

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ

Matemática - 2º Ano - 2º Bimestre/2013

## Plano de Trabalho II

Geometria Espacial: Prismas e Cilindros

Tarefa 4:

Cursista: Paula Leite Pinto

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

## Introdução

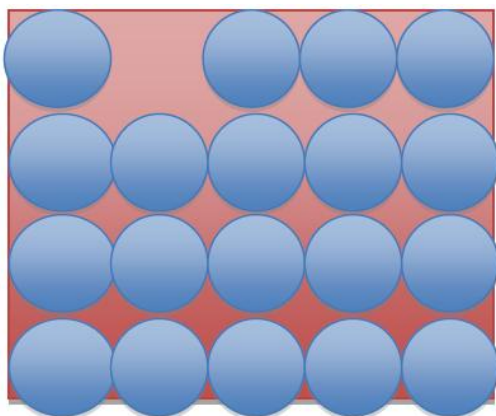
O objetivo deste trabalho é mostrar para os nossos alunos que o estudo de prismas e cilindros está relacionado ao estudo da natureza, como no caso da **Geometria das Abelhas**, e na resolução de problemas do cotidiano que envolvam estes sólidos. E que, conhecendo os **Princípios de Arquimedes e de Cavalieri**, resolverão problemas do cotidiano que envolvam a determinação de volumes.

### Geometria das abelhas

Basta olhar a história para percebermos que o ser humano vem ao longo do tempo se empenhando em formalizar, o máximo possível, o conhecimento matemático. Contudo, ao observar à nossa volta, vemos que nós não somos o único animal a utilizar esse conhecimento de maneira intuitiva.

Se repararmos nas abelhas, verificaremos que estes insetos otimizam a relação “maior capacidade X menor quantidade” de material gasto na construção de alvéolos das colmeias que servem para armazenar o mel fabricado.

Repare que não é interessante construir os alvéolos de modo que estes não aproveitem o espaço por completo. Por esta razão, não seria uma boa alternativa construí-los de forma cilíndrica, pois não haveria paredes comuns entre eles, o que certamente inutilizaria alguns espaços.



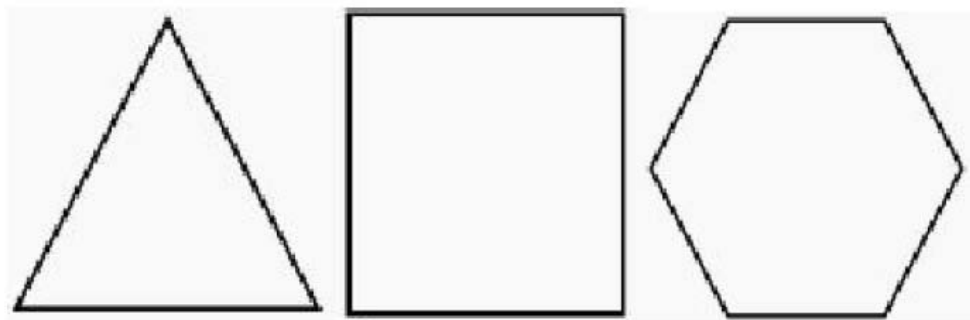
**Figura 1** - Exemplo de planificação de cilindros como alvéolos. Em vermelho os espaços inutilizados.

Para que os alvéolos tenham paredes em comum, é fácil ver que estes devem ter a forma de um prisma. Contudo, não basta apenas ser um prisma, pois os

únicos prismas que, além de terem paredes vizinhas se justapõem perfeitamente são os de base triangular, quadrangular e hexagonal.

Então, qual dessas três opções as abelhas escolheram? Vamos à escolha! Sabemos que o prisma de maior volume será aquele com a maior área da base, ou seja, será aquele cujo polígono da base tiver a maior área. Se considerarmos os três polígonos com o mesmo perímetro, o polígono de maior área será o hexágono.

Observe os três polígonos abaixo:



Com auxílio de régua, calcule a área dos três polígonos e verifique se a afirmação do parágrafo anterior é verdadeira. Perceba que essa atividade pode ser feita em sala de aula com seus alunos.

