SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

FORMAÇÃO CONTINUADA

MATEMÁTICA – 2ª SÉRIE – 2º BIMESTRE – 2013

CAMPO CONCEITUAL 2:
Geometria Espacial
Prismas e Cilindros

PLANO DE TRABALHO 2

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

GRUPO 2

JOSÉ CARLOS FERREIRA DA SILVA

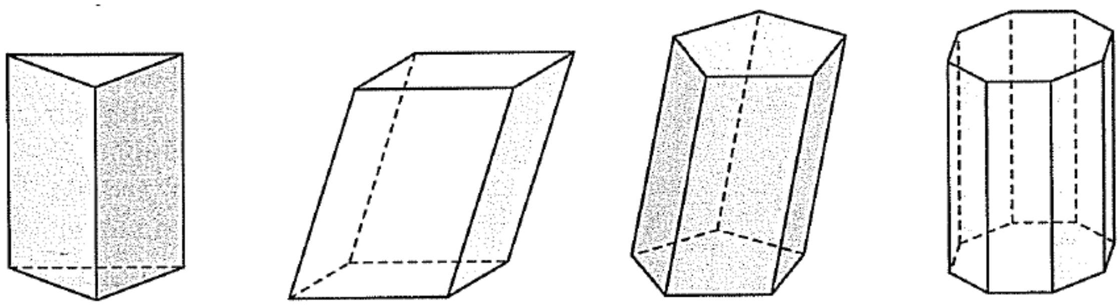
2013

1 – Introdução

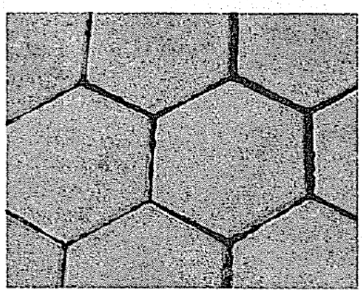
Já estudamos os poliedros nas suas variadas formas, elementos, seus nomes, a relação de Euler e suas planificações.

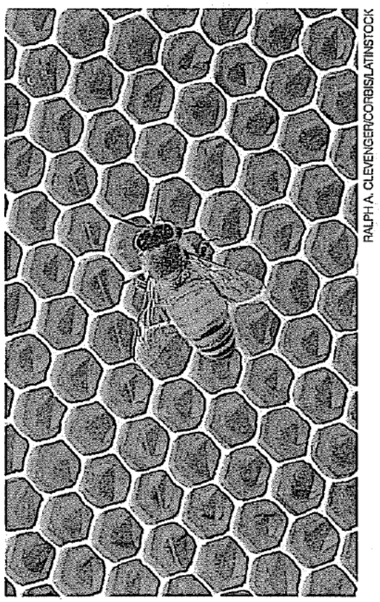
Vários objetos do espaço em que vivemos têm a forma de poliedros, e entre eles muitos são de um tipo especial: os prismas.

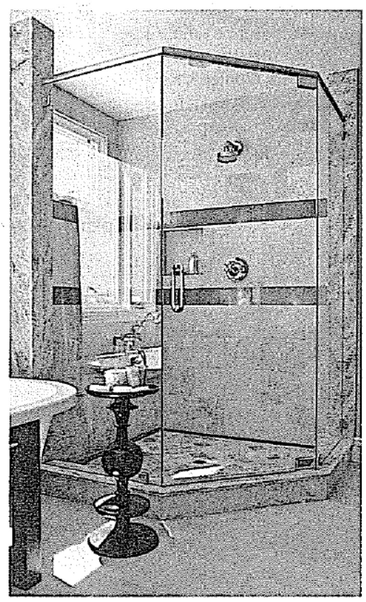
Pela sua facilidade de construção, sua forma é utilizada nos mais variados tipos de embalagens, reservatórios, silos, edificações emuitos outros são exemplos da presença dos prismas no dia a dia. Veja alguns formatos de prismas.



Agora. veja algumas situações que nos lembram os prismas.

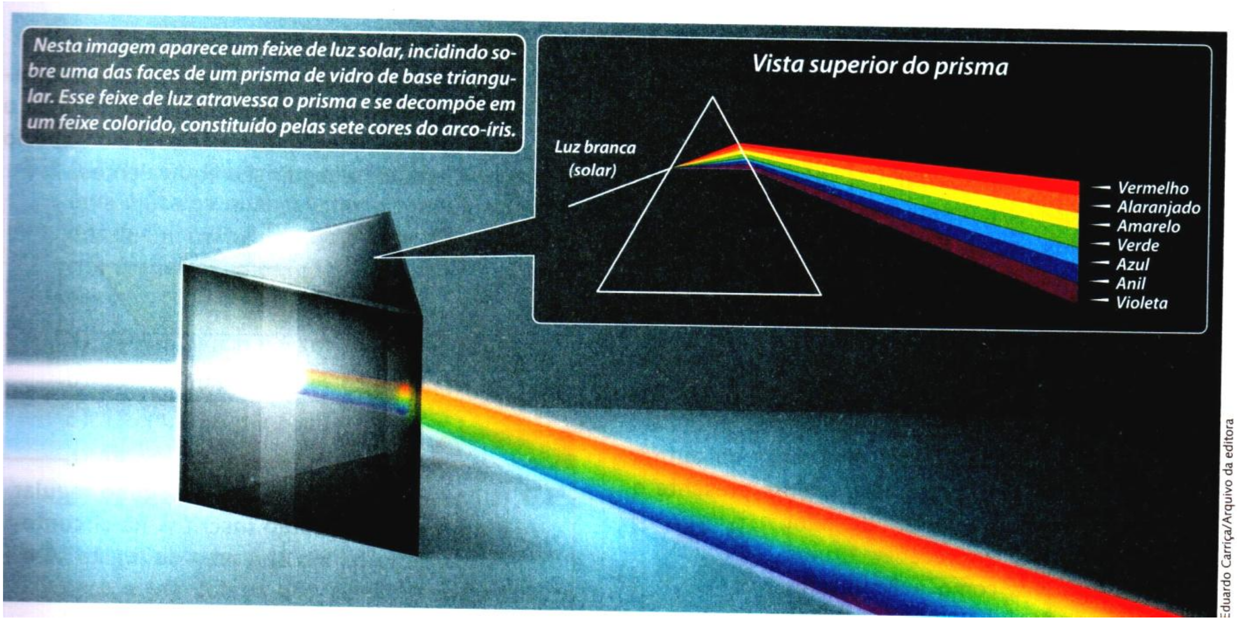






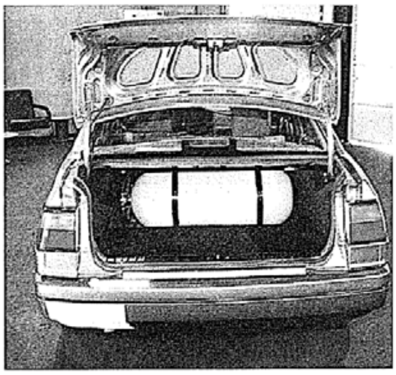
Isaac Newton (1642-1727), por exemplo, físico, matemático e astrônomo inglês,realizou diversos estudos importantes ligados à Matemática e à Física, entre os quais, podemos destacar os estudos relacionados à luz e às cores, nos quais ele utilizou um prisma de vidro de base triangular, como mostra a figura abaixo:

.



Também já vimos que os sólidos compreendem grandes grupos como os poliedros e os corpos redondos. Entre estes últimos, distinguimos o cilindro, o cone, a esfera e os corpos obtidos a partir deles. A terra, por exemplo, tem forma arredondada, lembrando a de uma esfera ligeiramente achatada nos polos. O primeiro corpo redondo que estudaremos é o cilindro.

