CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE MATEMÁTICA

Plano de Trabalho sobre Geometria Espacial: Prismas e Cilindros

Aluna: Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha

Grupo: 1

Tutor: Cláudio Rocha de Jesus

2°Bimestre – 2°Ano do Ensino Médio

18/06/2013

S u m á r i o

PLANO DE TRABALHO SOBRE INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ESPACIAL

[Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha]
[mbdmpessanha@gmail.com]

Duração prevista: 3 semanas

INTRODUÇÃO

A proposta deste plano é a de oferecer a nossos alunos uma compreensão simultaneamente variada e interessante. Oferecendo algumas sugestões metodológicas que podem ser utilizadas no ensino sobre Geometria Espacial: Prismas e Cilindros. Desenvolvido com o intuito de criar alternativas de abordagem em sala de aula.

Com realização das atividades propostas, deseja-se alcançar do aluno o desenvolvimento a compreensão do conceito da Geometria Espacial, estimulando a interação entre os alunos e o professor, por meio da troca de ideias, discussões e resolução de situações problemas do cotidiano com o intuito de expandir esses conhecimentos.

É de suma importância aproximar o estudo da Geometria Espacial à acontecimentos reais. Colocar uma aproximação ao assunto de forma bastante suave, pensando, e não discorrer pela teoria colocando alvo nos objetos de estudo.

DESENVOLVIMENTO:

CURIOSIDADE

Escolhemos a Matemática intuitiva das abelhas para começar nossa conversa. Curiosidade das ”abelhas matemáticas”

Vamos assistir o Vídeo: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042

Que apresenta de forma muito interessante a arquitetura das colmeias. - Fala sobre um adolescente que assiste ao programa Animais Curiosos apresentado por James Calafrio. James fala sobre as abelhas, sua organização social e, em especial, sobre a forma hexagonal dos alvéolos. Utilizando conceitos matemáticos, ele mostra que a forma dos alvéolos construídos pelas abelhas é a que apresenta maior capacidade usando uma determinada quantidade de cera.

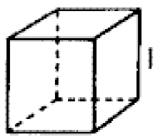
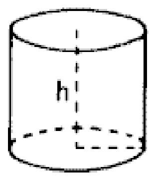
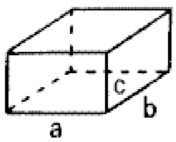
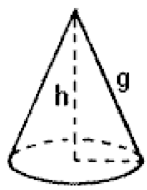
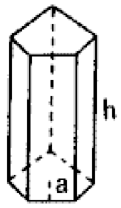
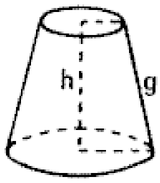
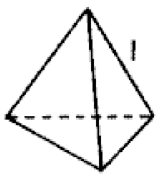
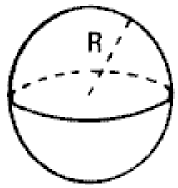
Se você está impressionado com a ”capacidade de cálculo” das abelhas, espere ao saber sobre o fechamento dos alvéolos. Ao invés de construir um óbvio hexágono para cobrir o fundo, as abelhas **utilizam três losangos iguais** inclinados, o que as faz economizar aproximadamente um alvéolo a cada cinquenta. Essa **economia de dois por cento** obtida com essa técnica é muito significativa uma vez que as abelhas trabalham no fechamento de milhões de alvéolos. Também é muito intrigante perceber **que os ângulos dos losangos** de fechamento, inclinados em relação ao eixo radial dos alvéolos, são ângulos que não variam.

Dado um prisma de base hexagonal, devemos fechá-lo em uma das extremidades com três losangos iguais, colocados inclinadamente, para obter o maior volume com um gasto mínimo de material. Qual é o ângulo dos losangos que satisfaz à condição?

Isto é, suas medidas são constantes mesmo observando alvéolos de diversas partes do mundo. O astrônomo francês Jean-Dominique Maraldi (1709-1788) efetuou as medições dos ângulos agudos e encontrou o mesmo valor em todos eles: **70°32'.**

Achou interessante essa matemática das abelhas? Que tal motivar sua turma com essas informações? Esta é uma boa maneira de despertar o interesse dos seus alunos para introduzir o estudo de prismas e cilindros. Além disso, esse assunto é um bom vínculo interdisciplinar, o que pode tornar sua aula muito mais instigante e mostrar-lhes que a matemática pode conectar-se de forma efetiva aos outros conhecimentos.