Solução: supondo que o perímetro dos três polígonos regulares acima é igual a 6cm, vamos calcular as áreas.

**- Triângulo equilátero**

Lado:  $l = 6/3 = 2 \text{ cm}$

Altura:  $h^2 = 4 - 1$

$$h = 3^{1/2} = 1,7 \text{ (aproximadamente)}$$

**Área:  $A_1 = (b \cdot h) / 2 = (2 \cdot 1,7) / 2 = 1,7 \text{ cm}^2$  (aproximadamente)**

**- Quadrado**

Lado:  $l = 6/4 = 1,5 \text{ cm}$

**Área:  $A_2 = l^2 = (1,5)^2 = 2,25 \text{ cm}^2$**

### - Hexágono regular

Lado:  $l = 6/6 = 1\text{ cm}$

Quando inscrito em uma circunferência os lados do hexágono regular são iguais ao raio.

É constituído por 6 triângulos equiláteros congruentes.

Altura de 1 triângulo

$$h^2 = 1^2 - (0,5)^2$$

$$h^2 = 1 - 0,25$$

$$h = (0,75)^{1/2}$$

$$h = (75/100)^{1/2} = 8/10 = 0,8 \text{ (aproximadamente)}$$

Área de 1 triângulo

$$\text{Área: } A = (b \cdot h) / 2 = (1 \cdot 0,8) / 2 = 0,4 \text{ cm}^2 \text{ (aproximadamente)}$$

Área do hexágono

$$A_3 = 6 \cdot 0,4 = 2,4 \text{ cm}^2 \text{ (aproximadamente)}$$

Logo, construir os alvéolos no formato de prisma hexagonal significa utilizar a mesma quantidade de material dos de base triangular e quadrangular, contudo, obter uma maior



capacidade.

**Figura 2** – Sabiamente as abelhas constroem os alvéolos das colmeias no formato hexagonal e, assim, uma quantidade maior de mel pode ser produzida e estocada.

Se você está impressionado com a "capacidade de cálculo" das abelhas, espere ao saber sobre o fechamento dos alvéolos. Ao invés de construir um óbvio hexágono para cobrir o fundo, as abelhas utilizam três losangos iguais inclinados, o que as faz economizar aproximadamente um alvéolo a cada cinquenta. Essa economia de dois por cento obtida com essa técnica é muito significativa uma vez que as abelhas trabalham no fechamento de milhões de alvéolos. Também é muito intrigante perceber que os ângulos dos losangos de fechamento, inclinados em relação ao eixo radial dos alvéolos, são ângulos que não variam. Isto é, suas medidas são constantes mesmo observando alvéolos de diversas partes do mundo. O astrônomo francês Jean-Dominique Maraldi (1709-1788) efetuou as medições dos ângulos agudos e encontrou o mesmo valor em todos eles:  $70^{\circ}32'$ .

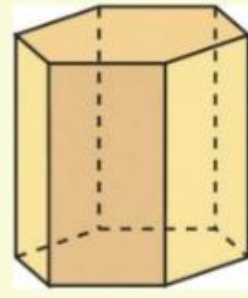
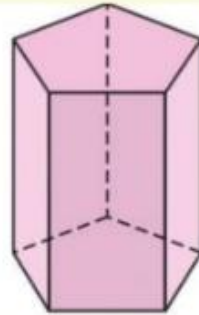
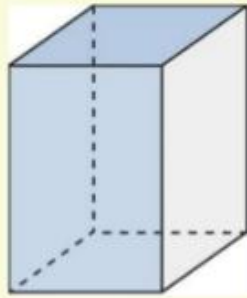
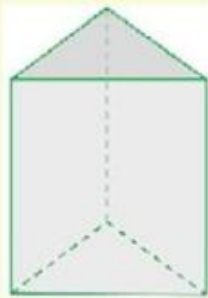
O físico francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757) também observou que o ângulo agudo e, conseqüentemente, seu suplemento não variavam e encontrou o mesmo valor dado por Jean-Dominique Maraldi. Intrigado, Réaumur mandou buscar alvéolos em várias partes do mundo, como Alemanha, Suíça, Inglaterra, Canadá e Guiana. Todos apresentavam losangos de mesmo ângulo. Surpreendido com o resultado, Réaumur propôs ao seu amigo Samuel König, matemático alemão, que resolvesse o seguinte problema: *Dado um prisma de base hexagonal, devemos fechá-lo em uma das extremidades com três losangos iguais, colocados inclinadamente, para obter o maior volume com um gasto mínimo de material. Qual é o ângulo dos losangos que satisfaz à condição?*

