

Plano de Trabalho 1

Regularidades Numéricas: sequências e matemática financeira

Professor-cursista: EDILAINE AGUIAR LEMOS

Grupo: 02

Tutor: MARIA CLÁUDIA PADILHA TOSTES

Período: 2º bimestre/2013

Público-Alvo: 2º ano Ensino Médio

1. **Introdução:**

A Matemática da forma como é estudada na atualidade sofreu inúmeras mudanças em sua organização e como é ensinada.

O ensino de sequência pode ser destacado com situações cotidianas, sendo mostrada em algumas aplicações como lista de chamada, ordem alfabética no dicionário, ordem crescente nas páginas de um livro, etc.

A ideia de sequência numérica pode ser destacada de forma a levar o aluno a explorar o aspecto geral de regularidades das sequências e sua representação, partindo da análise das sequências e assim caracterizar as progressões.

A contextualização do conteúdo visa despertar o interesse do aluno para que possa ter uma visão mais abrangente de sua utilização em outras áreas do conhecimento.

A importância das progressões para o cálculo financeiro, não deve passar despercebida para os alunos, que vivem hoje em um mundo que destaca o crédito e o consumo.

2. **Desenvolvimento:**

O conteúdo será abordado discutindo-se a ideia da necessidade de sua aplicação na vida cotidiana, procurando minimizar a formalidade teórica e dando prioridade na construção do conhecimento pelo aluno, buscando destacar a sua aplicação em situações reais.

Para introdução ao conteúdo será utilizado uma parte do roteiro de ação 1, sendo distribuído em folha uma atividade para que aluno tenha a ideia geral do conceito de sequência numérica.

Dando continuidade ao conteúdo será utilizado o Roteiro de ação 3: Duas Situações e uma Sequência Especial - essa atividade será realizada como introdução ao conceito de PA, procurando levar o aluno a definição de uma PA com um exemplo prático para representar a situação problema.

Para que o aluno entenda a soma dos termos de uma PA, utilizarei o livro adotado apresentando a fórmula que é aplicada nesta situação e em seguida realizaremos a atividade 2, proposta no roteiro de ação 3.

Logo após utilizando o roteiro de ação 4: Mais duas Situações e outra Sequência Especial, aproveitando a atividade proposta para que o aluno entenda que uma situação problema também pode representar uma Progressão Geométrica (PG) ou a soma de seus termos.

Será abordado problemas envolvendo Matemática Financeira, apresentados no roteiro de ação 5, levando o aluno a observar a regularidade numérica de cada situação, objetivando um entendimento sobre os conceitos de Juros Simples, Juros Compostos e o Problema da Equivalência de Capitais.

2.1. Objetivos:

- Identificação de regularidades numéricas e entendimento da associação entre sequências numéricas e a expressão algébrica de seu termo geral.
- Entendimento das propriedades e conceitos relacionados às Progressões Aritméticas.
- Entendimento das propriedades e conceitos relacionados às Progressões Geométricas.
- Entendimento dos conceitos de Juros Simples e Compostos. Resolução de problemas com o uso da Matemática Financeira.

2.2. Pré-requisitos:

- Operações Fundamentais (soma, subtração, multiplicação, divisão)
- Sequências numéricas.
- Porcentagem.

2.3. Material necessário:

- Livro didático.
- Roteiro de Ações (Formação Continuada SEEDUC)
- Folha de atividades
- Calculadora
- Régua, tesoura, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

2.4. Organização da classe:

A turma será dividida em duplas, para que todos possam ter a oportunidade de fazer a verificação e contribuir com construção do conhecimento.

2.5. Atividades:

- Roteiro de Ação 1: Pitágoras e as Regularidades Numéricas
- Roteiro de Ação 3: Duas Situações e uma Sequência Especial.
- Roteiro de Ação 4: Mais duas Situações e outra Sequência Especial.

- Roteiro de Ação 5: Resolvendo Problemas com Matemática Financeira
- Exercícios de fixação (livro adotado).

Obs.: As atividades realizadas no computador serão ministradas em grupo ou o professor realizará a apresentação para os alunos, isso dependendo da disponibilidade de tempo e recursos para a sua realização.

3. Avaliação:

A avaliação será através das atividades realizadas em grupo e individualmente para verificar o nível de aprendizagem dos alunos.

As atividades terão um valor quantitativo, verificando a participação de cada um dentro dos seguintes critérios:

- avaliação diagnóstica e os instrumentos serão através de pesquisas, testes e provas.
- verificação do desempenho na resolução de todos os exercícios.
- desempenho em todas as atividades grupais ou individuais, em classe e extraclasse.