Existem vários objetos do cotidiano que têm forma cilíndrica. Nas embalagens de produtos, por exemplo, podemos perceber a grande utilização dessa forma, seja por motivos de armazenamento, transporte ou até mesmo como atrativo para os consumidores. Além disso, as formas cilíndricas são bastante utilizadascomo compartimento para o armazenamento de grãos, gases, líquidos etc. veja alguns exemplos:



Atividade 1

Prismas e cilindros no nosso dia a dia

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Prismas e Cilindros

OBJETIVOS: Manipular ereconhecerprismas e cilindros.

PRÉ-REQUISITOS: Figuras geométricas planas

MATERIAL NECESSÁRIO:Folha de atividades, tesoura, cola e embalagens do nosso dia a dia, tais como: caixinhas de remédio, de sabão em pó ou de sapato, rolos de papel, lata de achocolatado, estojo porta-lápis, cartolina, dicionário ou livros volumosos, etc.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em grupos de 4 alunos de forma a propiciar um trabalho organizado e colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

- ✓ H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas por meio de suas principais características.

Vamos desenvolver a seguinte atividade.

Conforme o combinado em aulas anteriores, vocês, os alunos, trouxeram algumas embalagens que lembram prismas e cilindros e que possam, de preferência, ser planificados facilmente, como algumas mostradas abaixo.





Para que os trabalhos sejam desenvolvidos vamos promover as seguintes ações:

I- Formar grupos com 4 alunos cada.

II- Promover, se necessário, uma redistribuição das embalagens entre os grupos de modo que cada grupo esteja de posse de pelo menos de 2 embalagens cilíndricas e 2 em forma de prisma.

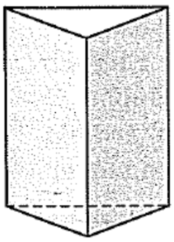
III- Cada grupo escolha um representante e um narrador para cada etapa da atividade.

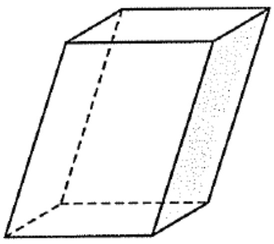
IV-Que todos os alunos observem cada embalagem e conversem entre si sobre as embalagens.

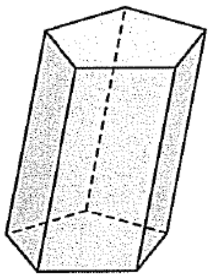
Primeira parte

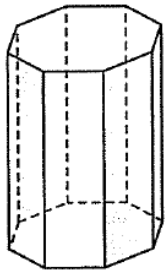
1- Descrever as semelhanças de cada sólido, separando-os em dois grupos:
   a) Os que possuem todas as partes planas;
   b) Os que são arredondados.
2- Ler com atenção e discutir entre si as características de cada uma das ilustrações a seguir:

.

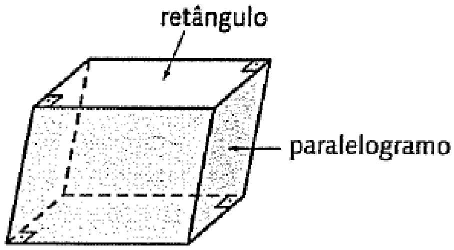

prisma triangular


prisma quadrangular

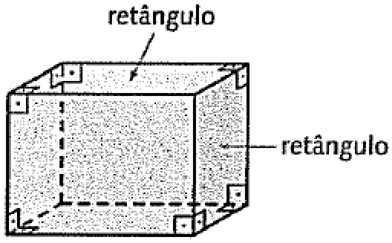

prisma pentagonal


prisma octogonal

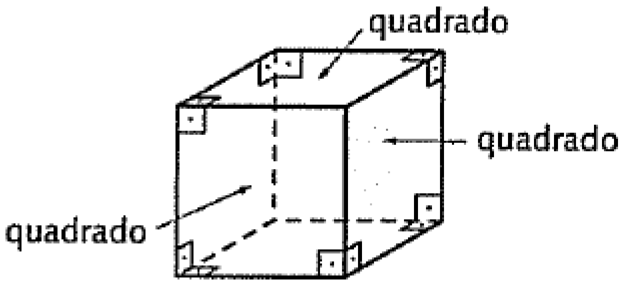
- **Paralelepípedo retângulo**: as bases são retângulos.



- **Paralelepípedo reto retângulo** ou **bloco retangular**: as bases e as faces laterais são retângulos.



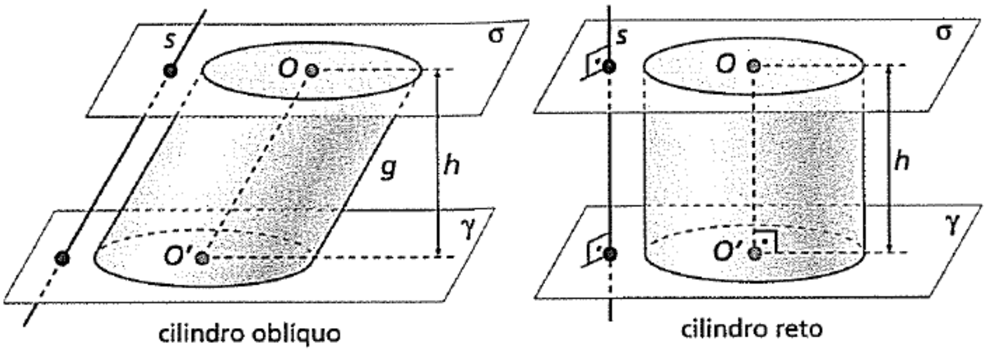
Se um paralelepípedo reto retângulo tem todas as faces quadradas, recebe o nome de cubo.



Conceitos

"Um prisma é um poliedro convexo que possui duas faces paralelas, formadas por polígonos convexos congruentes (iguais) – chamados de bases – e cujas faces restantes chamadas faces laterais, são compostas por retângulos (no caso do prisma ser reto) ou paralelogramos (nos prismas oblíquos)."

"A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte "curva" que é a superfície lateral".



3- Rever os objetos de cada grupo e, de acordo com as definições anteriores, coloque cada folha junto de cada grupo de objetos.

4- Descrever algumas características comuns aos prismas e aos cilindros.

Espera-se que sejam destacadas:

a) Tanto os prismas quanto os cilindros têm duas bases contidas em dois planos paralelos e distintos;
b) Que as bases são congruentes;
c) Que o número de faces laterais dos prismas é igual ao numero de lados dos polígonos das bases.
d) Que as faces laterais são retângulos nos prismas retos e paralelogramos nos prismas oblíquos;
e) Que o número total de faces nos prismas é igual ao número de lados do polígono das bases mais dois.
f) Que as bases dos cilindros são círculos contidos em planos paralelos.
g) Que destaque os sólidos que não se enquadram nos grupos dos cilindros e prismas, excluindo-os dos grupos.

5- Com o auxílio de uma tesoura cortem estrategicamente, sob orientação, os prismas e cilindros planificando-os, descreva e quantifique as figuras planas obtidas caso fossem destacadas.

6- Remonte os sólidos geométricos, classifique-os e nomeio-os de acordo com os exemplos abaixo.

. Prisma triangular (Possui base triangular.)

. Prisma retangular ou quadrangular (tem como base um retângulo, dentre eles um quadrado)

. Paralelepípedo reto retângulo (Todas as faces são retângulos.)

