CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO

Regularidades Numéricas: Sequências

Aluna: Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha

Grupo: 1

Tutor: Cláudio Rocha de Jesus

2°Bimestre – 2°Ano do Ensino Médio

06/06/2013

Sumário

PLANO DE TRABALHO SOBRE INTRODUÇÃO A GEOMETRIA ESPACIAL

[Maria Bernadete Dias Manhães Pessanha]

[mbdmpessanha@gmail.com]

Duração prevista: 3 semanas

INTRODUÇÃO

A proposta deste plano é a de oferecer a nossos alunos uma compreensão simultaneamente variada e interessante. Oferecendo algumas sugestões metodológicas que podem ser utilizadas no ensino de Regularidades Numéricas: Sequências e Matemática Financeira. Desenvolvido com o intuito de criar alternativas de abordagem em sala de aula.

Com realização das atividades propostas, deseja-se alcançar do aluno o desenvolvimento a compreensão do conceito de regularidades numéricas, estimulando a interação entre os alunos e o professor, por meio da troca de ideias, discussões e resolução de situações problemas do cotidiano com o intuito de expandir esses conhecimentos.

As sequências numéricas são muito comuns em nosso dia a dia. Elas estão presentes na organização dos dias do ano em um calendário, por exemplo. Também são de fundamental importância em situações que envolvem dinheiro, objeto de estudo da Matemática Financeira.

Nesse plano consta dois tipos de sequências numéricas: as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG). Essas progressões modelam fenômenos que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Vamos discutir situações cotidianas que envolvem sequências para que o estudo seja mais prazeroso e a aprendizagem mais eficaz.

DESENVOLVIMENTO:

Um pouco de teoria

É muito fácil contextualizar o assunto progressões, pois vários tipos de sequências fazem parte do cotidiano. Os padrões que observamos em algumas sequências são chamados leis de formação. Essas leis de formação podem ser definidas:

Vamos pensar na situação proposta abaixo:

Imagine que uma companhia que administra rodovias quer colocar radares eletrônicos ao longo dos 500 km de sua estrada. Para tanto, a concessionária faz o seguinte plano: o primeiro radar será colocado no quilômetro 10 da estrada, o segundo no quilômetro 50, o terceiro no quilômetro 90, e assim por diante. Quantos radares a empresa necessitará adquirir? O que você percebeu em relação aos números correspondentes aos radares?

____

____

Essa situação nos faz refletir que em diversas sequências tem-se que a diferença entre seus termos seja constante.

É importante notar que a diferença entre um termo e o seu anterior é constante e que, conhecido um termo da PA, para avançar um termo basta somar a razão r.

A ideia é que a lei de formação de uma PA vale independentemente se começamos a trabalhar com o primeiro ou o décimo termo.

Para definir uma Progressão Aritmética temos a fórmula abaixo, considerando um número qualquer, temos:

$\mathbf{a_1 = a}$

$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$, para todo n € N, n > 1.

Desta forma, chamamos de progressão aritmética a toda sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r. Essa constante é chamada de razão.

Outra pergunta interessante: quantos jogos há na primeira fase do campeonato brasileiro de futebol, que é disputado por 24 clubes, onde quaisquer dois times jogam entre si uma única vez?

____

____

Se o time A joga 23 vezes, o time B joga (sem contar a partida com o time A) 22 vezes e, assim por diante. A resposta então é a soma da PA:

Resposta: $23 + 22 + 21 + ... + 1 + 0 = \frac{(23 + 0) \cdot 24}{2} = 276$

RECORDAR UM FATO INTERESSANTE

"Gauss e seu castigo matemático"

Conta à lenda, que Gauss (1777-1855) aos sete anos de idade teve que somar os números naturais de 1 a 100. Esta foi à forma que seu professor viu de acalmar sua turma. Porém o garoto Gauss era um prodígio e, em poucos minutos, entregou o resultado correto.

Em geral, se pedirmos para os alunos calcularem a soma **1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100**, eles o fazem de forma linear, não se aproveitando das propriedades que a adição de números naturais possui. Gauss se aproveitou da comutatividade e da associatividade da soma de números naturais para matar o problema.