Um pouco de teoria- Esquema com fórmulas importantes

	**Cubo** $A = 6\,l^2$ $V = l^3$	**Cilindro** $A = 2\pi R(h + R)$ $V = \pi R^2 \cdot h$	
	**Ortoedro** $A = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$	**Cono** $A = \pi R \cdot (g + R)$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$	
	**Prisma recto** $A = P(h + a)$ $V = A_b \cdot h$	**Tronco de cono** $A = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2]$ $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$	
	**Tetraedro regular** $A = l^2\sqrt{3}$ $V = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$	**Esfera** $A = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	

Princípio de Cavalieri

Sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Sejam as seções dos sólidos A e B determinadas por α com mesma área. Se qualquer plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume.

Segundo o princípio de Cavalieri, se as áreas planas dos sólidos A e B, determinadas pelo corte do plano β, forem iguais, então, o volume dos sólidos também é igual.

Um bom experimento para a sala de aula é montar diferentes colunas de moedas ou papel, como mostram as imagens a seguir.

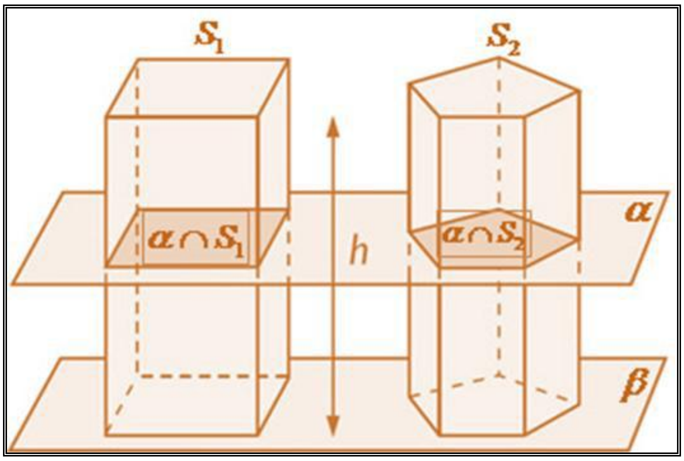
Uma pilha de moedas iguais é uma boa estratégia para ajudar seus alunos a concretizarem o princípio de Cavalieri.

Fonte moedas pilha reta: Fonte moedas pilha reta: http://www.sxc.hu/photo/4992 – Emmapayne’s.

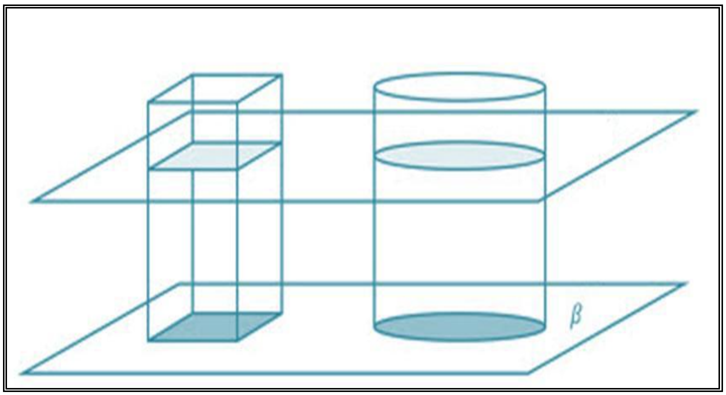
Outra boa ajuda poderá vir dos livros. Ao empilhá-los também é possível avaliar como o volume não muda com a alteração das posições.

Observe com os alunos que as moedas são idênticas e, por consequência, a superfície de cada uma delas tem a mesma área, e as colunas possuem a mesma altura, mas estão dispostas de maneiras distintas. O mesmo acontece com as colunas de livros.

Usar o princípio de Cavalieri é um caminho muito natural para determinar a fórmula do volume de um prisma qualquer. Por exemplo, considere um paralelepípedo e um prisma que possuem a mesma área da base apoiados em um plano horizontal β. Qualquer plano horizontal que seccione os prismas vai gerar regiões como áreas iguais. Assim, o volume do prisma é o mesmo do paralelepípedo retângulo. Sendo assim, será calculado da mesma maneira, ou seja, o volume do prisma é igual à área da base multiplicada pela altura, como podemos ver representado na Figura.