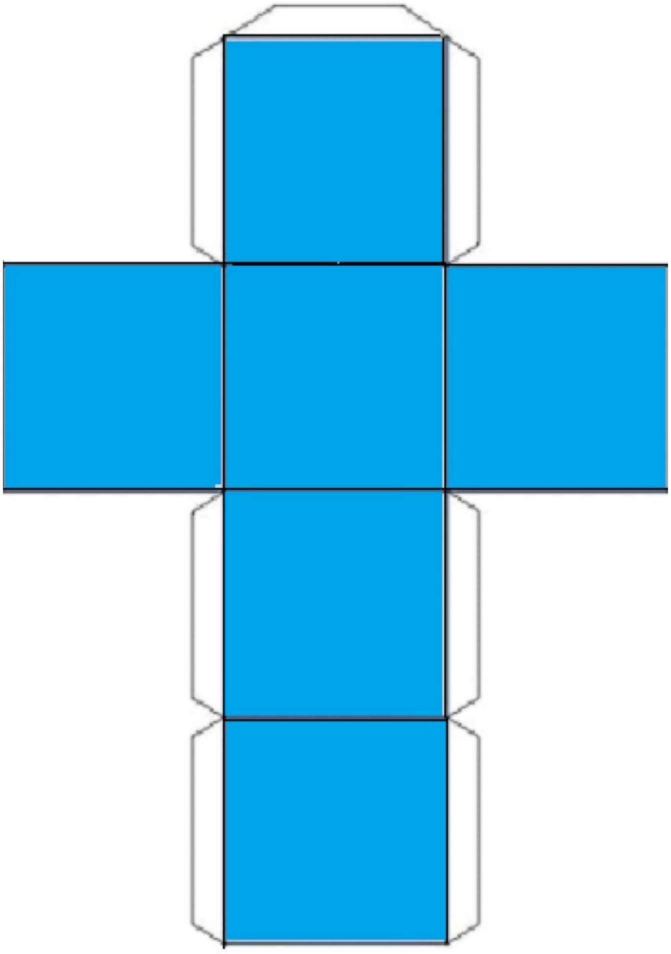
. Prisma hexagonal (Possui um hexágono na base.)

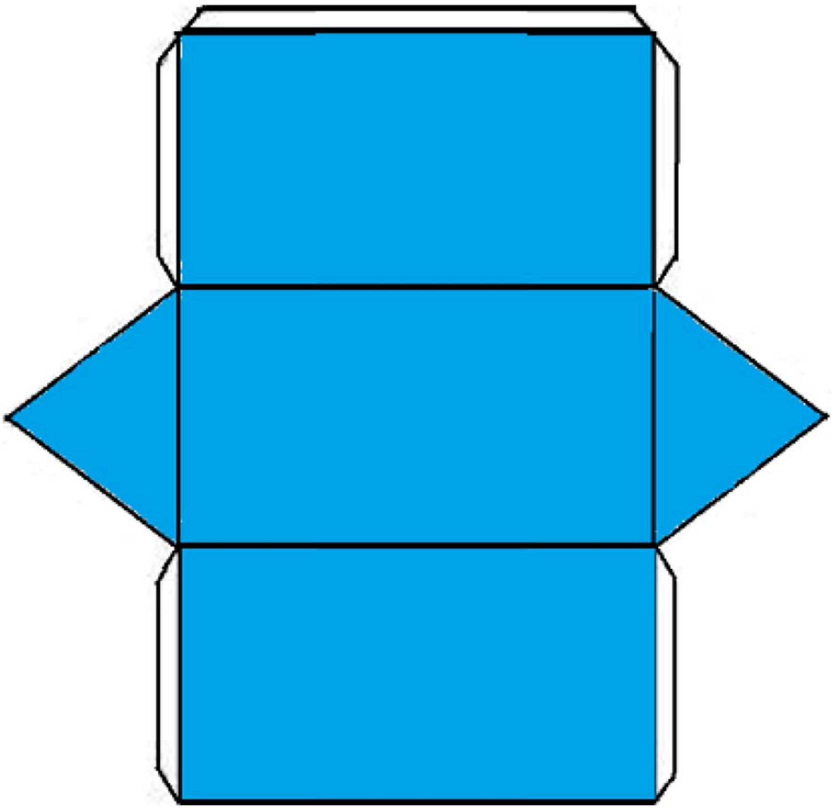
. Cilindro circular (A base é um círculo)

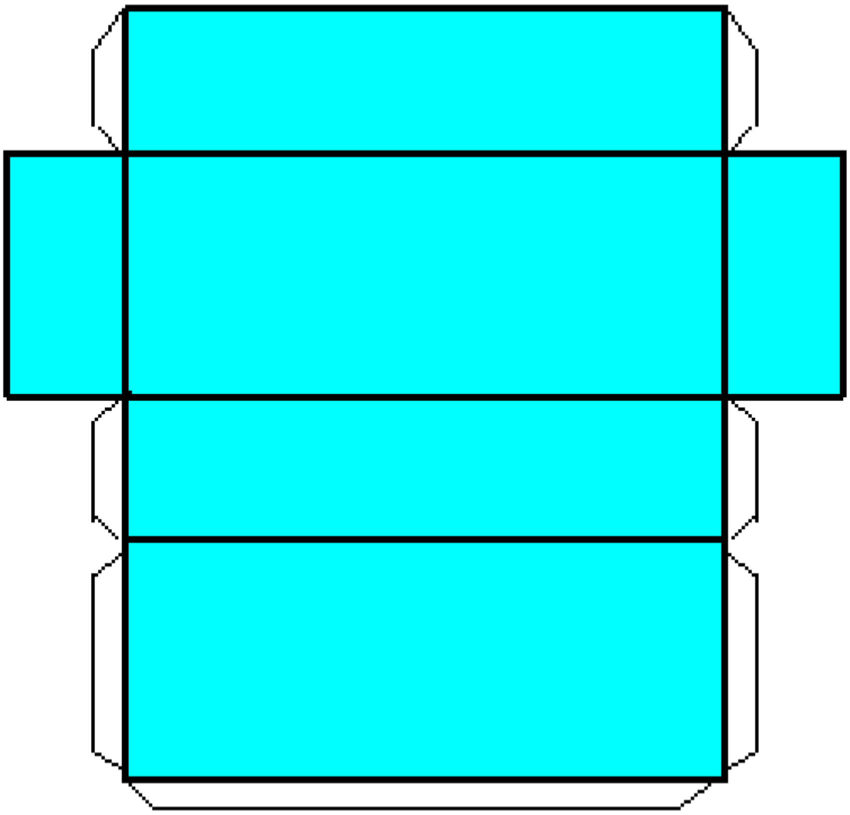
. Cubo (Todas as faces são quadradas)