3.1. Descritores associados:

- H41 - Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).
- H54 - Resolver problemas envolvendo juros simples ou compostos.
- H55 - Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.
- H68 - Resolver problemas que envolva porcentagem.

4. Referências:

FUNDAÇÃO CECIERJ. Consórcio CEDERJ. **Função Logarítmica**. Matemática. Roteiro de Ação. 2º Ano. 1º Bimestre - 1º Campo Conceitual. 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática - Paiva**. Volume 1. 1ª Edição. São Paulo, 2009. Editora Moderna.

SILVA, Claudio Xavier da. BARRETO, Benigno Filho. **Matemática Aula por Aula**. 2ª série. 2ª ed. São Paulo. FTD. 2005.

	ATIVIDADE 1		
	PROFESSOR (A): Edilaine Aguiar Lemos	ANO: 2º	TURMA: 2001

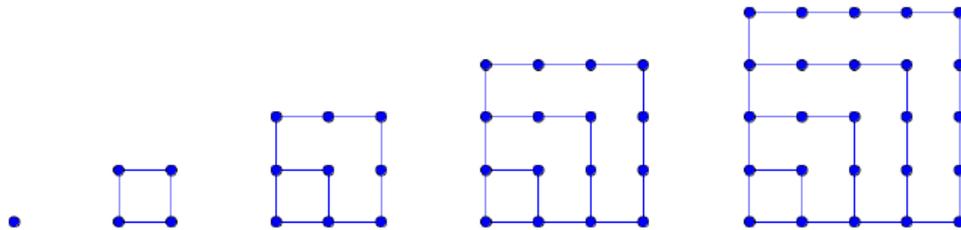
Pitágoras e as Regularidades Numéricas

Os membros da Escola Pitagórica, também chamados de Pitagóricos, tinham como forte crença que todas as coisas seriam expressas por números. Nesse pensamento, todos os números, ou seres, poderiam ser formados a partir do Um, o menor número que pode ser expresso.

Os chamados números figurados possuíam um importante papel dentro da filosofia pitagórica. Esses números eram figuras formadas por uma sequência de pontos dispostos segundo formas geométricas. O estudo das relações expressas pelos números figurados pode ser bastante frutífero para o aprendizado de diversos conceitos em Matemática.

Entremos, então, no mundo aberto pelos Pitagóricos e descubramos juntos o que os números podem nos ensinar. Analisemos as questões a seguir.

1) A sequência de figuras abaixo representa o que podemos chamar de sequência dos números quadrados. Por que você acha que esses números eram chamados por esse nome? Escreva abaixo de cada figura o número correspondente.



2) Você saberia dizer quais são os números das outras posições? Qual seria o sexto termo? E o sétimo termo?

3) Para organizarmos melhor nosso pensamento, complete a tabela a seguir.

Posição	Termo da Sequência		Posição	Termo da Sequência
1	1		11	
2	4		12	
3	9		13	
4	16		14	
5	25		15	
6			16	
7			17	
8			18	
9			19	
10			20	

4) Como poderia ser representado o número que estivesse na posição n ? Tente escrever uma fórmula que o represente.

A expressão algébrica é suficiente para caracterizar a sequência numérica a qual está vinculada.
 Em Matemática, essas expressões algébricas que caracterizam sequências numéricas são chamadas de **termo geral da sequência**.

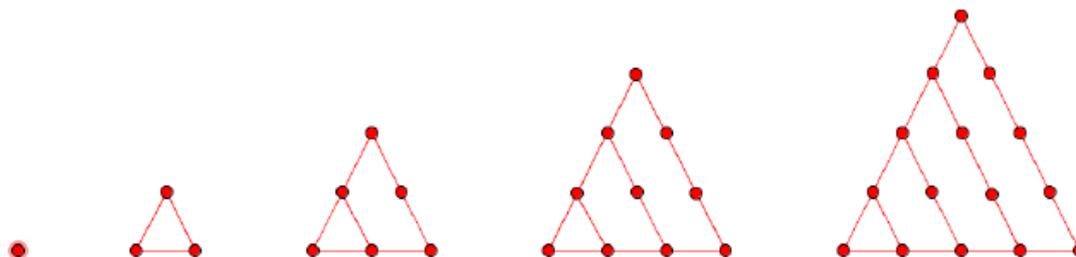
5) Descreva as sequências definidas abaixo pelos seus respectivos termos gerais, explicitando os seus quatro primeiros termos.

a) $a_n = n^3$

b) $b_n = 2n$

c) $a_n = 4n - 1$

Investiguemos outra importante sequência de números figurados, também estudada pelos Pitagóricos, os números triangulares.