O volume do prisma é calculado da mesma maneira que o paralelepípedo retângulo.



Neste caso, em que as áreas planas delimitadas pelo plano que corta os sólidos, o volume do cilindro é o mesmo do prisma e, portanto, será calculado da mesma maneira, ou seja, o volume do cilindro é igual à área da base multiplicada pela altura.

A preocupação com o cálculo de volumes é bastante antiga. Há milhares de anos, a civilização egípcia já conhecia alguns processos para esse cálculo. Os habitantes da Grécia Antiga aprimoraram esses processos e desenvolveram outros. Destaca-se o trabalho do matemático e físico Arquimedes, que viveu no século III a.C.

Desenvolvendo raciocínios bastante criativos, Arquimedes mostrou como calcular o volume de diversas figuras geométricas. Conta-se que, enquanto tomava banho, constatou que a água subia quando ele mergulhava. Essa quantidade de água que subia era seu volume. Veja como obter o volume de um sólido qualquer, como uma pedra, uma fruta, um legume etc. usando o princípio de Arquimedes.

A diferença entre o volume marcado em cada um dos potes (elevação do líquido) é o volume do sólido.

Atividade 1:

Roteiro 1 –

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

OBJETIVOS: Manipular e reconhecer diferentes prismas e cilindros e suas planificações.
PRÉ-REQUISITOS: Figuras geométricas planas.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, tesoura, cola e embalagens do nosso dia a dia, tais como: caixinhas de remédio, de sabão em pó ou de sapato, rolos de papel, lata de achocolatado, etc.
ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em grupos de 3 a 4 alunos, de forma a propiciar trabalho organizado e colaborativo.

HABILIDADE E COMPETÊNCIA: Reconhecer e identificar os sólidos, através da manipulação de embalagens.

METODOLOGIA ADOTADA:

1°Parte

1-Em grupo coloque seu objeto, que representa um sólido geométrico, à sua frente, de forma que todos os colegas possam vê-lo.

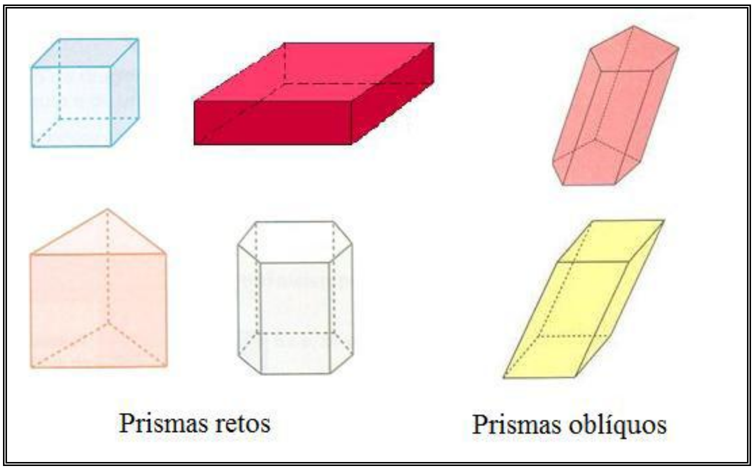
2-Antes de iniciar a atividade converse com seu grupo, e juntos, escolham um colega para ser o narrador da atividade em voz alta. (ou cada um lê um item)

3-Observe todos os objetos trazidos. Procure semelhanças entre eles e separe em dois grupos de acordo com as características observadas.

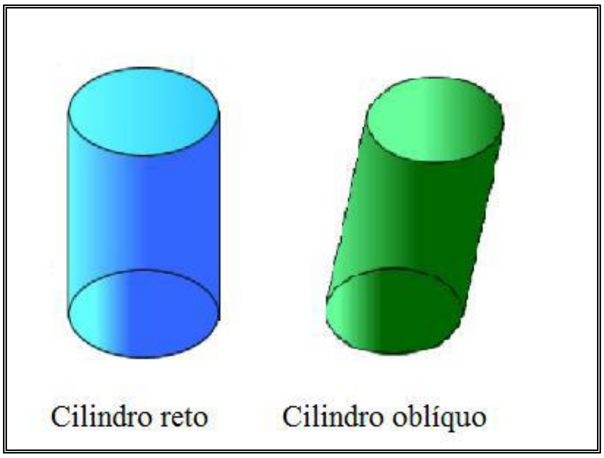
4-Vocês conseguem observar algumas características comuns aos prismas e aos cilindros? Quais? Discutam em grupo.