Gauss então observou que ele tinha 50 somas de valor 101, chegando ao resultado de 5050, que ele prontamente entregou ao seu professor que ficou surpreso. Basicamente essa é a ideia mais simples para somar os n primeiros termos de uma PA **(ir somando pelos extremos, pois todas as somas serão iguais).**

Devemos ficar atentos para somas desse para o fato de que a **soma de números tem propriedades muito úteis.** Uma delas é a **associatividade**, que permite que somemos os termos que nos interessem primeiro. Outra também muito útil e muito bem utilizada pelo menino Gauss é a **comutatividade.** Com estas duas propriedades, ele habilmente percebeu que poderia fazer a soma de uma forma mais esperta:

Vamos ver como Gauss percebeu rapidamente que a soma de todos os números de 1 a 100 resulta em 5.050. Para isso, vamos somar os termos de dois em dois, de uma forma bem especial. Veja:

1	***+***	***100***	***=***	***101,***
2	+	99	=	101,
3	+	98	=	101,
4	+	97	=	101,
			.	
			.	
			.	
47	+	54	=	101,
48	+	53	=	101,
49	+	52	=	101,
50	+	51	=	101.

Nas somas acima, ocupando o lugar da primeira parcela temos todos os números de 1 a 50. No lugar da segunda parcela, temos todos os números de 51 a 100. São 50 somas e cada uma delas resulta sempre no mesmo número: 101. Portanto, para somar todos os números de 1 a 100 basta somar 50 vezes 101, isto é, calcular 50 x 101 = 5050.

ESQUEMATIZANDO

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

$$S_n = \frac{n\,(\cdot a_1 + a_n)}{2}.$$

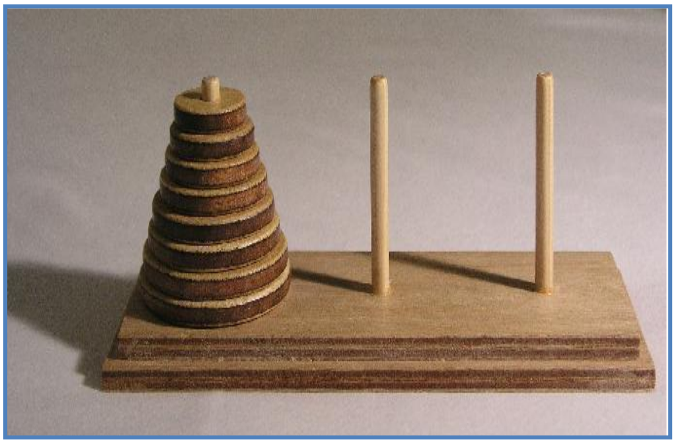
FALANDO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Você já ouviu falar do jogo Torre de Hanói? É com este jogo que iremos discutir a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Reza a lenda, que em um templo Hindu (no centro do universo), Fuças havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Fuças ordenou que se passassem todos os discos de uma estaca para outra respeitando duas instruções:

- Apenas um disco pode ser movido por vez;
- Nunca um disco maior pode ficar por cima de um disco menor.

Ainda segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria e o mundo desapareceria. Daí um novo mundo viria à tona, o mundo de Hanói.



Neste jogo, existe uma quantidade mínima de movimentos possíveis para vencer o jogo. E para calcular esse número, se faz necessário conhecer a soma de uma progressão geométrica finita.

Aqui dar-se uma ideia sucinta de como calcular este número. Para isto, pensaremos nos níveis da torre completa. Por exemplo, teremos o nível 1 quando completamos uma torre com uma única peça (a menor de todas), teremos nível 2, ao completarmos a torre com a menor peça em cima da segunda menor peça. E, assim por diante.

Quanto às progressões geométricas, como a razão entre seus termos (e −1) é constante, podemos defini-las pela fórmula:

$_1$ =

$_n$ = $_{-1}$. q, para todo €N, >1

Esta fórmula é útil, para que você - estudante perceba que dado um termo qualquer da PG e sua razão, podemos encontrar qualquer outro termo, seja dividindo por potências de q, se o termo que queremos for anterior na sequência, ou multiplicando por potências de q, se o termo for posterior.