6) Explícite os termos da sequência dos números triangulares de acordo com a figura.

7) Observe os números da sequência e, tentando encontrar algum padrão que possibilite descobrir o próximo termo da sequência, complete a tabela abaixo.

Posição (n)	Termo da Sequência (T_n)		Posição (n)	Termo da Sequência (T_n)
1	1		11	
2	3		12	
3	6		13	
4	10		14	
5	15		15	
6			16	
7			17	
8			18	
9			19	
10			20	



ATIVIDADE 2

PROFESSOR (A): Edilaine Aguiar Lemos

ANO: 2º

TURMA: 2001

A partir de duas situações problemas estudaremos uma sequência bastante especial em matemática, a **Progressão Aritmética**.

Consideremos as seguintes situações-problema:

Situação 1



- Está prevista, no acostamento de uma determinada rodovia, a instalação de placas que identificam a velocidade permitida nos respectivos trechos. Uma placa foi colocada na altura do quilômetro 44 e outra na altura do quilômetro 180. Serão colocadas mais 7 placas entre as já existentes, mantendo-se sempre a mesma distância entre duas placas consecutivas. Em quais quilômetros deverão ficar as novas placas?

Situação 2

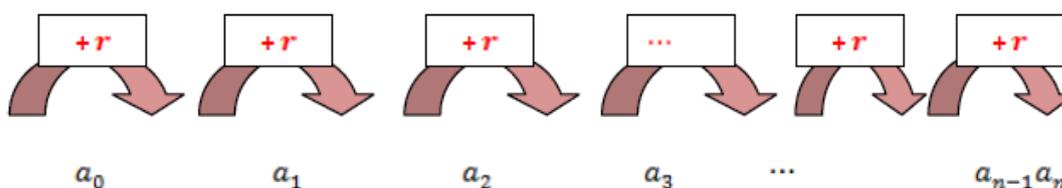


- Na compra de um carro usado, foi combinado, entre o vendedor e o comprador, que o pagamento da primeira parcela, no valor de R\$ 500,00, seria efetuado no ato da compra e, a partir da segunda parcela, o comprador pagaria R\$ 25,00 a mais que a parcela anterior. Quantas devem ser as parcelas pagas pelo comprador se a soma de todos os valores pagos resultam em R\$ 26.250,00?

1) Após ler com atenção cada uma das situações, tente identificar as características principais de cada problema. Em sua visão, quais são as semelhanças entre os problemas? E em que eles se diferenciam?

Uma sequência numérica é chamada de Progressão Aritmética (PA), quando cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante. Essa constante, que indicaremos por r , é denominada razão da Progressão Aritmética.

Observe que:



2) A partir do raciocínio ilustrado anteriormente, complete os espaços em branco do esquema a seguir de maneira que o padrão possa ser mantido.

$$a_1 = a_0 + r$$

$$a_2 = a_1 + r = a_0 + \text{---}r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r = a_0 + \text{---}r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_2 + 2r = a_1 + 3r = a_0 + \text{---}r$$

Assim, você deve ter percebido que:

$$a_1 = a_0 + r$$

$$a_2 = a_0 + 2r$$

$$a_3 = a_0 + 3r$$

$$a_4 = a_0 + 4r$$

3) Observando o padrão e dando continuidade a essa ideia, complete a expressão abaixo.

$$a_n = a_0 + \underline{\quad} r$$

Podemos notar que todos os termos da PA podem ser escritos em função do primeiro termo a_0 e da razão r , por meio da relação:

$$a_n = a_0 + nr$$

Tal expressão é denominada termo geral da PA.

Após a releitura do problema, responda às seguintes perguntas para podermos modelar, e resolver a situação por meio de uma PA.

4) Ao colocarmos os dados do problema em uma Progressão Aritmética qual seria o primeiro termo da sequência, ou seja, qual seria o valor de a_0 ?

5) Qual será a posição do número 180?

6) Tente escrever o termo geral desta sequência.

7) Uma vez que conhecemos o primeiro e o último termo da Progressão Aritmética, qual é o valor de sua razão?

8) Agora que você já conhece o primeiro termo e a razão, responda: Em quais quilômetros deverão ser colocadas as novas placas?