É importante percebem que, tanto os prismas quanto os cilindros, possuem duas bases paralelas e congruentes. Caso não o percebam é necessário mostrar-lhes essa característica comum.

É interessante pegar um sólido que não se enquadre no grupo dos prismas nem dos cilindros, o "contraexemplo", e mostrar aos alunos o porquê de eles não pertencerem a esses grupos, ou até mesmo propor que eles expliquem.



Um prisma é um poliedro convexo que possui duas faces paralelas, formadas por polígonos convexos congruentes (iguais) – chamadas de bases – e cujas faces restantes, chamadas faces laterais, são compostas por retângulos (no caso do prisma ser reto) ou paralelogramos (nos prismas oblíquos).



A superfície do cilindro é formada por duas partes planas, que são as bases, e uma parte "curva" (arredondada), que é a superfície lateral.

2°parte

1-Agora você irá construir alguns sólidos geométricos. Para isso, colocamos ao final (anexos) desta atividade três planificações para a montagem.

Destaque as folhas em anexo, no final desta atividade, recorte nas linhas externas e dobre todas as outras.

Depois que estiver tudo dobrado corretamente, passe cola apenas nas abas em branco e cole por dentro das faces.

Tanto os cilindros quanto os primas são classificados de acordo com sua base. Exemplo:
- Prisma triangular (possui base triangular);
- Prisma retangular ou paralelepípedo (tem como base um retângulo);
- Paralelepípedo reto-retângulo (todas as faces são retangulares);
- Prisma hexagonal (possui um hexágono na base);
- Cilindro circular (a base é um círculo);

Nomeie os prismas e cilindros que vocês possuem de acordo com essa classificação.
Observe o cubo. Ele é um prisma? Em caso afirmativo, podemos encaixá-lo em qual das classificações já citadas?

Observe, agora, o cubo e o paralelepípedo reto retângulo. Ambos são paralelepípedos, correto? Mas qual é a diferença entre eles?

Atividade 2:

Roteiro 2- Esta tarefa será calculada a área e simular uma construção não terão tempo hábil, mas se o aluno quiser fazer em casa terá conhecimento suficiente.

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – Prismas e Cilindros

OBJETIVOS: Calcular a área lateral, utilizando a planificação de um prisma e aprender a construir puffs com material reciclado em formato de prismas.

PRÉ-REQUISITOS: Figuras Geométricas Planas, área das figuras planas

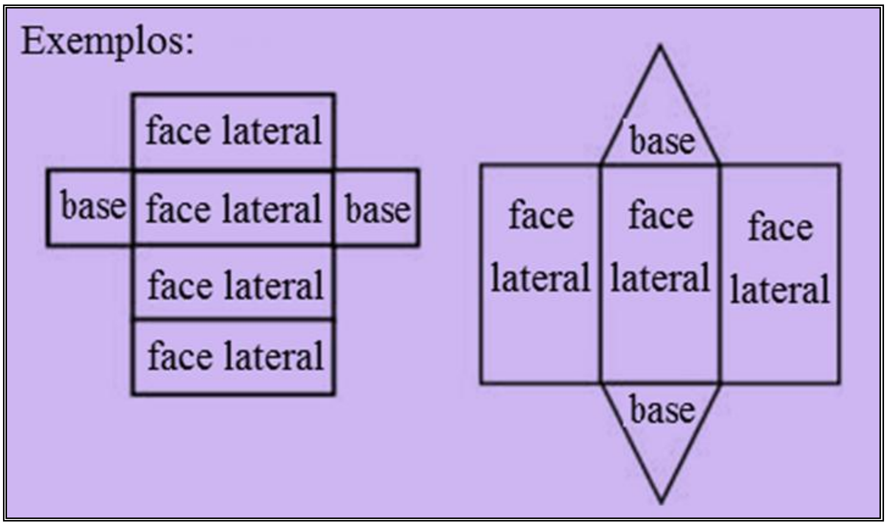
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, calculadora, lápis, borracha, fita adesiva (larga), régua, 32 garrafas pet, fita métrica, estilete, tesoura, uma almofada ou travesseiro velho.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em grupos com quatro integrantes, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

HABILIDADE E COMPETÊNCIA: Calcular a área lateral, utilizando a planificação de um prisma.

