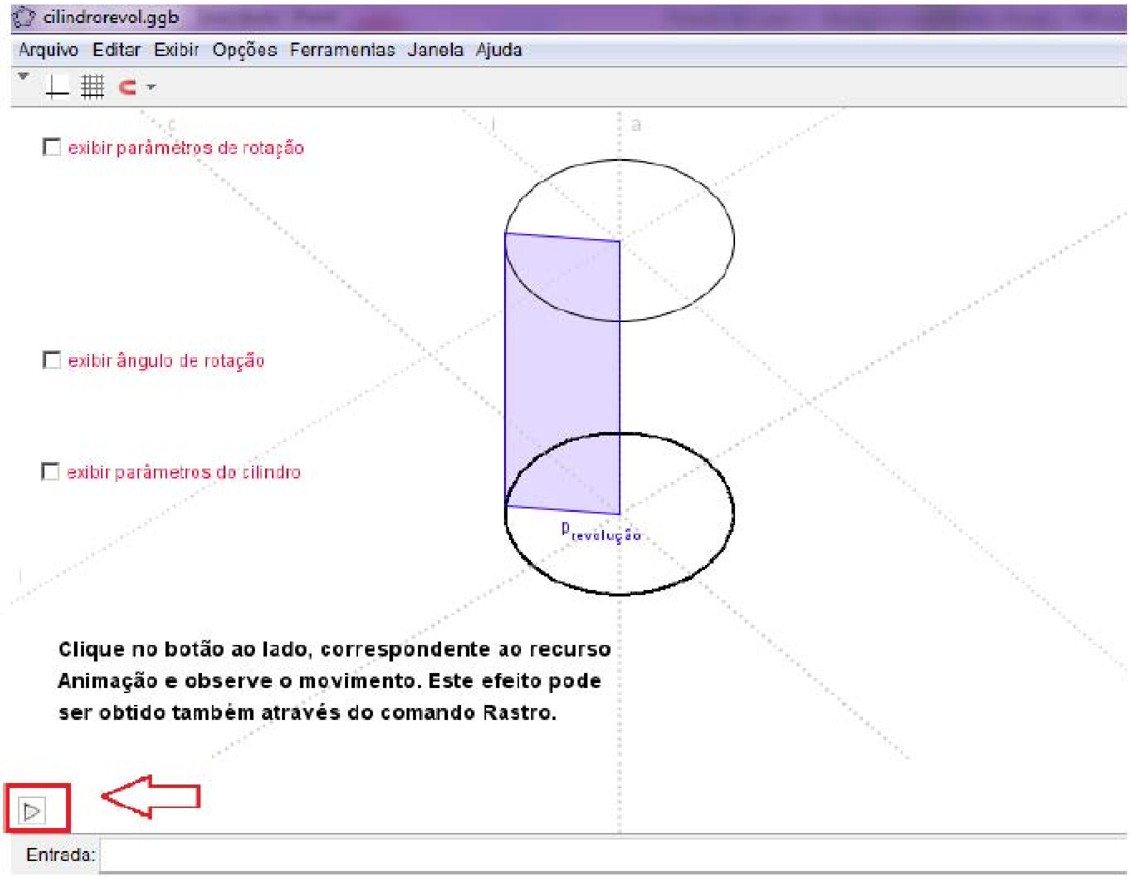
5) Mova o seletor η = 0° e observe a rotação do retângulo azul (do início da barra até o final - para realizar a volta completa de 0^0 até 360^0).

6) Você já encontrou este sólido geométrico em seu cotidiano? Onde? Converse com seus colegas!

7) Cada segmento de reta que aparece na superfície cilíndrica após a rotação, são chamados de "geratriz" do cilindro.

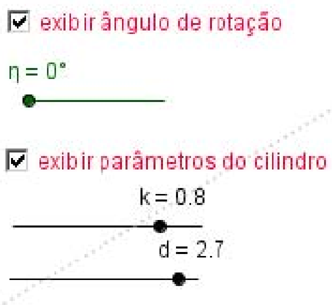


Você pode observar melhor a rotação do retângulo clicando no botão play  que aparece no canto inferior esquerdo.



