

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**  
**FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**  
**COLÉGIO: C.E. Cardeal Arcoverde**  
**PROFESSORA: Janete Maria Jesus de Sá**  
**MATRÍCULA: 0825192-8**  
**SÉRIE: 2ª série do Ensino Médio**  
**TUTOR: Paulo Alexandre Alves de Carvalho**  
**GRUPO: 4**

**PLANO DE TRABALHO SOBRE REGULARIDADES NUMÉRICAS:**  
**SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA**

Janete Maria Jesus de Sá

janetemjdesa@ig.com.br

## **1. Introdução**

É importante apresentar ao aluno a ideia da regularidade, como algo previsível. Basta observar o padrão que obedece cada regularidade, para que o aluno seja capaz de definir o próximo termo ou um termo qualquer. Trabalhar os números quadrados e triangulares, a partir de desenhos de pontos que formam tais figuras geométricas que aumentam de dimensão, proporciona ao aluno a observação, investigação e raciocínio lógico necessários para a compreensão dessas regularidades numéricas. Logo em seguida o aluno se depara com situações práticas que envolvem progressões aritméticas e posteriormente, progressões geométricas.

Na Matemática Financeira situações que envolvem o cálculo de juros simples ou compostos apresentam também essa regularidade numérica.

Ao invés de apresentar o conteúdo pronto para o aluno, trabalhando somente exemplos apenas numéricos sem nenhuma contextualização; será feita uma abordagem que consiste em apresentar uma situação para que o aluno com o auxílio do professor e através da observação e do raciocínio chegue ao termo geral da progressão.

A história de Gauss é uma ótima forma de incentivar o aluno a aprendizagem, pois se uma criança pôde encontrar a fórmula da soma dos termos da progressão aritmética, o que são algumas aplicações para resolver.

## Desenvolvimento

### Atividade 1:

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico e cálculos.

Descritores:

H41- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).

- **Pré-requisitos:**

Operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e potência.

- **Tempo de Duração:**

2 tempos de aula (no ensino noturno corresponde a 90 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Notebook e Data Show.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

- Levar o aluno a observar as figuras geométricas;
- Levar o aluno a escrever as sequências de acordo com a contagem de pontos da figura;
- Levar o aluno ao conhecimento dos números quadrados e triangulares;
- Levar o aluno perceber o padrão da regularidade numérica;
- Levar o aluno a definir a expressão algébrica da regularidade numérica;
- Levar o aluno a comparar as regularidades numéricas;
- Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

- **Metodologia adotada:**

- Divisão da turma em duplas;
- O professor projetará através do Data Show partes do Roteiro 1 para junto a turma fazer a leitura. Cada dupla irá responder as perguntas numa folha de papel e as tabelas serão reproduzidas e completadas;

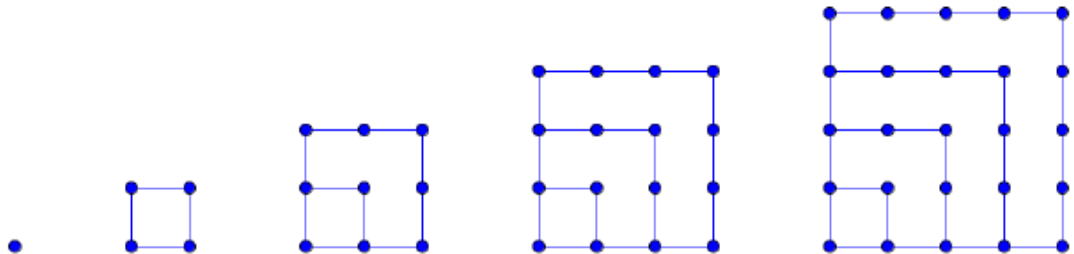
Os membros da Escola Pitagórica, também chamados de Pitagóricos, tinham como forte crença que todas as coisas seriam expressas por números. Nesse pensamento, todos os números, ou seres, poderiam ser formados a partir do Um, o menor número que pode ser expresso.

Os chamados números figurados possuíam um importante papel dentro da filosofia pitagórica. Esses números eram figuras formadas por uma sequência de pontos dispostos segundo formas geométricas. O estudo das relações expressas pelos números figurados pode ser bastante frutífero para o aprendizado de diversos conceitos em Matemática.

Entremos, então, no mundo aberto pelos Pitagóricos e descubramos juntos o que os números podem nos ensinar. Analisemos as questões a seguir.