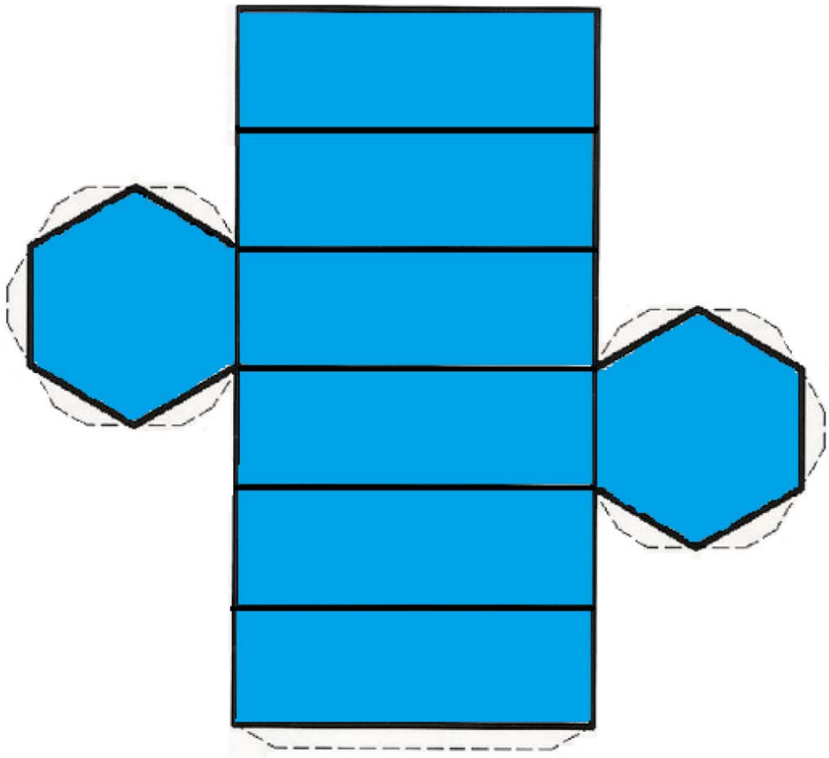
Segunda parte

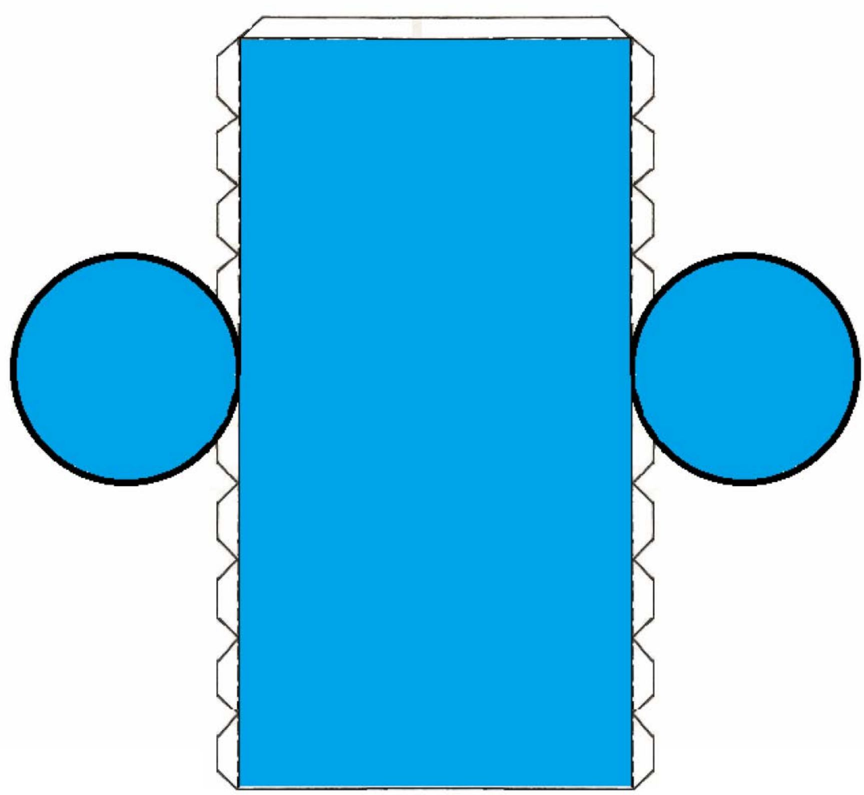
Agora que vocês já sabem o que é um prisma e um cilindro a partir das suas planificações, utilizando tesoura e cola, monte os sólidos abaixo planificados dando-lhes nomes.











Atividade 2

Estudando os prismas

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Prismas

OBJETIVOS: Reconhecer e nomear prismas

PRÉ-REQUISITOS: Ponto, reta, plano e vistas e geometria plana

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

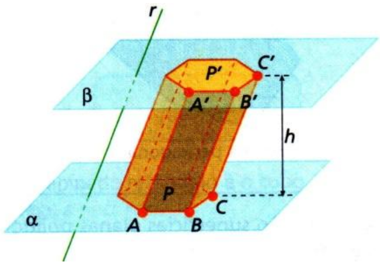
3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

- ✓ H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas por meio de suas principais características.

Acompanhe o desenvolvimento abaixo.

Veja outra definição de prisma: consideremos dois planos paralelos, α e β, uma região poligonal P contida em α e uma reta r que intercepta os planos α e β.



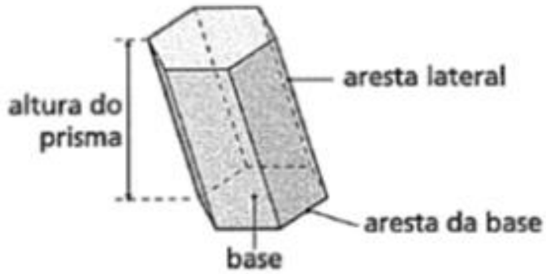
Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a *r* tais que uma de suas extremidades é um ponto da região *P* e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta r é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é reto; caso contrário, ele é oblíquo.

Elementos de um prisma

Considerando o poliedro acima temos:

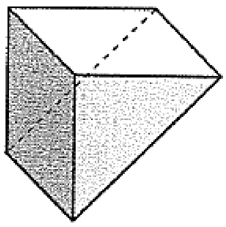
- **Bases:** as regiões poligonais *P* e *P'*, que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais:** as regiões poligonais *AA'BB'*, *BB'CC'*, etc.
- **Arestas das bases:** os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, etc.
- **Aretas laterais:** os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, etc.
- **Altura do prisma:** a distância *h* entre os planos das bases (α e β).



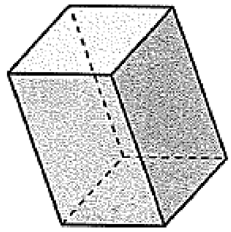
Classificação dos prismas

Os prismas podem ser classificados segundo alguns critérios. Um deles é o que você já conhece – a inclinação da reta r em relação aos planos α e β que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismasem relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases, mas nos oblíquos não.

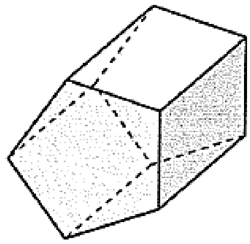
Outro critério que permite classificar os prismas, já vista na atividade anterior, é o que leva em conta o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é denominado prisma triangular; se é um quadrilátero, temos um prisma quadrangular; se é um pentágono, temos o prisma pentagonal, e assim por diante. Veja alguns exemplos.



prisma triangular

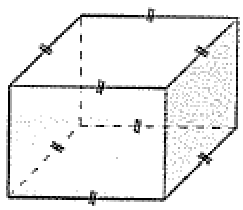


prisma quadrangular

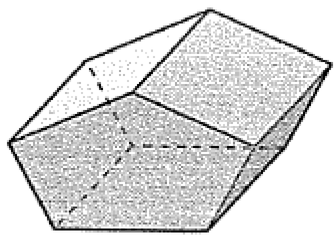


prisma pentagonal

> Um prisma reto cujas bases são superfícies planas poligonais regulares é denominado **prisma regular**.