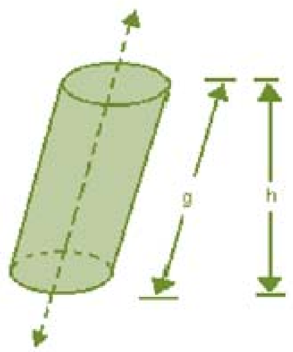
8) Esse cilindro é reto ou obliquo? Converse com seu colega.

9) Perceba que este cilindro é reto, pois o eixo de rotação é perpendicular à base. Nesse caso, a geratriz é igual à sua altura. Para alterar esse valor, marque a opção "exibir parâmetros do cilindro" e altere o valor de d=2.2 na segunda barra de rolagem.



10) Agora mova a barra de rolagem k = 1 e observe que ela altera a outra dimensão do retângulo, que é o raio da base do cilindro.

No caso do cilindro ser oblíquo, a geratriz não seria igual à altura. Veja:

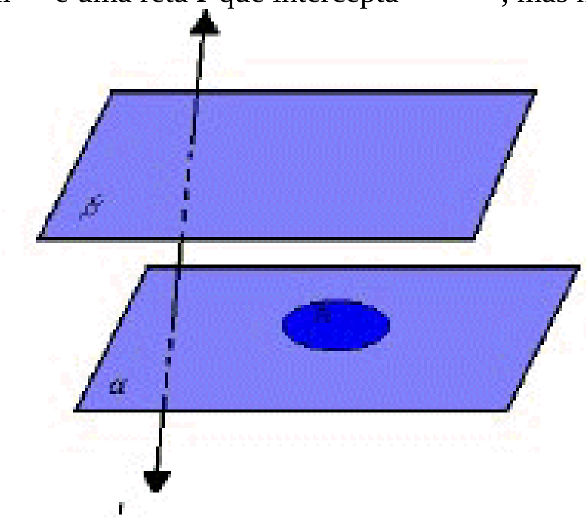


Atividade 5 – Cilindros.

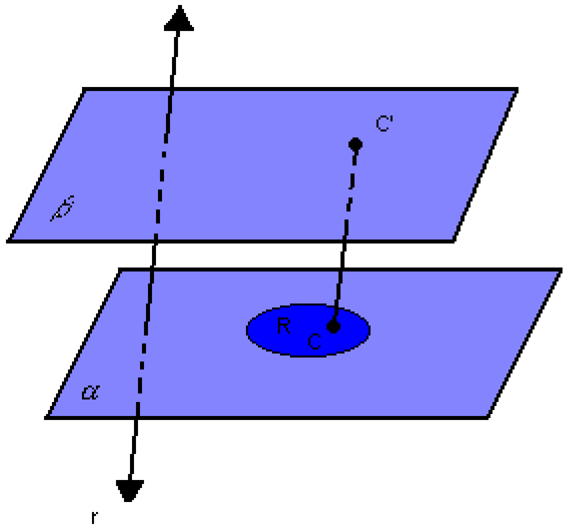
- **Habilidade Relacionada:** H04 – reconhecer cilindros por meio das suas principais características; H24 – resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um cilindro; H25 – resolver problemas envolvendo noções de volume.
- **Pré-requisitos:** operações com números reais e área das principais figuras planas.
- **Tempo de duração:** 100 minutos.
- **Recursos utilizados:** livro didático e Data-show.
- **Organização da turma:** individual.
- **Objetivos:** o aluno deverá utilizar o conhecimento geométrico para resolver problemas.
- **Metodologia adotada:** utilizando o Data-show será apresentado aos alunos os tópicos descritos abaixo:
- **Exercícios de Fixação:** exercícios do livro páginas 222 e 223.
- **Avaliação:** será feita mediante a correção dos exercícios propostos.