ESQUEMATIZANDO

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Atividade 1:

Roteiro 1 - Pitágoras e as Regularidades Numéricas

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

OBJETIVOS: Identificação de regularidades numéricas e entendimento da associação entre sequências numéricas e a expressão algébrica de seu termo geral.

PRÉ-REQUISITOS: Operações Fundamentais (soma, subtração, multiplicação, divisão)

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

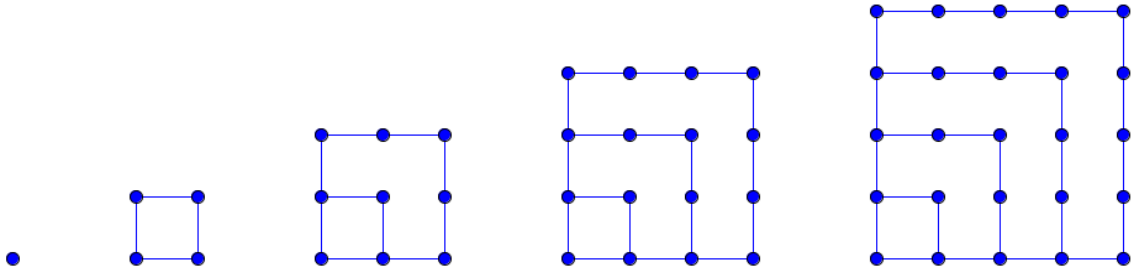
HABILIDADE E COMPETÊNCIA: Identificar sequências numéricas e obter a expressão algébrica do seu termo geral.

METODOLOGIA ADOTADA:

Observamos que existem fenômenos previsíveis e outros que são caóticos. Aqui, nós iremos discutir sequências de números totalmente previsíveis. Para determinar todos os seus elementos, basta conhecermos algum (não necessariamente o primeiro) de seus elementos e a regra de formação da sequência. Ou seja, temos total controle do que ocorrerá no momento seguinte.

1- A sequência de figuras abaixo representa o que podemos chamar de sequência dos números quadrados. Por que você acha que esses números eram chamados por esse nome? ___________________

Escreva abaixo de cada figura o número correspondente.



_______ _________ _________ ___________ ___________

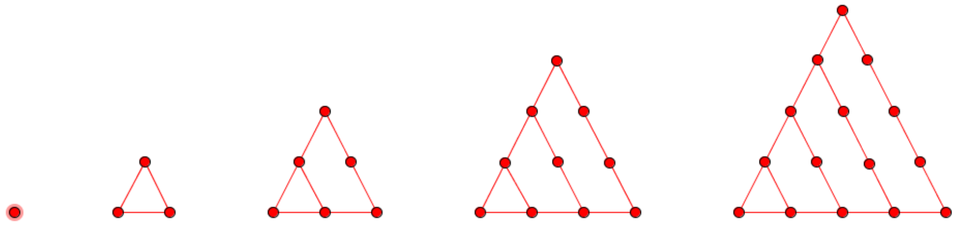
a) Você saberia dizer quais são os números das outras posições? __________Qual seria o sexto termo? __________E o sétimo termo? _______________

Observação: Espera que o aluno tenha entendido a relação entre o termo geral de uma sequência e a própria sequência que a caracteriza. (Espera-se que o estudante descreva as sequências acima como: a)1, 8, 27, 81, ... b) 2, 4 , 6 8 ,....

b) Como poderia ser representado o número que estivesse na posição n? Tente escrever uma fórmula que o represente. __________________________

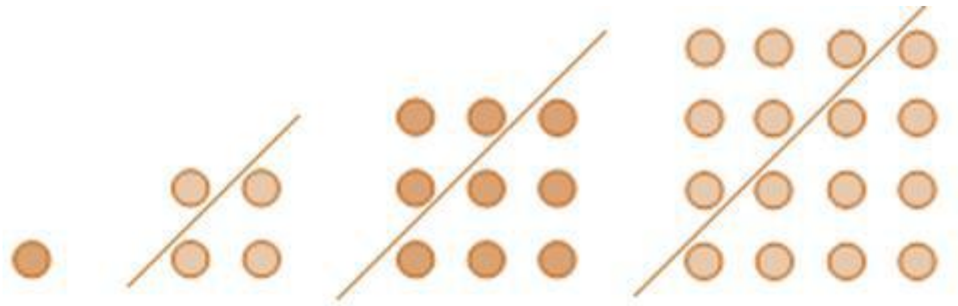
Em Matemática, essas expressões algébricas que caracterizam sequências numéricas são chamadas de *termo geral da sequência*.