Ao relermos a Situação 2, vemos que podemos modelá-la por uma PA, pois o valor de cada prestação é a soma do valor da prestação anterior com 25. Contudo, a situação leva em consideração a soma de todas as parcelas. Surge, então, outra questão: Existe uma expressão que forneça a soma de todos os termos de uma PA?

10) Considerando que os valores de cada prestação podem constituir-se em termos de uma PA, responda:

a) Qual será o primeiro termo da PA?

b) Qual será a razão da respectiva Progressão?

c) Qual é a soma dos termos da PA?

d) Qual será o valor da última prestação em função de n , ou seja, qual é o termo geral dessa PA?



ATIVIDADE 3

PROFESSOR (A): Edilaine Aguiar Lemos

ANO: 2º

TURMA: 2001

Aprenderemos, a partir de situações-problema nesse roteiro, uma sequência extremamente importante na matemática e que pode ser aplicada a diversas situações.



Uma determinada pessoa juntou suas economias durante 2 anos, conseguindo obter o valor de R\$ 35.000,00. Enquanto ela não sabe exatamente o que fazer com o dinheiro, decidiu investi-lo em uma Caderneta de Poupança. Se os rendimentos da Poupança são 0,5% a.m, qual será o montante investido após 1 ano?



Uma bola elástica cai de uma altura de 32 metros. Após cada batida no solo, a bola eleva-se a uma altura que corresponde a metade da altura atingida anteriormente. Qual foi o espaço percorrido pela bola até o instante em que ela bateu no solo pela 11ª vez?

Leia com atenção cada uma das situações-problema e junte-se com seu colega para iniciarmos nossa investigação.

Analisemos, inicialmente, a Situação 1. Ela nos traz um problema de Matemática Financeira bastante relevante, principalmente por ser um problema comum que qualquer pessoa consegue se imaginar contextualizado. Pode-se notar que, na realidade, tal problema é calculado considerando juros compostos, ou como é chamado popularmente, “juros sobre juros”.

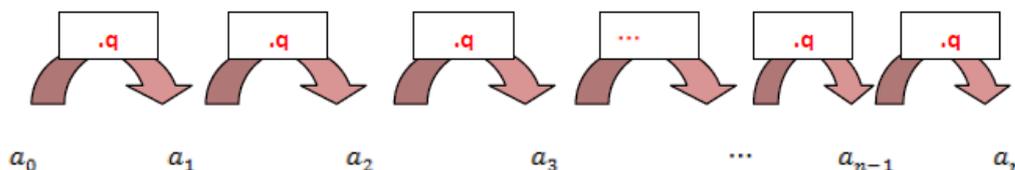
Por outro lado, podemos visualizar o montante obtido a cada mês como um termo de uma sequência numérica.

Tente responder:

- 1) Dentro desse raciocínio qual seria o primeiro termo da sequência?
- 2) Encontre os três primeiros termos da sequência.
- 3) Descreva, em breves palavras, como você procederia para encontrar cada termo da sequência.
- 4) Você consegue observar alguma característica especial nessa sequência? Qual?
- 5) O que acontece quando dividimos um termo da sequência pelo seu termo anterior?

Uma sequência numérica é chamada de **Progressão Geométrica (PG)**, quando cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante. Essa constante, que indicaremos por **q**, é denominada razão da Progressão Geométrica

Observe que:



6) A partir do raciocínio ilustrado no esquema, complete os espaços em branco a seguir de maneira que o padrão possa ser mantido.

$$a_1 = a_0 \cdot q \square$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q \square$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 = a_0 \cdot q \square$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_2 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^3 = a_0 \cdot q \square$$

7) Observando o padrão de maneira a dar continuidade a essa ideia, você poderia completar o espaço em branco na expressão a seguir, que generaliza esse raciocínio?

$$a_n = a_0 \cdot q \square$$

A partir dessa ideia, podemos definir o termo geral de uma PG. $a_n = a_0 \cdot q^n$

Perceba que qualquer termo da PG pode ser escrito em função da razão e de seu primeiro termo.

Agora já é possível resolver nosso problema.

Converse com seu colega e resolva o problema relatado na Situação 1. Ao encontrar alguma dificuldade, peça ajuda ao seu professor.

Agora, leia com atenção o problema exposto na Situação 2.

A altura alcançada pela bola após a primeira batida no solo pode ser vista como uma sequência numérica com primeiro termo 32, visto que após a primeira batida a bola sobe e desce 16 metros. O segundo termo seria 16, pois após a segunda batida, a bola sobe e desce 8 metros.