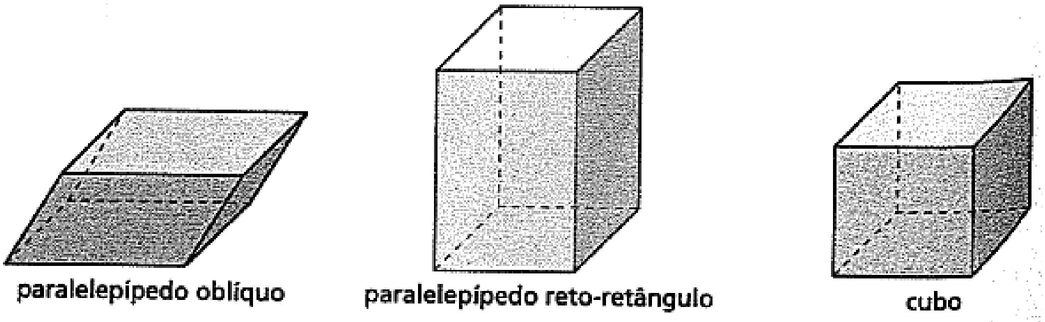
Este prisma é regular, pois as bases são quadradas.



Este prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases paralelogrâmicas (lados paralelos dois a dois) são chamados de paralelepípedos, que, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.

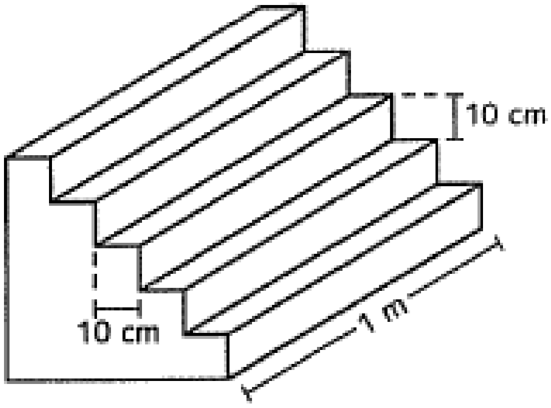
Caso um paralelepípedo reto tenha bases retangulares, ele recebe o nome de paralelepípedo reto retângulo ou boco retangular, e denomina-se cubo quanto tem todas as faces congruentes.



Vamos resolver o seguinte problema:

Uma escada de 1 m de largura e degraus de $10\ cm$ de altura e $10\ cm$ de patamar será construída com 780 blocos. Os blocos são cubos com $10\ cm$ de largura. Determine onúmero de degraus dessa escada.

Resolução



De acordo com as informações, a quantidade de blocos para a construção dos degraus segue uma PA, em que:

$PA(10, 20, 30, \ldots a_n)$

$r = a_2 - a_1 = 20 - 10 = 10$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \Rightarrow 780 = \frac{[10 + 10 + (n-1)\cdot 10]\cdot n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \begin{cases} n_1 = 12 \\ n_2 = -13 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto a escada terá 12 degraus.

2 – Área da superfície de um prisma

Atividade 3

Estudando as áreas dos prismas

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Prismas

OBJETIVOS: Calcular as áreas lateral e total de um prisma.

PRÉ-REQUISITOS: Áreas das figurasplanas

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

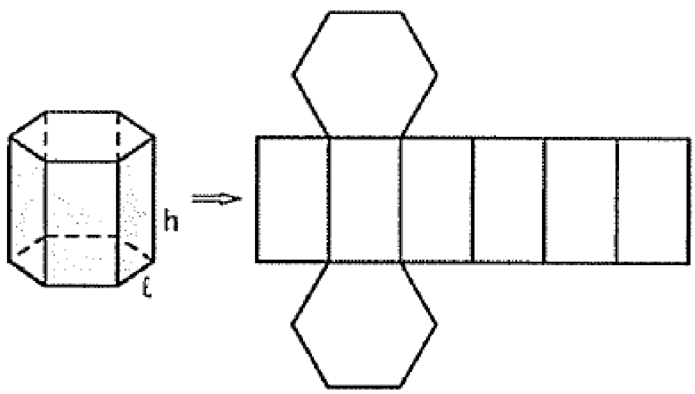
1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).



Na imagem acima estão representados um prisma regular de base hexagonal e sua planificação.

A superfície lateral de um prisma é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada área lateral do prisma (A_l).

No caso do prisma apresentado, a área lateral é 6 vezes a área de uma face (retângulo), isto é:

$$A_\ell = 6 \cdot \underbrace{(h \cdot \ell)}_{\text{área de uma face}} = 6h\ell$$

A área da base corresponde à área do polígono que constitui sua base(A_b).

No caso do prisma apresentado, a área da base é a área do hexágono regular, isto é, 6 triângulos equiláteros:

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

A superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada área total do prisma (A_t).

Ou seja, a área total de um prisma é a área lateral mais duas vezes a da base, isto é: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

No caso do prisma apresentado:

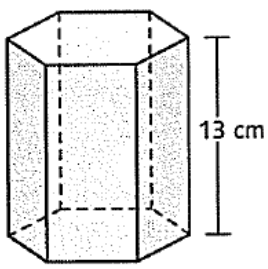
$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{6h\ell} + 2\underbrace{A_b}_{\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}} = 6h\ell + 2 \cdot \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} = 6h\ell + 3\ell^2\sqrt{3}$$

Seja resolver o seguinte problema:

A área da base de uma embalagem em foram deprisma hexagonal regular é $54\sqrt{3}cm^2$ e sua altura é 13 cm. Calcule a área lateral dessa embalagem.

Resolução

Suponhamos uma imagem da embalagem descrita:



Para calcular a área lateral, precisamos saber a área de uma face lateral. Por isso, calculamos inicialmente a medida da aresta da base da embalagem, que corresponde a um lado do hexágono que compõe a base. Como vimos acima, a área desse hexágono é dada por $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$54\sqrt{3} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 108\sqrt{3} = 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = \frac{108\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 36 \Rightarrow \ell = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Calculando a área de uma face lateral:

$$A_{face} = 6 \cdot 13 = 78 \text{ cm}^2$$

Como a área lateral da embalagem é dada pela soma das áreas das 6 faces retangulares laterais, multiplicamos a área da face por 6.

$$A_\ell = 6 \cdot A_{face} = 6 \cdot 78 = 468 \text{ cm}^2$$

Então, a área lateral dessa embalagem é 438 cm².

3 – Volume de um prisma

Atividade 4

Estudando volume dos prismas

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Prismas

OBJETIVOS: Calcular o volume de um prisma.

PRÉ-REQUISITOS: Áreas das figurasplanas

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

H25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.

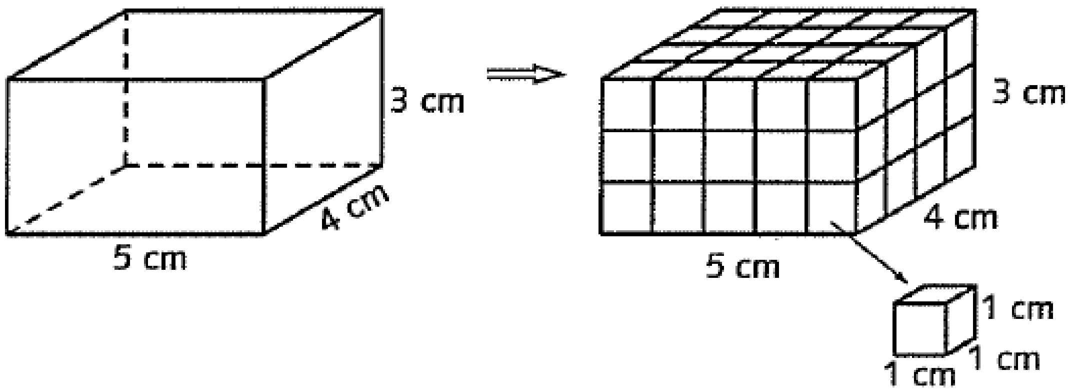
A metrologia é a ciência que trata das medições. O ato de medir é uma atividade mais corriqueira do que parece. Ao medir a nossa massa em uma balança de farmácia, por exemplo, estamos observando no mostrador o resultado de uma medição de massa.