2- Outra importante sequência de números figurados, também estudada pelos Pitagóricos, os números triangulares. Explicite os termos da sequência dos números triangulares de acordo com a figura.



_____ ______ ________ ________ ________

3- Na figura abaixo, estão representados os primeiros números quadrados. Observando essa representação, você percebe alguma relação entre os números quadrados e os triangulares? ____



Observação: Percepção visual de que cada número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos. A soma de dois números triangulares consecutivos resulta em um número quadrado.

Atividade 2:

ROTEIRO 3

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ASSUNTO: Regularidades numéricas- Progressões Aritméticas

OBJETIVOS: Entendimento das propriedades e conceitos relacionados às Progressões Aritméticas

PRÉ-REQUISITOS: Sequências Numéricas

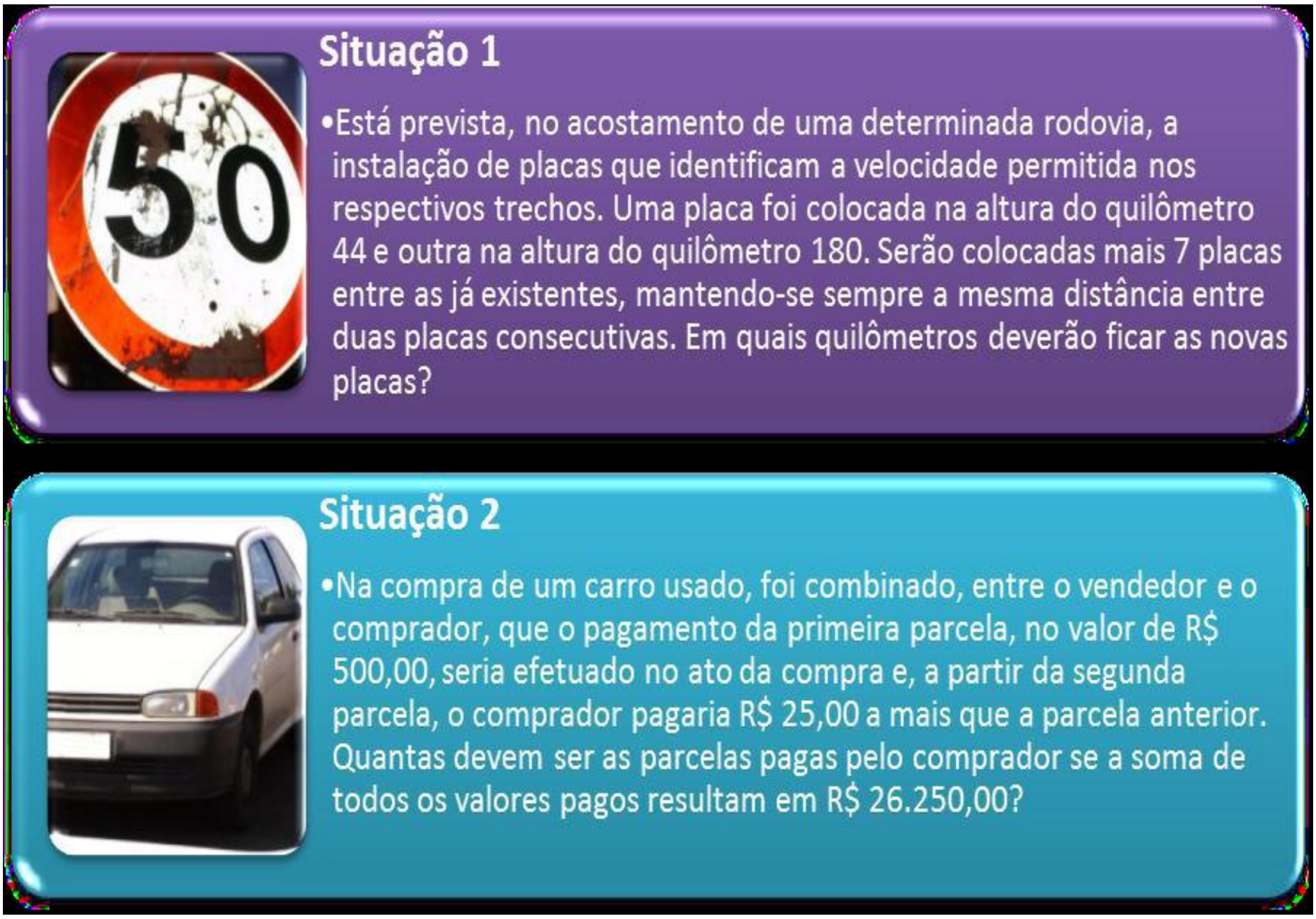
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