Cilindro

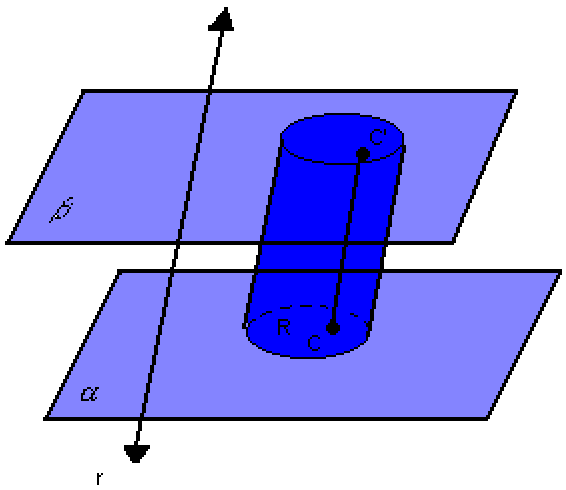
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um círculo **R** contido em α e uma reta **r** que intercepta α e β, mas não **R**:



Para cada ponto **C** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{CC'}$, paralelo à reta **r** $(C' \in \beta)$**:**



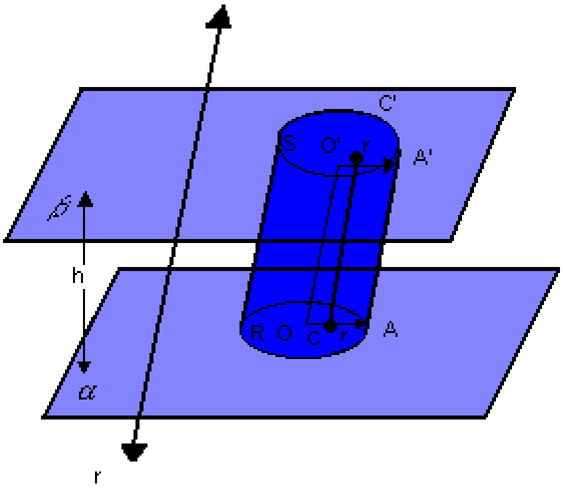
Assim, temos:



Chamamos de *cilindro, ou cilindro circular,* o conjunto de todos os segmentos $\overline{CC'}$ congruentes e paralelos a **r**.

Elementos do cilindro

Dado o cilindro a seguir, consideramos os seguintes elementos:



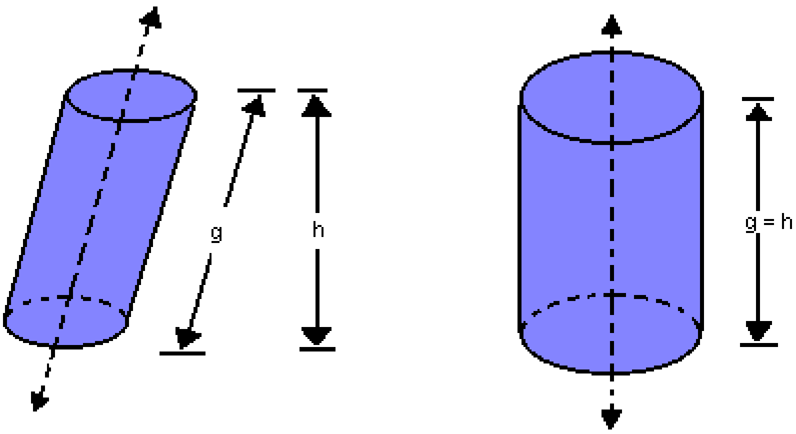
- bases: os círculos de centro **O** e **O'**e raios **r**
- altura: a distância **h** entre os planos α e β
- geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta **r**

Classificação do Cilindro

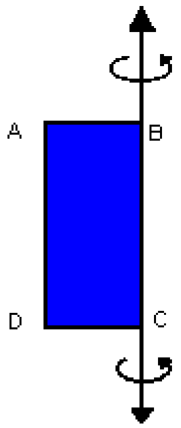
Um cilindro pode ser:

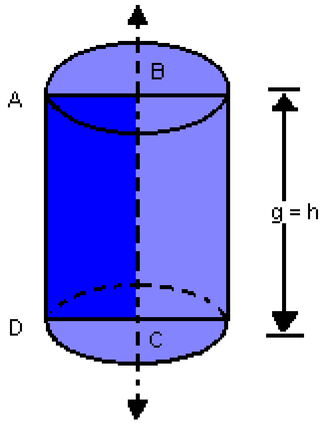
- circular oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases;
- circular reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases.