Sem saber a origem do problema, König calculou o ângulo como sendo  $70^{\circ}34'$ . Embora a diferença fosse insignificante, de apenas dois minutos em relação aos cálculos efetuados por Maraldi, concluiu-se que as abelhas estavam erradas. Isso provocou um verdadeiro rebuliço entre os cientistas que tentavam explicar a questão. O fato chegou ao conhecimento do matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) que, utilizando os recursos do cálculo diferencial, recalculou o ângulo e encontrou  $70^{\circ}32'$ . Então, as abelhas estavam certas! Maclaurin mostrou ainda que o engano de König era explicável: ele havia usado uma tabela de logaritmos contendo um erro, daí a diferença de dois minutos.

## Prismas

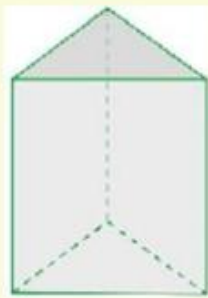
Prisma é uma **sólido** geométrico **delimitado** por **faces planas**, no qual as **duas bases** se situam em **planos paralelos**.

Exemplos:

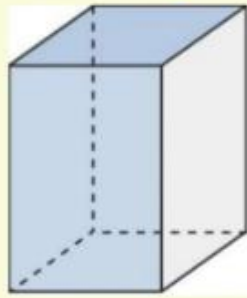


Podemos **classificar** um **prisma** quanto ao **número** de **arestas da base**.

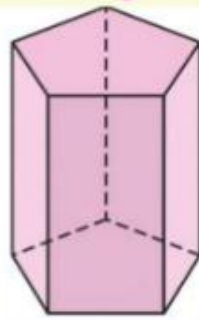
Triangular



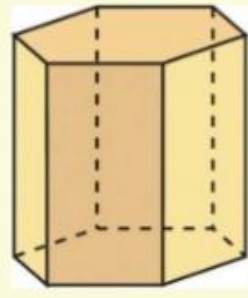
Quadrangular



Pentagonal

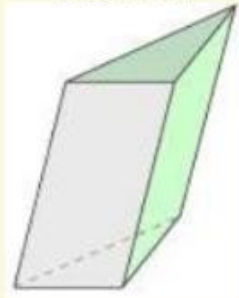


Hexagonal

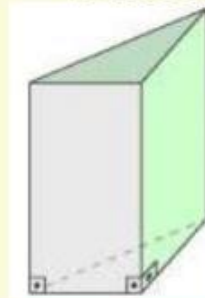


Podemos **classificar** um **prisma** quanto à **inclinação** das **arestas laterais**.