METODOLOGIA ADOTADA:

.



1-Escolha um, dentre os objetos trazidos para o Roteiro de Ação 1 que foram classificados como prisma.

2-“Abra” ou corte nas arestas necessárias para fazer sua planificação. Retire as abas usadas para colar a caixa. Cuidado para não destruir o objeto.

3-Como já sabemos todo prisma possui duas bases. Identifique as bases do seu prisma planificado e escreva a palavra “base” com a caneta vermelha.

4-Cada uma das outras faces são chamadas face lateral. Nomeie-as também.____

5-Quantas faces laterais o seu prisma possui?

____

6-Quantos lados o polígono da base possui?

____

7-Você consegue notar o motivo da igualdade desses dois números? Discuta com seu colega.

8-A área lateral de um prisma é dada pela soma das áreas de todas as faces laterais. Dessa forma, utilizando uma régua e a planificação obtida, calcule a área lateral do prisma que você escolheu. (lembrando que a área de um retângulo de lados “a” e “b” é dada por A = a.b, no caso do prisma reto).

____

9-Agora, precisamos calcular a área da base do prisma. Mas antes, diga: qual é a forma do polígono que constitui a base?

____

10-Com o auxílio da régua, calcule a área de cada base. Que valor você obteve?

____

11-A área total de um prisma é dada pela soma da área lateral com a área das duas bases. Dessa forma, calcule a área total do prisma escolhido.

____

Atividade 3:

ROTEIRO 5

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – Prismas

OBJETIVOS: Proporcionar o entendimento do conceito de volume do prisma.

PRÉ-REQUISITOS: Reconhecimento dos elementos dos prismas, conceito de volume.

MATERIAL NECESSÁRIO: : Folha de atividades, 6 dados, lápis, borracha, 1 folha grande de papel cartão, fita adesiva, régua, esquadro, tesoura.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em grupos, de preferência com 4 integrantes, propiciando trabalho organizado e colaborativo.

HABILIDADE E COMPETÊNCIA: - Conceito de volume do prisma.

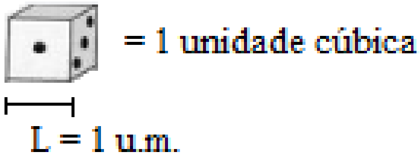
METODOLOGIA ADOTADA:

1-Observe um de seus dados.

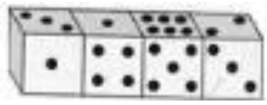
a)Qual sólido geométrico esse dado representa?

____

b)Considere a medida do lado do dado como uma unidade de medida (1 u.m.). Assim, o volume desse cubo será uma unidade cúbica (1 u.m.^{3}).



c)Utilizando 4 dados, forme um paralelepípedo como mostra a figura a seguir.



d)Quantas unidades cúbicas possui este paralelepípedo?

____

e)Vamos calcular o volume do paralelepípedo de outra maneira (lembrando que este sólido é um prisma). O volume do prisma é dado por $\boxed{V = Ab \cdot H}$ **(o volume do prisma é igual ao produto da área da base pela altura).** Dessa forma, complete os espaços abaixo:

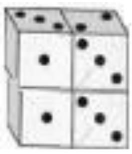
I) Dimensões do retângulo da base: ___u.m. e ___u.m , logo a área da base é Ab = _____ u.m.²

II) A altura é dada por H =___ u.m.

III) V = Ab x H = ____x____ = _____ u.m.³

IV)O valor que você encontrou no item 5 é igual ao obtido no item 4 para o volume do prisma? Compare.

V)Vamos testar para outro paralelepípedo. Monte agora o seguinte prisma:



f)Quantas unidades cúbicas possui este paralelepípedo?