Se imaginarmos uma lata de azeite em forma de paralelepípedo, podemos medir a sua altura, comprimento, quanto ela "pesa" e, ainda, medir o espaço ocupado por ela.

Quando é necessário medir o espaço ocupado por um corpo, estamos querendo saber o seu volume. Situações envolvendo medidas de volume estão presentes em diversas situações do nosso dia a dia.

Como ponto de partida, vamos calcular o volume do paralelepípedo reto retângulo.

O paralelepípedo reto retângulo representado a seguir foi decomposto em cubos com 1 cm³ de volume.



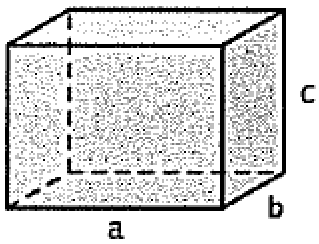
Para calcular a quantidade de cubos em que esse paralelepípedo foi decomposto, efetuamos o seguinte cálculo:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Esse paralelepípedo foi decomposto em 60 cubos com 1 cm³. Portanto, o volume desse paralelepípedo é 60 cm³.

Podemos obter esse resultado multiplicando as dimensões desse paralelepípedo, isto é:

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^3$$



De modo geral:

Para calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo, basta multiplicar as medidas de suas dimensões:

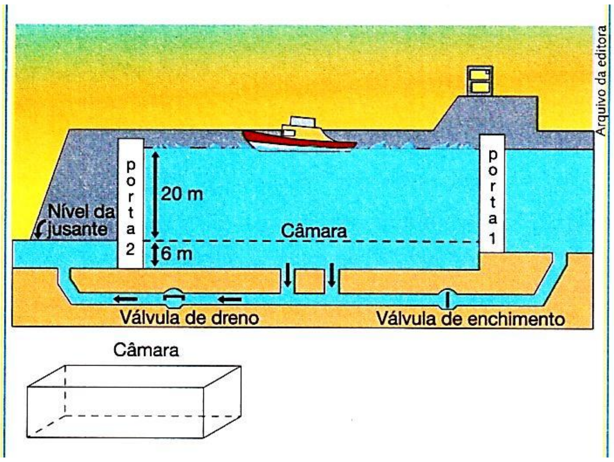
$$V = a \cdot b \cdot c$$

O volume de um cubo pode ser calculado de maneira semelhante. Como as dimensões do cubo são iguais, temos:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

Como aplicação, vamos resolver um problema que compôs uma das provas do ENEM:

Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.



Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m³ por minuto.

Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutosb) 5 minutos c) 11 minutos d) 16 minutos e) 21 minutos.

Resolução

$$V = 200 \cdot 20 \cdot 17 = 68000 \text{ m}^3$$

$$\frac{68000}{4200} \cong 16{,}19$$

Portanto, uma embarcação leva certa de 16 minutos.

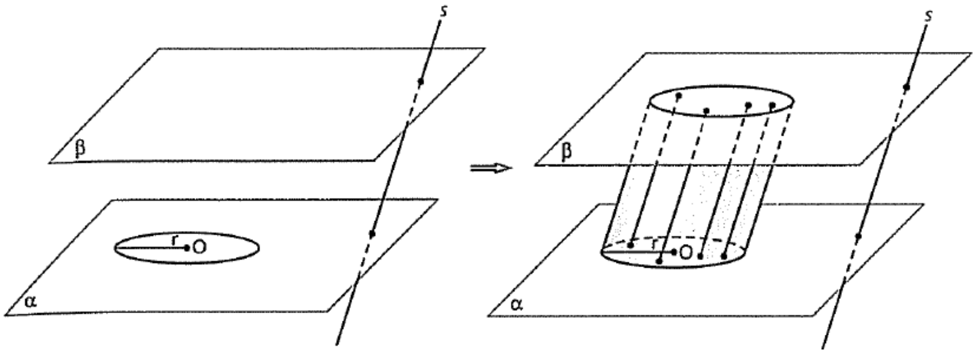
4 – Área da superfície de um cilindro

Introdução

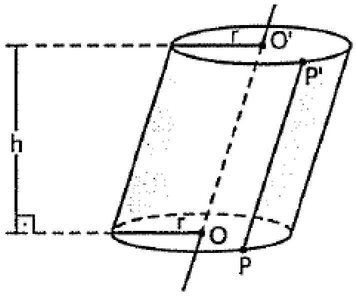
Como vimos anteriormente, existem vários objetos do cotidiano que têm forma cilíndrica. Nas embalagens de produtos, em silos de grãos, depósitos e transporte de combustíveis, gases, de líquidos em geral, como nos caminhões pipa, nas regiões em que a população sofre com a seca, etc.

Veja como podemos definir matematicamente o cilindro.

Considere dois planos paralelos α e β, uma reta s concorrente a esses planos e um círculo de centro O e raio r contido em α. Denomina-se cilindro circular ou simplesmente cilindro a reunião de todos os segmentos de reta congruentes entre si e paralelos a s com uma extremidade no círculo dado e a outra no plano β, conforme afigura abaixo.



Elementos do cilindro



Em um cilindro podemos destacar alguns elementos.

No cilindro ao lado, temos:

. **Bases**: são os círculos paralelos de centros O e O’ e raio r

. **Altura**: é a distância entre os planos que contêm as bases. Na figura, h representa a altura do cilindro.

. **Eixo**: é a reta que contém os centros dos círculos das bases. Nesse caso, é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$

. **Geratriz**: é cada segmento de reta paralelo ao eixo com extremidades nos pontos da circunferência das bases, por exemplo, $\overline{PP'}$

. **Superfície lateral**: é a reunião de todas as geratrizes do cilindro

Atividade 5

Estudando a área da superfície do cilindro reto

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Cilindro

OBJETIVOS: Calcular as áreas lateral e total de um cilindro.

PRÉ-REQUISITOS: Áreas das figuras planas

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

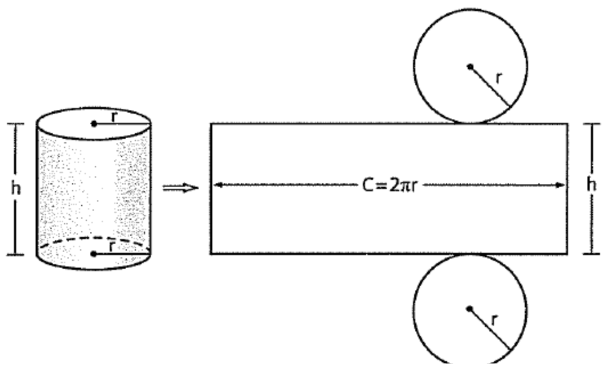
3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

H24 – Resolver problemas envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Conceito

Na imagem estão representado um cilindro reto e sua planificação.



A área da base deum cilindro é a área do círculo que constitui sua base A_b.

$$A_b = \pi r^2$$

Como vimos, a superfície lateral de um cilindro reto é a reunião de todas as suas geratrizes. Planificada, essa superfície corresponde a um retângulo de dimensões $2\pi r$, referente ao comprimento da circunferência da base, e h, que é a altura do cilindro. A área dessa superfície é chamada de área lateral do cilindro (A_l).

$$A_\ell = 2\pi r \cdot h$$

A superfície total de um cilindro é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada área total do cilindro (A_t).