1ª Questão:

A sequência de figuras abaixo representa o que podemos chamar de sequência dos números quadrados. Por que você acha que esses números eram chamados por esse nome? Escreva abaixo de cada figura o número correspondente.



\_\_\_\_\_

2ª Questão:

Você saberia dizer quais são os números das outras posições? Qual seria o sexto termo? E o sétimo termo?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3ª Questão:

Para organizarmos melhor nosso pensamento, complete a tabela a seguir.

Posição	Termo da Sequência
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	
7	
8	
9	
10	
14	
20	

4ª Questão:

Como poderia ser representado o número que estivesse na posição  $n$  ? Tente escrever uma fórmula que o represente.

---

---

Em Matemática, essas expressões algébricas que caracterizam sequências numéricas são chamadas de *termo geral da sequência*.

Agora é com você!

5ª Questão:

Descreva as sequências definidas abaixo pelos seus respectivos termos gerais, explicitando os seus quatro primeiros termos.

a)  $a_n = n^3$

---

---

b)  $b_n = 2n$

---

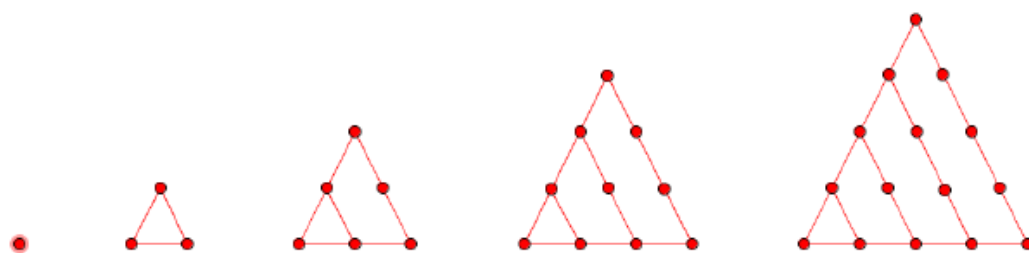
---

c)  $a_n = 4n - 1$

---

---

Investiguemos outra importante sequência de números figurados, também estudada pelos Pitagóricos, os números triangulares.



6ª Questão:

Explicita os termos da sequência dos números triangulares de acordo com a figura.

---

---

7ª Questão:

Observe os números da sequência e, tentando encontrar algum padrão que possibilite descobrir o próximo termo da sequência, complete a tabela abaixo.

Posição ( $n$ )	Termo da Sequência ( $T_n$ )
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	
7	
8	
9	
10	

Você deve ter observado que o primeiro número triangular  $T_1$  é 1, o segundo número triangular  $T_2$  é  $1 + 2 = 3$ , já o terceiro termo da sequência dos números triangulares é  $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$  e, assim por diante. Sendo assim:

8ª Questão:

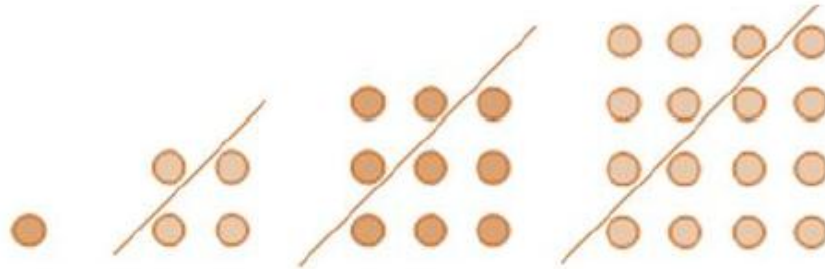
Generalize esse raciocínio, escrevendo uma sentença matemática para descobrir o número que ocupa a posição  $n$  da sequência dos números triangulares.

$$T_n = \underline{\hspace{10cm}}$$

Mas, existem ainda diversas relações entre os números figurados. Vamos estudar, em particular, uma relação entre os números triangulares e quadrados.

9ª Questão:

Na figura abaixo, estão representados os primeiros números quadrados. Observando essa representação, você percebe alguma relação entre os números quadrados e os triangulares?



10ª Questão:

Para continuarmos nossa investigação acerca da relação entre os números triangulares e quadrados, reveja o que você já aprendeu e complete a tabela a seguir:

$n$	$Q_n$	$T_{n-1}$	$T_n$
2	4	1	3
3	9	3	6
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

11ª Questão:

Você percebeu alguma relação entre os valores da segunda coluna da tabela com os valores das duas últimas colunas? Qual?