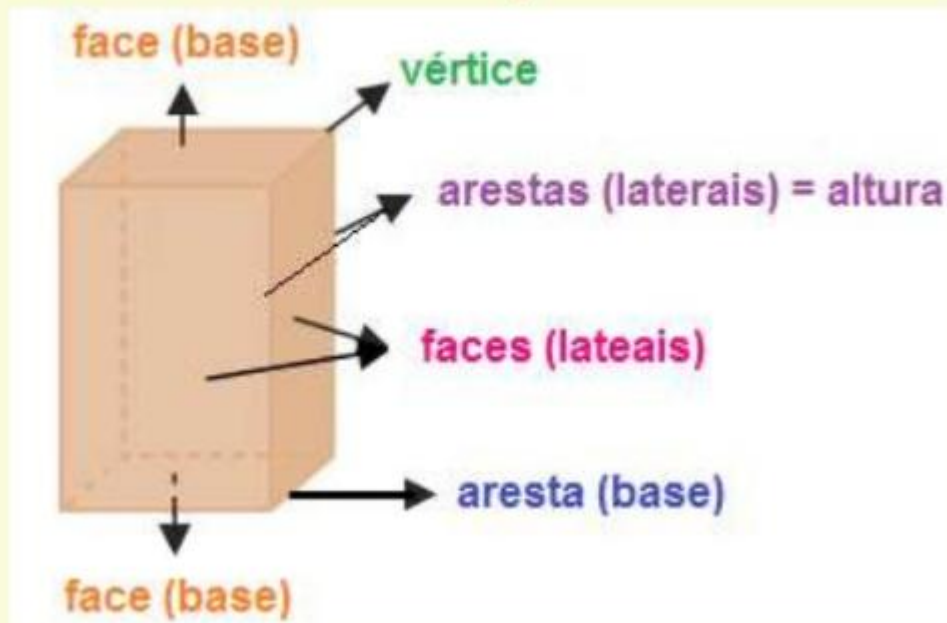
**Oblíquos**: arestas laterais oblíquas às bases.



**Retos**: arestas laterais perpendiculares às bases.



Os **elementos** de um **prisma reto** são:





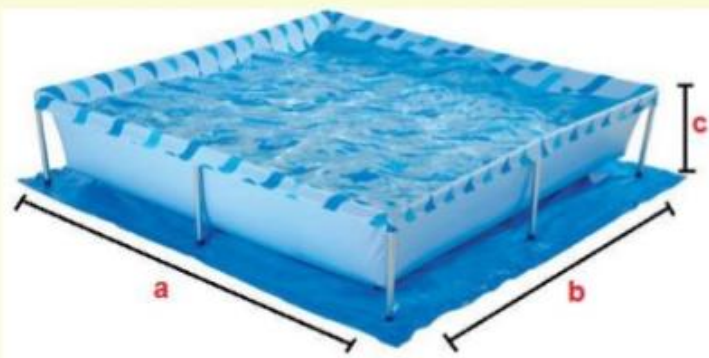
## Áreas do Prisma

**Área total:** é a área de toda a superfície do prisma, portanto, é a **soma** das **áreas das bases** com a **área lateral**.

$$A_t = 2.A_b + A_l$$

## Volume do Prisma

O **volume** de todo **prisma** é o **produto** entre a **área da base** e a **altura**.