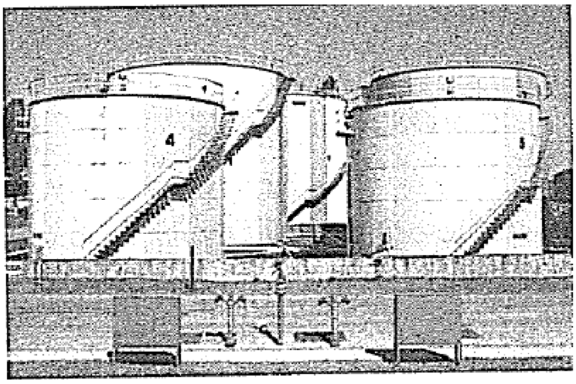
$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Essa fórmula também pode ser escrita da seguinte maneira;

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{2\pi r \cdot h} + 2 \cdot \underbrace{A_b}_{\pi r^2} = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h+r)$$

Como aplicação, propomos a seguinte situação:

Um reservatório de combustível de uma refinaria tem o formato de um cilindro reto de altura 10 m e diâmetro 11 m. Quantos litros de tinta são necessários para pintar toda a parte externa desse reservatório, sabendo que com cada litro é possível pintar 8 m²?



Áreada superfície externa:

$$A_t = A_\ell + 2A_b = 2\pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right) \cdot 10 + 2\pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 170{,}5 \cdot 3{,}14 = 535{,}37 \text{ m}^2$$

Segue que:

$$\frac{535{,}37}{8} \approx 67$$

Portanto, são necessários aproximadamente 67 litros de tinta.

5– Volume do cilindro

Atividade 6

Estudando volume dos cilindros

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Cilindros

OBJETIVOS: Calcular o volume do cilindro.

PRÉ-REQUISITOS: Áreas das figuras planas

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

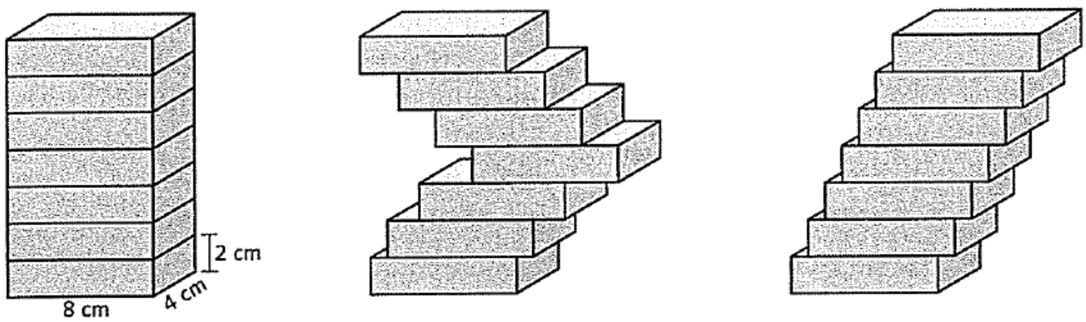
3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

H25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.

Princípio de Cavalieri

Observe abaixo a representação de três pilhas com 7 caixas em forma de paralelepípedo reto retângulo, sendo que todas as caixas têm dimensões iguais.

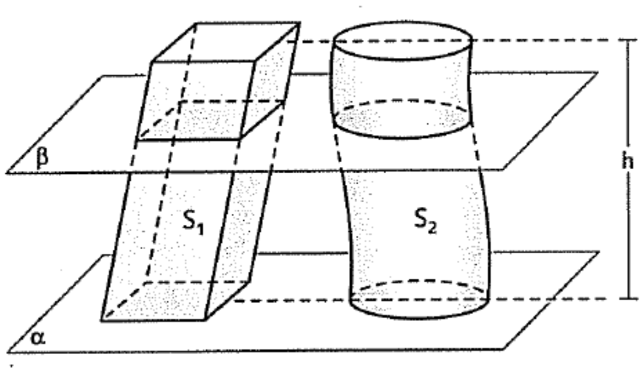


Qualquer que seja a maneira de empilhar essas caixas, o volume de cada pilha será o mesmo. Nesse caso:

- $V_{caixa} = a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64\ cm^3$
- $V_{pilha} = 7 \cdot V_{caixa} = 7 \cdot 64 = 448\ cm^3$

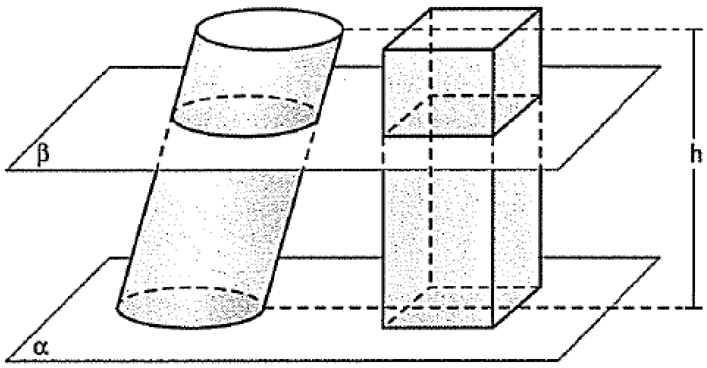
Com essa situação, ilustramos um princípio, chamado princípio de Cavalieri, que diz:

Sejam dois sólidos S_1 e S_2 de mesma altura h, apoiados em um mesmo plano horizontal α. Se todo plano paralelo a α cortar um dos sólidos e cortar também o outro, determinando duas regiões planas de mesma área, então esses sólidos têm volumes iguais.



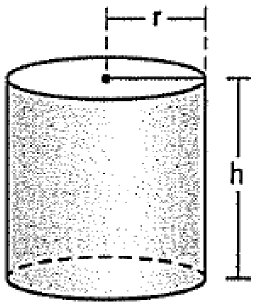
Cada região plana determinada pela interseção de um plano paralelo a α é denominado seção transversal.

Consideremos um cilindro qualquer e um paralelepípedo, ambos de altura h, apoiados em um plano horizontal α de modo que suas bases tenham áreas iguais. Um plano β qualquer, paralelo a α, corta os dois sólidos determinando regiões planas de áreas iguais.



. Com base no princípio de Cavalieri, o que podemos observar acerca dos dois sólidos?
. Que expressão podemos escrever para representar o volume do cilindro?

. Visto que a base do cilindro é um círculo de raio r e área igual a πr^2, qual expressão permite calcular o volume do cilindro?



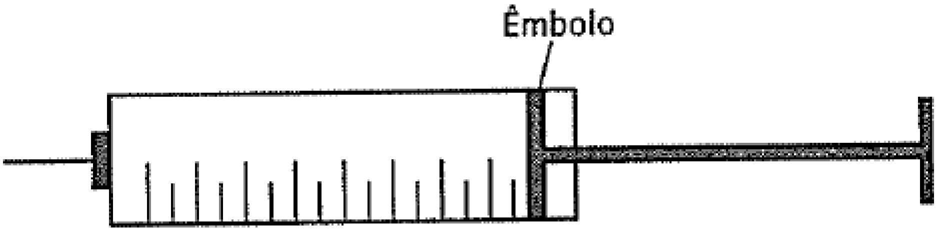
De modo geral:

Podemos calcular o volume de um cilindro multiplicando a área da base pela medida de sua altura:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h$$

Como aplicação seja resolver a seguinte situação problema:

A figura, a seguir, representa uma seringa no formato de um cilindro circular reto, cujo êmbolo tem 20 mm de diâmetro. Esta seringa esta completamente cheia de um medicamento e é usada para injetar doses de 6 ml desse medicamento. Com base nessas informações, determine quantos milímetros o êmbolo se desloca no interior da seringa ao ser injetada uma dose.