---

---

12ª Questão:

A partir da resposta ao item anterior, escreva uma sentença matemática associando  $Q_n$ ,  $T_{n-1}$  e  $T_n$ .

---

---

Observação: O Roteiro 1 foi adaptado, retirando questões que apresentam um grau maior de dificuldade. Todavia tal retirada não prejudica o sucesso da atividade.



## Atividade 2:

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico e cálculos.

Descritores:

H41- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).

H55- Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.

- **Pré-requisitos:**

Operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão);

Expressões numéricas;

Equações.

- **Tempo de Duração:**

4 tempos de aula ou uma semana de aula (no ensino noturno corresponde a 180 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Quadro branco, folha de papel e caneta.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

-Levar o aluno a interpretar uma situação do cotidiano;

-Levar o aluno ao raciocínio lógico;

-Levar o aluno a criar uma estratégia para resolver a questão;

-Levar o aluno perceber o padrão da regularidade numérica;

-Levar o aluno a construção do conhecimento a partir da organização dos dados da situação apresentada;

-Levar o aluno ao conhecimento de uma Progressão Aritmética, denominada de P.A., assim como suas características, classificação, razão e termo geral;

-Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

- **Metodologia adotada:**

1º- Divisão da turma em duplas;

2º- O professor colocará no quadro a seguinte questão:

*Quando completou 16 anos, Vitor decidiu comprar um novo aparelho de telefone celular, mas viu que só tinha R\$160,00 e decidiu que, a partir do mês*

*seguinte, reservaria R\$20,00 de sua mesada para adquirir o celular. É possível determinar o valor que Vitor terá guardado ao final do mês de seu próximo aniversário? Qual será esse valor?*

A dupla deve copiar a questão, interpretar, discutir e encontrar uma estratégia para responder a questão;

3º - Depois de todos chegarem ao resultado, o professor no quadro irá organizar matematicamente os dados, junto com os alunos, deduzir a fórmula do termo geral da P.A.:

$$a_1 = 160$$

$$a_2 = 160 + 20 = 180$$

$$a_3 = 160 + 2.20 = 160 + 40 = 200$$

$$a_4 = 160 + 3.20 = 160 + 60 = 220$$

.

.

.

$$a_{13} = 160 + 12.20 = 160 + 240 = 400$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

***Termo Geral da Progressão Aritmética (P.A.)***

4º - Logo em seguida passará mais uma questão contextualizada, onde agora os alunos deverão aplicar a fórmula:

***O financiamento de imóvel em dez anos prevê, para cada ano, doze prestações iguais. O valor da prestação mensal em um determinado ano é R\$20,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Sabendo que, no primeiro ano, a prestação mensal era de R\$200,00, determine:***

***a) o valor da prestação a ser paga durante o 5º ano;***

***b) o total a ser pago no último ano.***

5º - Depois da correção será construída a definição de P.A. com a turma no quadro, assim como exemplos numéricos e o cálculo da razão, classificando em crescente, decrescente ou constante;

6º - Mais um exercício contextualizado, interdisciplinar (Educação Física e História) e bem atual:

***A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá, apenas nos***

*anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido à 2ª Guerra Mundial. A Copa de 2014 será realizada no Brasil. Qual será a ordem do desse evento?*

Observação: Para o ensino da Soma dos n termos de uma P.A. será apresentada a seguinte questão:

*Para a compra de uma TV pode-se optar por um dos planos seguintes:*

*-plano alfa: entrada de R\$400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes, sendo a primeira de R\$35,00, a segunda de R\$50,00, a terceira de R\$65,00 e assim por diante.*

*-plano beta: 15 prestações mensais iguais de R\$130,00 cada.*

*Em qual dos planos o desembolso total é maior?*

Os alunos tentarão fazer. Alguns chegarão ao resultado correto, mas gastarão tempo e farão muitas contas. Nesse momento o professor irá contar a história de Carl F. Gauss (1777-1855) que aos 10 anos fez a tarefa proposta pelo seu mestre de somar todos os números de 1 até 100 em poucos minutos. Depois no quadro mostrará como Gauss observou que a soma dos termos equidistantes é sempre igual, logo basta multiplicar pela quantidade dos números dividida por dois. O professor fará o mesmo processo de forma genérica (algébrica) e deduzirá com a turma a fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

### Atividade 3:

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico e cálculos.