____

g)Calcule novamente seu volume através da fórmula V = Ab . H:

I) Dimensões do retângulo da base: ___u.m. e ___u.m , logo

Ab = _____ u.m.²

II) A altura é dada por H =___ u.m.

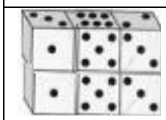
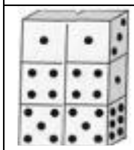
III) V = Ab x H = ____x____ = _____ u.m.³

A resposta encontrada foi a mesma obtida no item 8? Por quê?

____

____

h)Para finalizar esta atividade, utilize 6 dados para montar cada um dos paralelepípedos que aparecem na tabela a seguir. Todos os paralelepípedos formados terão volume de 6 u.m.³ , já que foram construídos com 6 dados. Monte um por vez, preenchendo a tabela a seguir com os valores e conferindo o valor final encontrado para o volume:

Paralelepípedos	**Medida da Altura**	**Dimensões da Base**	**Área da Base**	**Volume = A_b x H**
				
				
				

Esta atividade tem como objetivo mostrar que **1 dm³ = 1 litro.** Para isso, iremos construir um cubo de 1 dm de lado e usar um recipiente com marcação de 1 litro. (Essa parte será apenas demonstrativa)

Atividades Extras

OBJETIVOS: Aprimorar os conhecimentos de Prismas e Cilindros

DESCRITORES ASSOCIADOS: -

1- ENEM -2011

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores, Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize π(pi) = 3)

a) 20 mL. b) 24 mL. c) 100 mL. d) 120 mL. e) 600 mL.

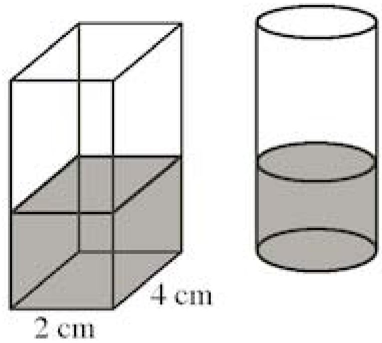
RESOLUÇÃO:

Precisamos calcular o volume do Cilindro de altura 10cm e diâmetro 4cm. Lembre que o raio é metade do diâmetro, portanto seu raio R = 2cm.

$$V = \pi R^2 h$$
$$V = 3.2^2.10$$
$$V = 120cm^3$$

(Como o enunciado diz, será necessário usar uma parte de açúcar para cinco partes de água.)

2- João tem dois recipientes. Um recipiente tem a forma de um prisma retangular com largura 2 cm, comprimento 4 cm e altura 10 cm. O outro é um cilindro reto com raio 1cm e altura 10 cm. Ambos os recipientes estão sobre uma superfície plana. Foram distribuídos 80 ml de água nos dois recipientes de modo que a altura em ambos os recipientes é a mesma.



A altura da água em ambos os recipientes é mais próxima de

(A) 6.8 cm

(B) 7.2 cm

(C) 7.8 cm

(D) 8.2 cm

(E) 8.6 cm

3-

(M120256ES) Um prisma reto retangular, com 3,0 metros de comprimento, 0,6 metro de largura e 2,4 metros de altura, foi construído com madeira de reflorestamento.

Qual é a medida da área total desse prisma?

A) 4,32 m^2

B) 10,44 m^2

C) 14,40 m^2

D) 17,28 m^2

E) 20,88 m^2

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita todos os dias, pois os alunos irão trabalhar em pequenos grupos e os mesmos irão discutir entre si os seus resultados onde vou avaliar o aproveitamento e sanar as dúvidas existentes.

Avaliar o desempenho do aluno no decorrer da sequência.

Propor ao aluno situações problemas e analisar a capacidade de resolver.

Avaliar o desempenho dos alunos nas atividades escritas.

FONTE DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 2º bimestre.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1.5 ed. Rio de Janeiro. 2000.

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio.1ª Série. 5ed. São Paulo. Saraiva. São Paulo. 2005

Side acessado em 01/05/2013. Disponível em: <http://download.rj.gov.br/documentos/10112/451413/DLFE-35010.pdf/OrientacoesPedagogicasSAERJINHO.pdf>

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1.* Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.