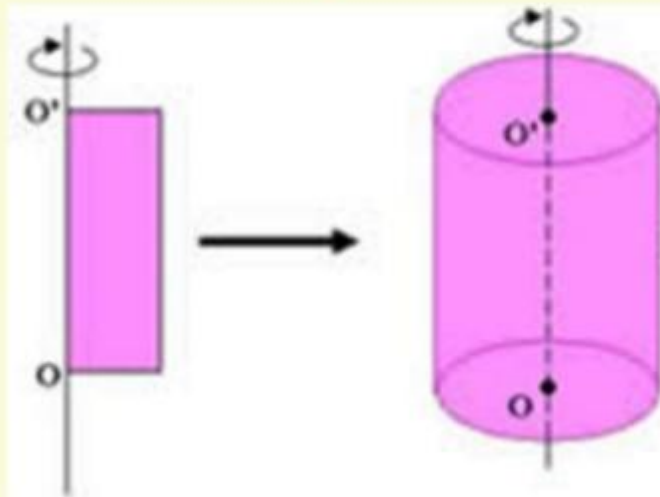


$$V = A_b . h$$



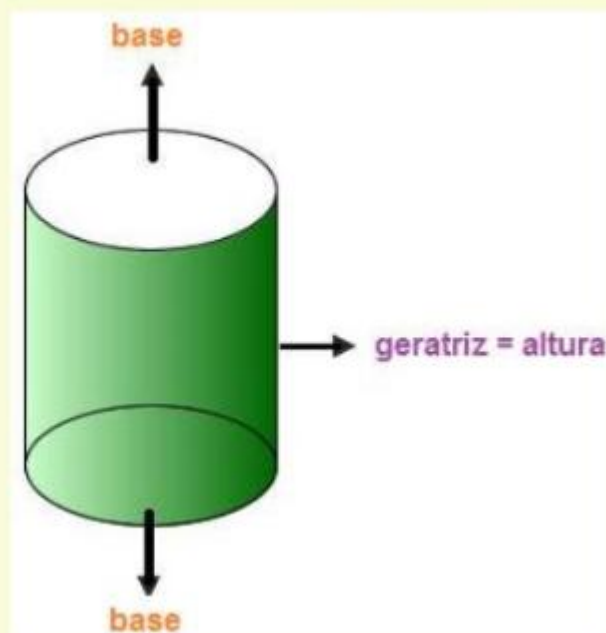
# Cilindros

**Cilindros retos** são **sólidos** de revolução, obtidos através do **giro** de um **retângulo**.

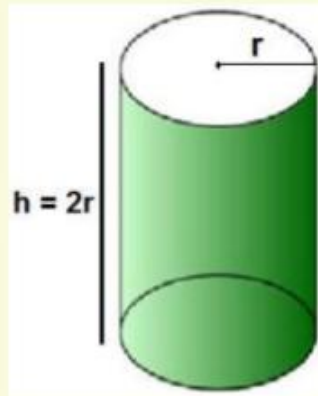


# Cilindros

Os **elementos** do **cilindro reto** são:

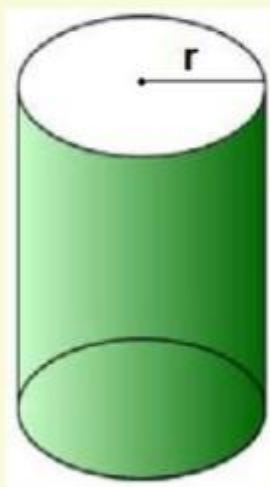


O cilindro equilátero apresenta altura com a mesma medida do diâmetro da base.



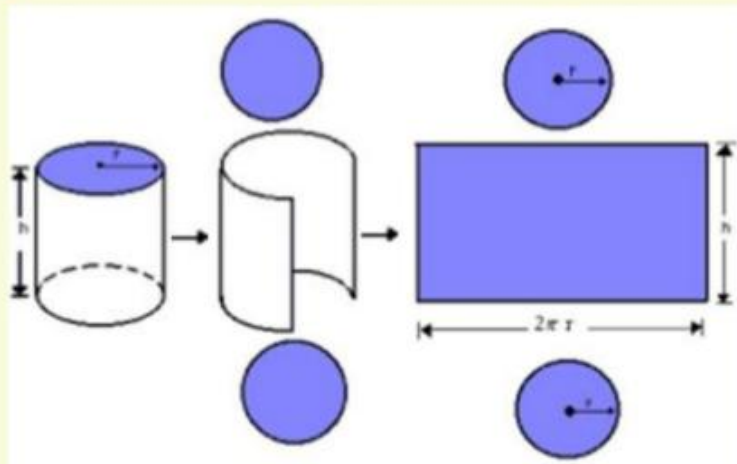
## Áreas do Cilindro

Área da base: é a área do círculo que constitui a base.



$$A_b = \pi . r^2$$

**Área lateral:** é a área da superfície lateral planificada.



$$A_l = 2.\pi.r.h$$

**Área total:** é a área de toda a superfície do prisma, portanto, é a soma das áreas das bases com a área lateral.

$$A_t = 2.A_b + A_l$$

# Volume do Cilindro

O **volume** de todo **cilindro** é o **produto** entre a **área da base** e a **altura**.

$$V = A_b \cdot h$$



Caso particular: **cilindro equilátero**

Como o **cilindro equilátero** apresenta a **altura** com a mesma medida do diâmetro da base, então:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r \Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

## **Desenvolvimento**

**Duração Prevista:** 3 semanas ( 12 aulas de 50 minutos cada)

**Material necessário:** Folha de atividades, régua, lápis, borracha, caneta, cartolina, tesoura, cola e arroz.

**Objetivos:** -Reconhecer e nomear prismas e cilindros. -

- Resolver problemas envolvendo o cálculo de áreas lateral e total de prismas e cilindros.

- Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de prismas e cilindros.

**Pré-requisitos:** Geometria Plana: cálculo de áreas de figuras planas (polígonos e círculo) e cálculo do perímetro.

**Organização da classe:** Turma disposta em grupos (3 componentes) de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

### **Descritores associados:**

**H24** – Resolver problemas envolvendo medida se área total e/ou lateral de prismas e cilindros.

**H25-** Resolver problemas envolvendo noções de volumes de prismas e cilindros.

## Metodologia

Inicialmente os alunos fizeram um teste, cujo objetivo era avaliar seu conhecimento em Geometria. O teste também favorecia a avaliação da capacidade de visualização e também da representação através de desenho de elementos espaciais. Através desse teste, foi constatado que os alunos não lembravam os conteúdos relacionados a área, a perímetro, nem do Teorema de Pitágoras, que são pré-requisitos fundamentais para o ensino de prismas e cilindros. Então, iniciou-se a aula uma revisão que abordava tópicos da geometria plana, estudados no Ensino Fundamental.

Após revisarmos os pré-requisitos necessários iniciamos o estudo dos Prismas, que consistiu de um trabalho de verificação do entendimento de volume em prismas e nas planificações de alguns sólidos montados com uma unidade cúbica. Pretendeu-se com essa atividade permitir que o aluno fizesse o cálculo de áreas de diversos tipos de Prismas, através da representação planificada destes sólidos.

Em seguida trabalhamos com os Cilindros. Os alunos iniciaram este estudo, calculando o volume deste e comparando com um prisma de mesma área da base e altura. Para isto, utilizaram arroz e sólidos construídos com cartolina. Eles concluíram que os volumes eram idênticos, verificando assim o **Princípio de Cavalliere**. Os alunos também trabalharam com a planificação de cilindros e o cálculo de suas áreas.

Os alunos também verificaram o **Princípio de Arquimedes** utilizando pilhas de moedas de diferentes valores, obtendo diversos cilindros. . Calcularam o volume de cada pilha (cilindro), que estava presa por um durex, e mergulharam num tubo de ensaio graduado em ml com água. Eles verificaram que o aumento do volume de água no tubo correspondia ao volume da pilha de moedas. Com isto também verificaram que  $1 \text{ cm}^3$  correspondia a 1 ml, e concluíram que  $1 \text{ dm}^3$  correspondia a 1 litro.

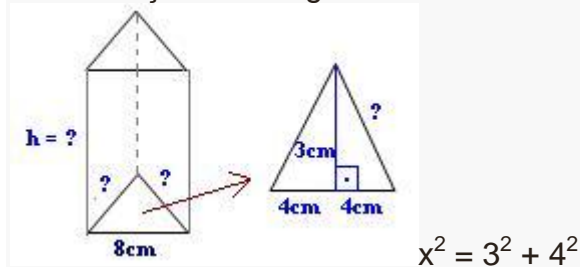
## Exemplos de problemas contextualizados - Prismas e Cilindros

### 1º) Área total: Prisma

Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles de 8cm de base por 3cm de altura. Sabendo que a altura do prisma é igual a  $\frac{1}{3}$  do perímetro da base, calcule sua superfície total.



Solução. No triângulo isósceles a altura também é mediana.  
Pela relação de Pitágoras temos:



$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

$$p_b = (2.5) + 8 = 18$$

$$\text{Área da Base: } A_b = (8.3)/2$$

$$2A_b = [ (8.3)/2 ] \cdot 2 = 8.3 = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da Base: } A_l = 3 (8.h)$$