Descritores:

H41- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).

H55- Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.

- **Pré-requisitos:**

Operações fundamentais (multiplicação e divisão) e Potência;

Fatoração;

Equações exponenciais.

- **Tempo de Duração:**

4 tempos de aula ou uma semana de aula (no ensino noturno corresponde a 180 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Quadro branco, folha de papel e caneta.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

-Levar o aluno a interpretar uma situação do cotidiano;

-Levar o aluno ao raciocínio lógico;

-Levar o aluno a criar uma estratégia para resolver a questão;

-Levar o aluno perceber o padrão da regularidade numérica;

-Levar o aluno a construção do conhecimento a partir da organização dos dados da situação apresentada;

-Levar o aluno ao conhecimento de uma Progressão Geométrica, denominada de P.G., assim como suas características, classificação, razão e termo geral;

-Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

- **Metodologia adotada:**

1º- Divisão da turma em duplas;

2º- O professor colocará no quadro a seguinte questão:

*Uma empresa de telecomunicações planeja iniciar suas atividades em determinada região, comercializando pacotes de programa de TV por*

*assinatura. Sua meta para o primeiro ano de operações é vender 25 pacotes no primeiro mês, 50 pacotes no segundo mês, 100 pacotes no terceiro mês, e assim por diante. Qual é o número de pacotes de programa de TV por assinatura que serão vendidos no último mês do ano?*

A dupla deve copiar a questão, interpretar, discutir e encontrar uma estratégia para responder a questão;

3º - Depois de todos chegarem aos resultados, o professor no quadro irá organizar matematicamente os dados, junto com os alunos, deduzir a fórmula do termo geral da P.G.:

$$a_1 = 25$$

$$a_2 = 50 = 25 \cdot 2 = 25 \cdot 2^1$$

$$a_3 = 100 = 25 \cdot 2 \cdot 2 = 25 \cdot 2^2$$

$$a_4 = 200 = 25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 25 \cdot 2^3$$

.

.

.

$$a_{12} = 25 \cdot 2^{11} = 25 \cdot 2048 = 51200$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

***Termo Geral da Progressão Geométrica (P.G.)***

4º - Logo em seguida passará mais uma questão contextualizada, onde agora os alunos deverão aplicar a fórmula:

***O número de consultas a um site de comércio eletrônico aumenta semanalmente (desde a data em que o portal ficou acessível), segundo uma P.G. de razão 3. Sabendo-se que na 6ª semana foram registradas 1458 visitas, determine o número de visitas ao site registrado na 3ª semana.***

5º - Depois da correção será construída a definição de P.G. com a turma no quadro, assim como exemplos numéricos e o cálculo da razão, classificando em crescente, decrescente, constante, alternada ou oscilante, estacionária;

6º - Mais um exercício contextualizado e interdisciplinar (Biologia):

***Em uma reserva animal, a população de coelhos é de 295245. Uma infecção alastra-se rapidamente na reserva de modo que no 1º dia, há 5 vítimas; no 2º dia, há 15 vítimas; no 3º, 45 vítimas. Determine em quantos dias a população de***

***coelhos será dizimada:***

Observação: Para o ensino da Soma dos n termos de uma P.G. será apresentada a seguinte questão:

***Um indivíduo contraiu uma dívida de um amigo e combinou de pagá-la em oito prestações, sendo a primeira de R\$ 60,00, a segunda de R\$90,00, a terceira de R\$135,00, e assim por diante. Qual é o valor a ser pago?***

Os alunos tentarão fazer. Alguns chegarão no resultado correto, mas gastarão tempo e farão muitas contas. O Professor apresentará a fórmula (para  $q \neq 1$ ):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

E para P.G. de razão igual a 1, temos:

$$S_n = n \cdot a_1$$

E ainda para a soma dos termos de uma P.G. infinita com  $-1 < q < 1$ , temos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

#### **Atividade 4:**

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico e cálculos.

Descritores:

H41- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).

H54 – Resolver problemas envolvendo juros simples ou compostos.

H55- Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.

H68 – Resolver problemas que envolva porcentagem.

- **Pré-requisitos:**

Progressões;

Porcentagem;

Juros simples.