Veja:



O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, por ser gerado pela rotação completa de um retângulo por um de seus lados. Assim, a rotação do retângulo ABCD pelo lado $\overline{BC}$ gera o cilindro a seguir:

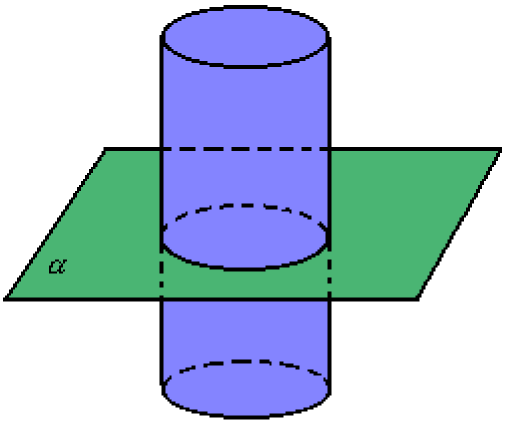




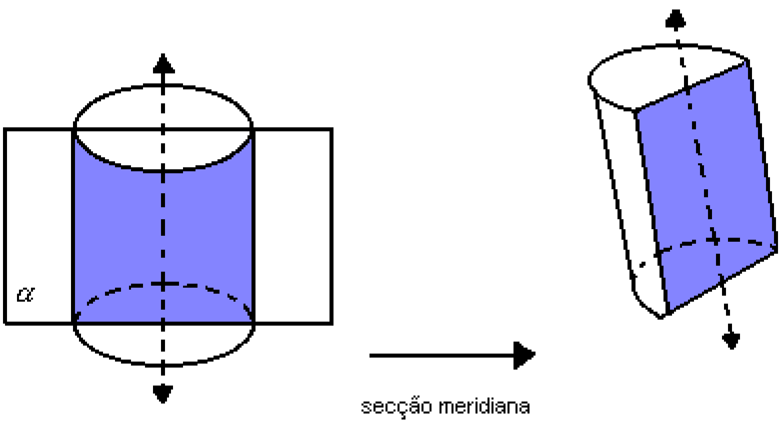
A reta $\overline{BC}$ contém os centros das bases e é o eixo do cilindro.

Secção

Secção transversal é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases. Todas as secções transversais são congruentes.



Secção meridiana é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo.

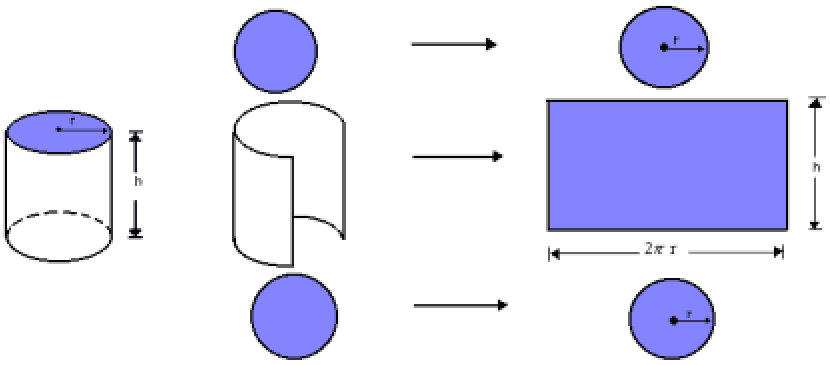


Áreas

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

a) área lateral (**A_L**)

Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é **h** e cujos raios dos círculos das bases são **r** é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h:

$$A_L = 2\pi r h$$

b) área da base (**A_B**):área do círculo de raio **r**

$$A_B = \pi r^2$$

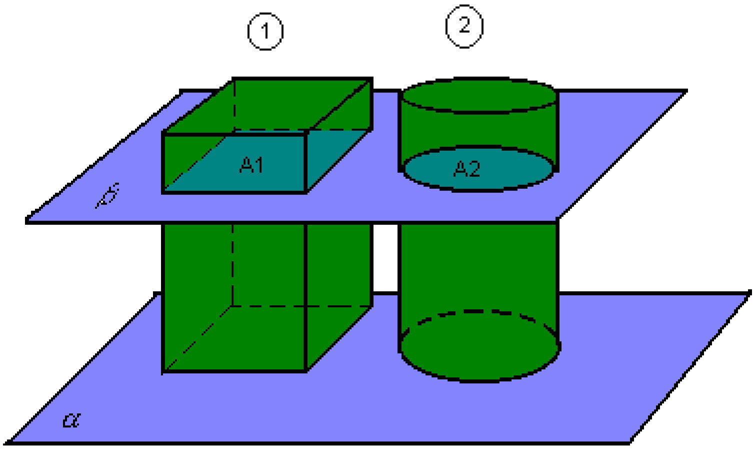
c) área total (**A_T**): soma da área lateral com as áreas das bases

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Volume

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o princípio de Cavalieri.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo ao plano α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



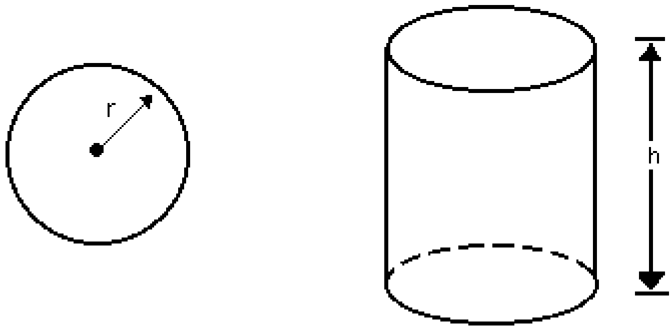
$$\alpha // \beta \text{ e } A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$$\boxed{V_{cilindro} = A_B h}$$

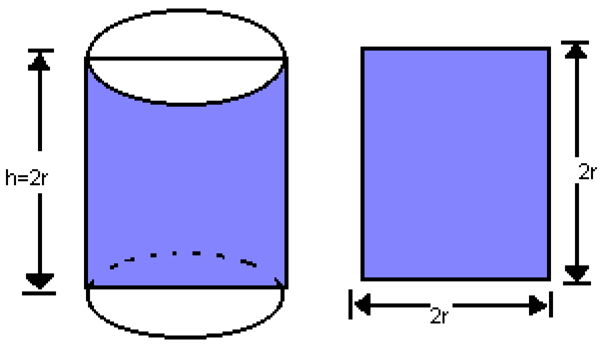
No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio **r** $A_B = \pi r^2$;
portanto seu volume é:



$$V = \pi r^2 h$$

Cilindro eqüilátero

Todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado*cilindroeqüilátero.*



$$A_L = 2r.2\pi r = 4\pi r^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

Atividade 6 – Revisão.

- **Habilidade Relacionada:** Calcular a área e o volume do prisma e do cilindro; H24 e H25.
- **Pré-requisitos:** área e volume do prisma e do cilindro.
- **Tempo de duração:** 100 minutos.
- **Recursos utilizados:** vídeos e folhas de atividades.
- **Organização da turma:** individual.
- **Objetivos:** revisão e fixação através de atividades retiradas de avaliações externas anteriores.
- **Metodologia adotada:** exibição do vídeo sobre o volume de prisma e cilindros (site: WWW.youtube.com/watch?v=xc-afk77atq) e depois farão os exercícios contendo as atividades de avaliações anteriores (saerjinho).
- **Avaliação:** será feita mediante a correção dos exercícios. Veja agora algumas questões do saerjinho:

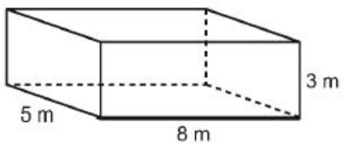
Questão 1

(M120256ES) Um prisma reto retangular, com 3,0 metros de comprimento, 0,6 metro de largura e 2,4 metros de altura, foi construído com madeira de reflorestamento.
Qual é a medida da área total desse prisma?