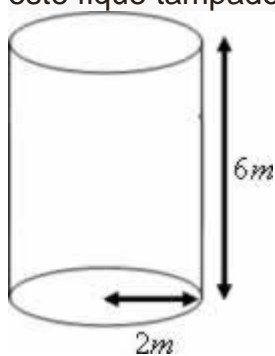
$$h = 1/3 p_b = (1/3) \cdot 18 = 18/3 = 6$$

$$A_l = 3 (8.h) = 3.8.6 = 144 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área Total: } 2A_b + A_l = (24 + 144) \text{ cm}^2 = 168 \text{ cm}^2$$

## 2º) Área total: Cilindro

Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine a área total deste reservatório, considerando que este fique tampado.



$$\text{Área da base: } A_b = \pi r^2 = \pi 2^2 = 4 \pi \text{ m}^2$$

$$2A_b = 2.4\pi = 8 \pi \text{ m}^2$$

$$\text{Área da lateral: } A_l = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \text{ m}^2$$

$$\text{Área da total: } 2A_b + A_l = 8 \pi + 24\pi = 32 \pi \text{ m}^2$$

### 3º) Volume: Prisma

Em uma piscina retangular de 10m de comprimento e 5m de largura, para elevar o nível de água em 10cm são necessários:

como a medida de 10cm corresponde a 0,1m , logo

$$V = 10 \cdot 5 \cdot 0,1$$

$$V = 5\text{m}^3$$

$$V = 5000\text{litros.}$$

### 4º) Volume: Cilindro

Considere um cilindro circular reto de 8 cm de altura e raio da base medindo 5 cm. Determine a capacidade desse cilindro. (Utilize  $\pi = 3,14$ )

**Solução:** De acordo com o enunciado do problema, temos que:

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Calcular a capacidade é o mesmo que determinar o volume do cilindro.

Utilizando a fórmula do volume, obtemos:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 8$$

$$V = 3,14 \cdot 25 \cdot 8$$

$$V = 628 \text{ cm}^3$$

Portanto, esse cilindro apresenta capacidade de **628 cm<sup>3</sup>**.

### Recursos Utilizados

- Aula expositiva utilizando sólidos geométricos (prismas e cilindros) em acrílico.
- Vídeo: *A geometria das abelhas*.
- Construção de sólidos geométricos( prismas e cilindros).
- Embalagens no formato de prismas ou cilindros

## Avaliação

Em grupos de 3 alunos. A interação entre eles favorece a aprendizagem.

### Folha de atividades

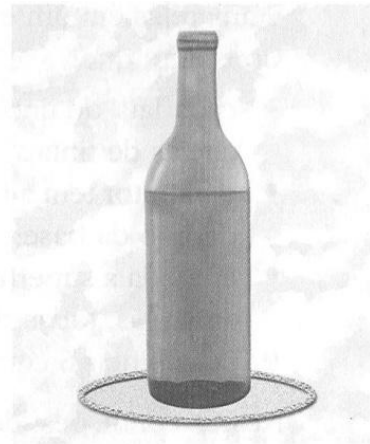
Resolva os problemas abaixo utilizando seus conhecimentos sobre prismas e cilindros:

- 1) (UFPA )O reservatório "tubinho de tinta" de uma caneta esferográfica tem 4 mm de diâmetro e 10 cm de comprimento. Se você gasta  $5\pi$  mm<sup>3</sup> de tinta por dia, a tinta de sua esferográfica durará:
  - a) 20 dias
  - b) 40 dias
  - c) 50 dias
  - d) 80 dias
  - e) 100 dias
  
- 2) Para conter dois litros de certo líquido, foi produzida uma caixa de acrílico em formato de paralelepípedo, onde podemos ver no topo um furo, no qual será colocado o líquido. Sabendo que a caixa foi feita com sua base 12cmX10cm e a altura desta caixa é 20cm é correto afirmar que:
  - (A) O líquido não caberá na caixa em questão.
  - (B) O líquido caberá com folga na caixa.
  - (C) O líquido caberá mas ficará muito rente ao topo.
  - (D) O líquido ficará na metade da caixa.
  - (E) O líquido não chegará nem a metade da caixa.
  