- **Tempo de Duração:**

2 tempos de (no ensino noturno corresponde a 95 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Quadro branco, folha de papel e caneta.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

- Levar o aluno a interpretar uma situação do cotidiano;

- Levar o aluno ao raciocínio lógico;

- Levar o aluno a criar uma estratégia para resolver a questão;

- Levar o aluno perceber o padrão da regularidade numérica;

- Levar o aluno a construção do conhecimento a partir da organização dos dados da situação apresentada;

- Levar o aluno a aplicação de porcentagem;

- Levar o aluno a distinguir juros simples de juros compostos;

- Levar o aluno a perceber a importância dos juros compostos para rendimentos;

- Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

- **Metodologia adotada:**

- 1º- Divisão da turma em duplas;

- 2º- O professor colocará no quadro a seguinte questão para que a dupla

desenvolva:

*Apliquei R\$ 500,00 na caderneta de poupança. Sabendo que, a partir do segundo mês, a taxa de juros incide sobre o montante acumulado no mês anterior e supondo a taxa de rendimento mensal fixa de 1% ao mês, complete a tabela abaixo:*

<i>Mês</i>	<i>Capital</i>	<i>Rendimento ou juros 1% ou 0,01(taxa)</i>	<i>Montante (soma do capital com o juro produzido no mês)</i>
<i>1º</i>	<i>500</i>		
<i>2º</i>			
<i>3º</i>			
<i>4º</i>			

3º - Analise e responda:

*Procure perceber com qual progressão você pode associar esta situação. Qual é o primeiro termo e a razão?*

4º - O professor pedirá que reescrevam apenas a primeira linha da tabela fazendo as seguintes alterações:

Substitua os R\$ 500,00 por C e a taxa de 1% ao mês por i, calculando o valor do montante.

5º - O professor perguntará como pode melhorar o resultado de M (colocar C em evidência):

$$C \cdot (1 + i)$$

6º - Então o professor pedirá que tornem a calcular o montante, desta vez aplicando na expressão encontrada acima;

Concluindo que ao invés de multiplicar o capital – C (R\$ 500,00) pela taxa – i (0,01) e o resultado – juros adicionar com o capital para definir o montante; basta multiplicar o capital pelo valor da taxa somada a uma unidade (corresponde ao capital inicial) que já surge o valor do montante;

7º - Refaça seus cálculos (preenchendo a tabela), tendo agora a razão **q** desta P. G. o valor da taxa acrescido de um, **n - 1** sendo o tempo e o primeiro termo o capital;

<i>Mês=t</i>	<i>Capital = C</i>	<i>Rendimento ou juro = i</i>	<i>Montante = M</i>
<i>n-1</i>	<i>a<sub>1</sub></i>	<i>(1+i) = q</i>	<i>a<sub>n</sub> = a<sub>1</sub> · q<sup>n-1</sup></i>
<i>1º</i>	<i>500</i>	<i>1,01</i>	<i>a<sub>1</sub> = 500 · (1,01)<sup>1</sup></i>
<i>2º</i>			
<i>3º</i>			
<i>4º</i>			

Logo temos que:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$



### **3. Avaliação**

O professor poderá atribuir 2,0 pontos para os alunos que participaram de maneira plena das atividades, tendo como critério da avaliação os seguintes itens:

#### *Atividade 1*

0,5 – a dupla respondeu e preencheu corretamente as questões (H41).

#### *Atividade 2*

0,5 – a dupla resolveu as questões corretamente e participou do desenvolvimento da aula (H41 e H55).

#### *Atividade 3*

0,5 – a dupla resolveu as questões corretamente e participou do desenvolvimento da aula (H41 e H55).

#### *Atividade 4*

0,5 – a dupla preencheu as tabelas corretamente (H41, H54, H55 e H68).

#### 4. Referências

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática ciência e aplicações*. Volume 1. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 194-240.

MOURA, Maria Auxiliadora Lage. *Investigando Padrões em P.A. e P.G.*. Mestrado em Ensino de Matemática PUC – Minas. Fundação Comunitário de Ensino Superior de Itabira – Funcesi. Disponível em <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Minicurso/Trabalhos/MC37297120634T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC37297120634T.doc)> Acesso em: 06 maio 2013.

Roteiro de Ação 1: *Pitágoras e as Regularidades Numéricas*. 2ª ano. 2º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 3: *Duas Sequências e uma Sequência Especial*. 2ª ano. 2º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 4: *Mais duas Situações e outra Sequência Especial*. 2ª ano. 2º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 5: *Resolvendo Problemas com Matemática Financeira*. 2ª ano. 2º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.