Resolução

Tendo em vista que $6\ mL = 6000\ m^3$, temos

$$V=6000 \Rightarrow \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot h=6000 \Rightarrow h=\frac{60}{\pi} \Rightarrow h \approx 19{,}1 \text{ mm}$$

Portanto, o êmbolo se desloca no interior da seringa 19,1 mm aproximadamente.

6– Volume do tronco de um cilindro com uma base circular

Atividade 7

Estudando volume dos troncos de cilindros

DURAÇÃO PREVISTA: 50 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Geometria espacial – Cilindros

OBJETIVOS: Calcular o volume de um tronco de cilindro.

PRÉ-REQUISITOS: Áreas das figuras planas

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE:

1ª ETAPA: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

2ª ETAPA: testando conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa, representando parte do conceito final do bimestre.

3ª ETAPA: Turma disposta em dupla novamente, onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não solucionaram o problema.

DESCRITORES ASSOCIADOS:

H25 – Resolver problemas envolvendo noções de volume.

Conceito

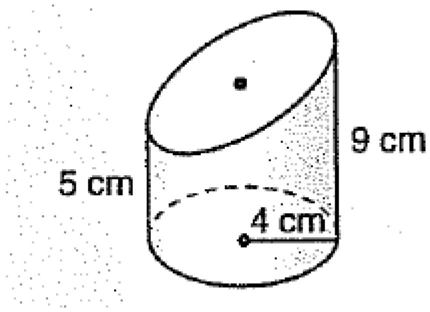
Um plano α que intercepta obliquamente todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos chamados de troncos de cilindro com uma base circular (a outra base de cada tronco é elíptica). Em cada um desses troncos, o menor segmento perpendicular à base circular e com extremos nos contornos das bases é a geratriz menor do tronco, e o maior segmento nessas condições é a geratriz maior do tronco.

Seja a seguinte situação problema:

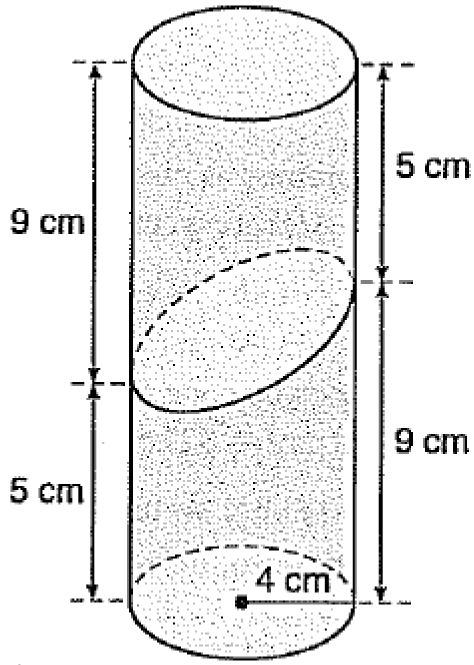
De acordo com a definição acima, calcule o volume de um tronco de cilindro com uma base circular de raio 4 cm, geratriz menor de 5 cm e geratriz maior de 9 cm.

Resolução

Façamos uma figura que traduza o problema descrito:



Imaginemos outro tronco congruente a esse e coloquemos um sobre o outro, fazendo coincidir as bases não circulares, de modo a formar um cilindro:



Temos, portanto,que o volume V_T do tronco é metade do volume desse cilindro:

$$V_T = \left(\frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 14}{2}\right) cm^3 = 112\pi \ cm^3$$

Logo, o volume procurado é $112\ \pi\ cm^3$.

6 – Avaliação

Será contínua, pois entendo que deva ser assim.

I - Avaliações com exercícios avaliativos em aula

Constará de avaliação em aula para cada tópico, conforme descrito na organização da classe, ou seja:

1ª etapa: testando o seu conhecimento. Turma disposta individualmente na solução de um problema proposto com finalidade avaliativa.

2ª etapa: Turma disposta em dupla onde os alunos que solucionaram o problema assumem a condição de monitores, dando assistência àqueles que não conseguiram solucionar o problema.

No final do 3º bimestre todos os exercícios avaliativos dados em aula representarão 30% da nota total do bimestre.

II - Uma avaliação em forma de prova, representando 30 % da nota do bimestre.

III - Prova do Saerjinho

Essa avaliação comporá os 40% restante da nota do bimestre.

Referências bibliográficas:

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2010, v.2.

BIANCHINI E. &PaccolaH.*Matemática.* São Paulo: Moderna, 2004, v. 2.

DANTE, L. R.*Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 2011, v. 2.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna,2009, v. 2.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1995, v. 2.

RIBEIRO, J. Matemática. São Paulo: Scipione, 2011, v. 3.

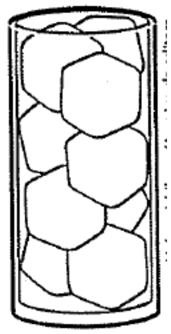
SOUZA, J. Matemática. São Paulo: FTD, 2010, (coleção Novo Olhar v. 2.)

Segue a avaliação que será aplicada. Ela consta de quatro questões, sendo uma discursiva.

1) Nove cubos de gelo, cada um com aresta igual a 3 cm, derretem dentro de um copo cilíndrico, inicialmente vazio, com raio da base também igual a 3 cm. Após o gelo derreter completamente, a altura do nível da água no copo será aproximadamente:

A) 8,5 cm	B) 8,0 cm	C) 7,5 cm	D) 9,0 cm

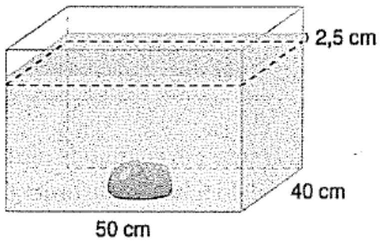
Resposta: 8,5 cm



2)Quando uma pedra submerge completamente nas águas de um aquário, que tem forma de um paralelepípedo reto retângulo, o nível da superfície da água sobe 2,5 cm. Sabendo que, internamente, o fundo desse aquário tem 50 cm de comprimento por 40 cm de largura, calcule o volume da pedra, em centímetros cúbico.

A) 500 cm^3	B) 1 000 cm^3	C) 5 000 cm^3	D) 10 000 cm^3

Resposta: 5 000 cm^3



3) Uma pequena empresa especializada em embalagens para presentes produz, mensalmente, 100 embalagens retangulares com altura de 10 cm e base com dimensões 15 cm x 20 cm, levando-se em conta 100 % de aproveitamento do material utilizado. Num determinado mês, foi feito um pedido especial para embalagens com a base em forma de prisma hexagonal regular, com altura de 10 cm e com o lado da base de 15 cm. Como a empresa dispõe de estoque apenas para a produção habitual e levando-se em conta que, para esse pedido especial, serão consumidos 20 %amais de papelão do que o calculado para o acabamento da caixa, será possívelconfeccionar, aproximadamente:

Resposta: 52 embalagens

A) 32 embalagens	B) 42 embalagens	C) 52 embalagens	D) 62 embalagens

4) Na confecção da cúpula de um a abajur é construída uma armação cilíndrica que, em seguida, tem sua superfície lateral totalmente coberta por um tecido retangular. Para que a cúpula do abajur com 25 cm de altura tenha 1570 cm^2 de tecido em sua superfície lateral, é necessário que a armação cilíndrica tenha quantos centímetros de raio?

Resposta: 10 cm