A) 4,32 m^2
B) 10,44 m^2
C) 14,40 m^2
D) 17,28 m^2
E) 20,88 m^2

Questão 2

(M110146A9) Uma empresa armazenou caixas cúbicas com 1 m de aresta em um galpão com o formato de um bloco retangular, como mostra a figura abaixo.

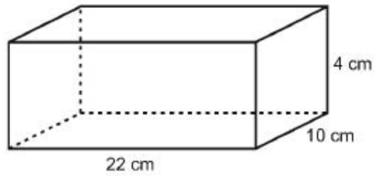


A quantidade máxima dessas caixas que foram armazenadas nesse galpão foi

A) 123
B) 120
C) 78
D) 40
E) 38

Questão 3

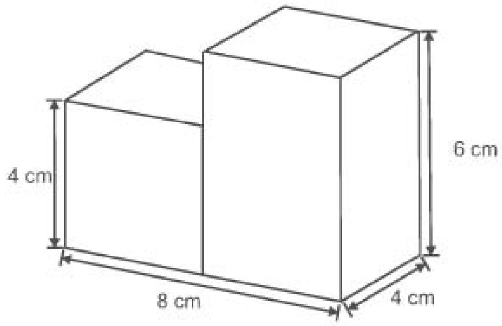
(M110141A9) Um pote de sorvete tem a forma de um paralelepípedo retângulo, como mostra a figura abaixo.



O volume desse pote de sorvete, em centímetros cúbicos, é

A) 36
B) 40
C) 88
D) 140
E) 880

Questão 4 (M100116EX) O desenho abaixo é formado por um cubo e por um paralelepípedo retângulo.



Qual é a medida do volume desse desenho?

A) 22 cm^3
B) 40 cm^3
C) 84 cm^3
D) 144 cm^3
E) 160 cm^3

Questão 5

(M100097ES) Uma empresa comercializa embalagens de suco na forma de um prisma reto, cuja base é um quadrado de lado 6 cm e a altura é 10 cm.
Qual o volume máximo para esta embalagem?

A) 16 cm^3
B) 36 cm^3
C) 60 cm^3
D) 240 cm^3
E) 360 cm^3

Questão 6

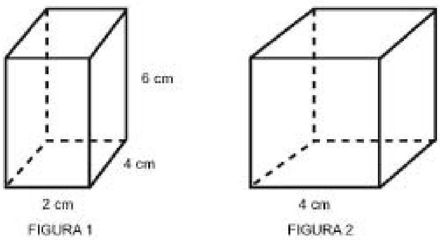
(M100229EX) O marceneiro Roberto recebeu uma encomenda de uma caixa cúbica de madeira, cujo volume tenha medida igual a 64 cm^3.

A medida da aresta dessa caixa de madeira deverá ser

A) 4,0 cm
B) 8,0 cm
C) 10,0 cm
D) 16,0 cm
E) 32,0 cm

Questão 7

(M110021A9) O recipiente representado na figura 1, abaixo, está completamente cheio de água. Toda essa água vai ser despejada no recipiente de forma cúbica com, **4** cm de aresta, indicado na figura 2.



Que altura vai atingir o nível de água no recipiente cúbico?

A) 1,5 cm
B) 2,0 cm
C) 3,0 cm
D) 3,5 cm
E) 4,0 cm

Questão 8

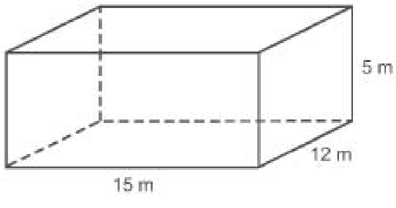
(M090533A9) Joaquim comprou uma caixa d'água, na forma de um paralelepípedo retângulo, que tem 2 m de comprimento, 1m de largura e 1,5 m de altura.