Converse com seu colega e registre a sequência numérica que pode modelar o problema e responda às seguintes questões:

8) A sequência é uma progressão especial? Por quê?

	ATIVIDADE 4		
	PROFESSOR (A): Edilaine Aguiar Lemos	ANO: 2º	TURMA: 2001

Nesse roteiro, vamos resolver juntos vários problemas e, assim desenvolveremos, e aprenderemos conceitos importantes em Matemática Financeira. Junte-se a um colega, leia com atenção o Problema 1 e vamos juntos nessa viagem!

• Uma pessoa toma um empréstimo no valor de R\$ 100,00. E foi combinado que o empréstimo seria quitado ao final de dois meses, com taxa de juros de 10% a.m. Qual será o valor a ser pago para a quitação do empréstimo?

Problema 1



Fonte: <http://www.sxc.hu/photo/1302510> - G Schouten de jel

1) Tente resolver o problema 1 acima e compare a sua resposta com a de seu colega. Vocês chegaram a mesma conclusão?

Aqui foram apresentados dois sistemas de cálculo de juros, Juros Simples e Compostos.

É possível que se pergunte então: Em quais situações são usados os Juros Simples?

Em geral, as instituições financeiras e comerciais trabalham com o sistema de Juros Compostos. Mas existem situações em que os cálculos são feitos no sistema de Juros Simples. Ao ser pago um título de R\$ 100,00, menos de trinta dias após a data de vencimento, o montante a ser pago será calculado com Juros Simples.

2) Agora, calcule o valor a ser pago por um título de R\$ 100,00, seis dias após o vencimento, sabendo-se que a taxa de juros do título é de 12% a.m.

Problema 2

1) Complete a tabela a seguir, sabendo-se que Rodrigo tomou um empréstimo de R\$ 1.000,00 com uma taxa de juros de 15% a.m.

Mês	Dívida	Razão entre a dívida de um mês e a do mês anterior
0	1.000,00	-----
1		
2		
3		
4		

2) Ao realizar os cálculos e preencher a tabela, o que você percebeu com relação aos números da terceira coluna da tabela?

3) No mês 0 a dívida era de R\$ 1.000,00, para obter o valor da dívida no mês 1, devo fazer a multiplicação de R\$ 1.000,00 por qual número?

4) No mês 2 a dívida era de R\$ 1.322,50, para calcular o valor da dívida no mês anterior, ou seja, no mês 1, devo efetuar a divisão de R\$ 1.322,50 por qual número?

Você deve ter percebido que, nesse problema, para calcular o valor da dívida no mês seguinte, basta multiplicar o valor da dívida atual por 1,15. Analogamente, para calcular o valor da dívida no mês anterior, basta dividir o valor da dívida atual por 1,15.

5) Assim, no sistema de Juros Compostos de taxa i , um valor M_0 transforma-se, após um período de tempo, em _____.

6) Analogamente, no sistema de Juros Compostos de taxa i , um valor futuro M_1 deve ser dividido por _____, para que se descubra o valor atual M_0 .

Temos então a Fórmula Fundamental da Equivalência de Capitais:

7) Para obter o valor futuro, depois de um período de tempo, basta multiplicar o valor atual por _____.

8) Para obter o valor atual, em um período de tempo, basta dividir o valor do valor futuro por _____.

• João tomou uma dívida emprestada no mês de junho com a taxa de juros de 5% a.m. No entanto, espantou-se ao perceber que sua dívida no mês de outubro já era de R\$ 6.685,28.

Problema 3



Fonte: <http://www.sxc.hu/photo/1359713> - mokra's

Considerando que não foram efetuados pagamentos relativos a essa dívida, preencha a tabela abaixo e calcule qual foi o valor emprestado no mês de junho.

Mês	Dívida
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	6685,28
Novembro	
Dezembro	

Use os conceitos que você acabou de aprender, para examinar a proposta contida no problema a seguir.

- Uma pessoa ao receber sua fatura de cartão de crédito viu a seguinte proposta de empréstimo:
“Agora seu cartão Matemacard tem mais uma facilidade! Neste mês, você pode parcelar sua fatura a uma taxa de 4,9% a.m e Custo Efetivo Total de 87,23% a.a”

Problema 4



Fonte: <http://www.sxc.hu/photo/1316485> - James Miller

A partir da problemática apresentada, responda:

- 1) Uma taxa de juros de 4,9% a.m gera uma taxa anual maior, menor ou igual a 87,23%? Por quê?
- 2) O que, em sua opinião, pode ocasionar o fato de a taxa anual ser diferente do Custo Efetivo Total?