- 3) Em uma piscina retangular de 10m de comprimento e 5m de largura, para elevar o nível de água em 10cm são necessários:
  - a) 500litros de água
  - b) 5000litros de água
  - c) 10000litros de água
  - d) 1000litros de água
  - e) 50000litros de água

4 ) (CESGRANRIO, 1988 adaptada) Um tanque cúbico, com face inferior horizontal tem  $1 \text{ m}^3$  de volume e contém água até sua metade. Após mergulhar uma pedra de granito, o nível de água subiu 8 cm. Qual é o volume desta pedra ?

5)

(Enem-MEC) Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



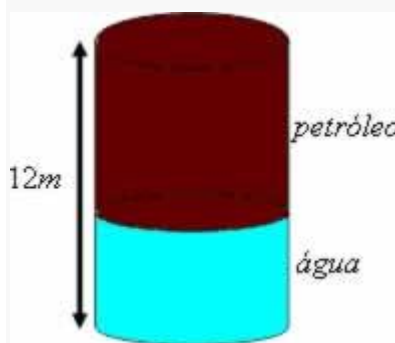
1) Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

- a) 1                      c) 3                      e) 5  
b) 2                      d) 4

2) Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) 5

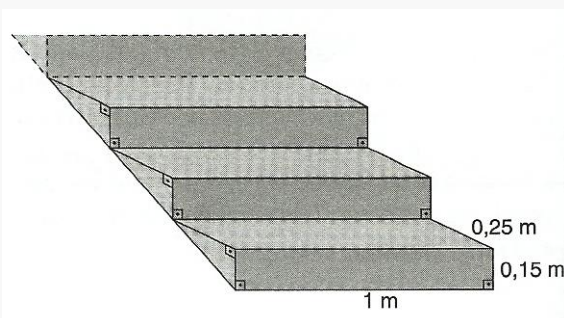
6) (Vunesp – SP) Um tanque subterrâneo, que tem o formato de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com  $30 \text{ m}^3$  de água e  $42 \text{ m}^3$  de petróleo. Considerando que a altura do tanque é de 12 metros, calcule a altura da camada de petróleo.



A) 8

- B) 6
- C) 7
- D) 9
- E) 10

7) A figura mostra parte de uma escada de madeira maciça que tem o total de 12 degraus de mesma dimensões., cada qual com a forma de um prisma triangular. Determine o custo da madeira usada da construção dessa escada, considerando que o marceneiro que a construiu afirmou ter pago ao seu fornecedor a quantia de R\$ 1.400,00 por metro cúbico.



8) Uma indústria de embalagens deseja fabricar uma lata de tinta cilíndrica com raio da base medindo 0,5 dm de comprimento e com capacidade para  $1 \text{ dm}^3$ . Qual deverá ser o comprimento da altura dessa embalagem? (Use  $\pi = 3,14$ ).

## Bibliografia

Giovanni, José Ruy; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Ruy.

*Matemática Completa: ensino médio*. São Paulo: FTD, 2002. 592 p.

Curso Formação Continuada, *A Geometriadas abelhas*, 2º ano: ensino médio.

Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20.8 p.

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/prisma/prisma.htm>

Matemática – Volume Único: Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David;

Périgo, Roberto – Atual Editora – 4ª edição – 2007 – Páginas: 456 até 464.

Curso Formação Continuada, *Roteiro de ação 1- Prismas e Cilindros no nosso dia a dia*, 2º ano: ensino médio. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20.

15 p.

Curso Formação Continuada, *Roteiro de ação 3- Área do Prisma*, 2º ano:

ensino médio. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20. 14 p.

Curso Formação Continuada, *Roteiro de ação 4- Área do Cilindro com tubos de papel*, 2º ano: ensino médio. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20.9 p.

Curso Formação Continuada, *Roteiro de ação 5 – Volume do Prisma –*

*Montando, contando, calculando e comprovando*, 2º ano: ensino médio. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20.10 p.

Curso Formação Continuada, *Roteiro de ação 6 – Volume do Cilindro –*

*Calculando, afundando e comprovando*, 2º ano: ensino médio. Rio de Janeiro: CECIERJ, 2013, Maio, 20.12 p.