O volume, em m^3, dessa caixa d'água é

A) 1,5
B) 2,0
C) 3,0
D) 4,5

Questão 9

(M100240EX) Em uma pequena cidade, foi construído um reservatório em forma de paralelepípedo retângulo, com dimensões internas indicadas no desenho abaixo.

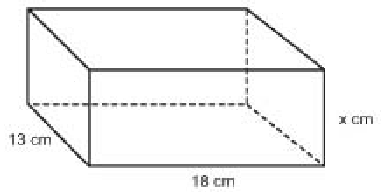


Qual é o volume interno desse reservatório?

A) 135 m^3
B) 180 m^3
C) 450 m^3
D) 550 m^3
E) 900 m^3

Questão 10

(M100053CE) Veja a caixa abaixo.



Qual é a expressão que representa o volume dessa caixa?

A) $(31 + x)$ cm³
B) $31x$ cm³
C) $44x$ cm³
D) $(124 + 4x)$ cm³
E) $234x$ cm³

11 Determinar o volume de um cilindro circular reto cujo raio da base mede 5 m e a altura 3m.

Resolução

$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (5\ m)^2 \cdot 3m = 75\ \pi\ m^3$

12 Calcular a área lateral e a área total do cilindro da questão anterior.

Resolução

1º) Cálculo da área lateral A_l, em metros quadrados:

$A_l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$

2º) Cálculo da área total A_t, em metros quadrados:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R) = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (3 + 5) = 80\pi$

13 Quantos litros d'água aproximadamente pode conter uma lata cilíndrica com 40 cm de diâmetro da base e 50 cm de altura?

Resolução

1º) Cálculo do raio da base R, em decímetros:

$2R = 40$ cm $\rightarrow R = 20$ cm $\rightarrow R = 2$ dm.

2º) Cálculo da altura h, em decímetros:

$h = 50$ cm $\rightarrow h = 5$ dm

3º) Cálculo do volume V, em decímetros cúbicos:

$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \cong 62{,}8$

Fonte: http://mathobjetiva.blogspot.com.br/2011/12/cilindros_05.html

Questão	Resposta
1	E
2	B
3	E
4	E
5	E
6	A
7	C
8	C
9	E
10	E

Avaliação

O professor deverá acompanhar o desenvolvimento das atividades em sala de aula através de observação e registros, verificando o interesse pelo assunto e se são capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas. Observar também seu desempenho nas atividades propostas, bem como sua participação na aula.

As questões do saerjinho, citadas na atividade 6, deverá ser pontuada pelo professor a fim de determinar suas próximas ações.

Também deverá ser feita uma avaliação escrita individual para verificação da capacidade do uso dos conhecimentos adquiridos para resolver situações-problemas.

Bibliografia

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. & ALMEIDA, N. *Matemática: Ciência e Aplicações.* São Paulo: Saraiva, 2010. (volume 1 – 6ª edição).

Matriz de Referência de Matemática – Saerjinho 2012 – 2º ano do Ensino Médio.

Endereços Eletrônicos:

Área das principais figuras planas (Vídeo Aula)http://www.mundovestibular.com.br/articles/9460/1/Area-das-principais-figuras-planas-Video-Aula/Paacutegina1.html Acessado em 21 maio 2013.

Exercícios de Cilindros Resolvidos http://mathobjetiva.blogspot.com.br/2011/12/cilindros_05.html Acessado em 22 maio 2013.

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS –Prismas e Cilindros –Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 2º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava. Acessado em 21 maio 2013.

Só Matemática

http://www.somatematica.com.br/emedio/cilindroAcessado em 20 maio 2013.

Só Matemática

http://www.somatematica.com.br/emedio/prismaAcessado em 20 maio 2013

Volume de prisma e cilindros vídeo WWW.youtube.com/watch?v=xc-afk77atq Acessado em 20 maio 2013.