HABILIDADE E COMPETÊNCIA: Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.

METODOLOGIA ADOTADA:

Consideremos as seguintes situações-problema:



1) Após ler com atenção cada uma das situações, tente identificar as características principais de cada problema. Em sua visão, quais são as semelhanças entre os problemas?_________ _______________________E em que eles se diferenciam? ______________________________

2) Ao colocarmos os dados do problema em uma Progressão Aritmética qual seria o primeiro termo da sequência, ou seja, qual seria o valor de a_0? ___________________

3) Qual será a posição do número 180? ___________________________

4) Tente escrever o termo geral desta sequência. _________________________________

5) Uma vez que conhecemos o primeiro e o último termo da Progressão Aritmética, qual é o valor de sua razão? __________________________________

6) Agora que você já conhece o primeiro termo e a razão, responda: Em quais quilômetros deverão ser colocadas as novas placas?________________________________

CONCLUSÃO - Você já percebeu que $a_0 = 44$ e $a_8 = 180$, pois existem 7 placas entre a primeira e a última, totalizando 9 placas. Portanto, uma vez conhecidos o primeiro termo e a razão, os outros termos da sequência estão automaticamente determinados. Assim, as placas deverão ser colocadas nos quilômetros 44, 61, 78, 95,112,129,146,163,180. Pois fazendo $a_8 = a_0 + 8r \rightarrow$ temos $r = 17$

Ao relermos a Situação 2, vemos que podemos modelá-la por uma PA, pois o valor de cada prestação é a soma do valor da prestação anterior com 25. Contudo, a situação leva em consideração a soma de todas as parcelas. Surge, então, outra questão?_________

Existe uma expressão que forneça a soma de todos os termos de uma PA?

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Um problema parecido com esse foi resolvido, de forma pitoresca e genial, pelo grande matemático Carl Friedrich Gauss. (Situação apresentada nas páginas 5 e 6 do PT). Seu esplêndido raciocínio pode ser descrito da seguinte forma. Gauss percebeu que os termos equidistantes possuíam a mesma soma.

Reparem como o raciocínio de Gauss, nos fez descobrir o resultado da soma dos termos de uma PA finita.

Voltemos à situação que gerou nossa conversa. Responda às seguintes questões, as quais nos levarão a resolver, finalmente, a Situação 2.

7) Considerando que os valores de cada prestação podem constituir-se em termos de uma PA, responda:

a) Qual será o primeiro termo da PA? ________________

b) Qual será a razão da respectiva Progressão? __________________

c) Qual é a soma dos termos da PA? __________________________

d) Qual será o valor da última prestação em função de n, ou seja, qual é o termo geral dessa PA? _____________________________

Uma sequência numérica é chamada de Progressão Aritmética (PA), quando cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante. Essa constante, que indicaremos por *r*, é denominada razão da Progressão Aritmética.

Atividade 3:

ROTEIRO 4

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ASSUNTO: Regularidades numéricas - Progressões Geométricas

OBJETIVOS: Entendimento das propriedades e conceitos relacionados às Progressões Geométricas

PRÉ-REQUISITOS: Sequências Numéricas

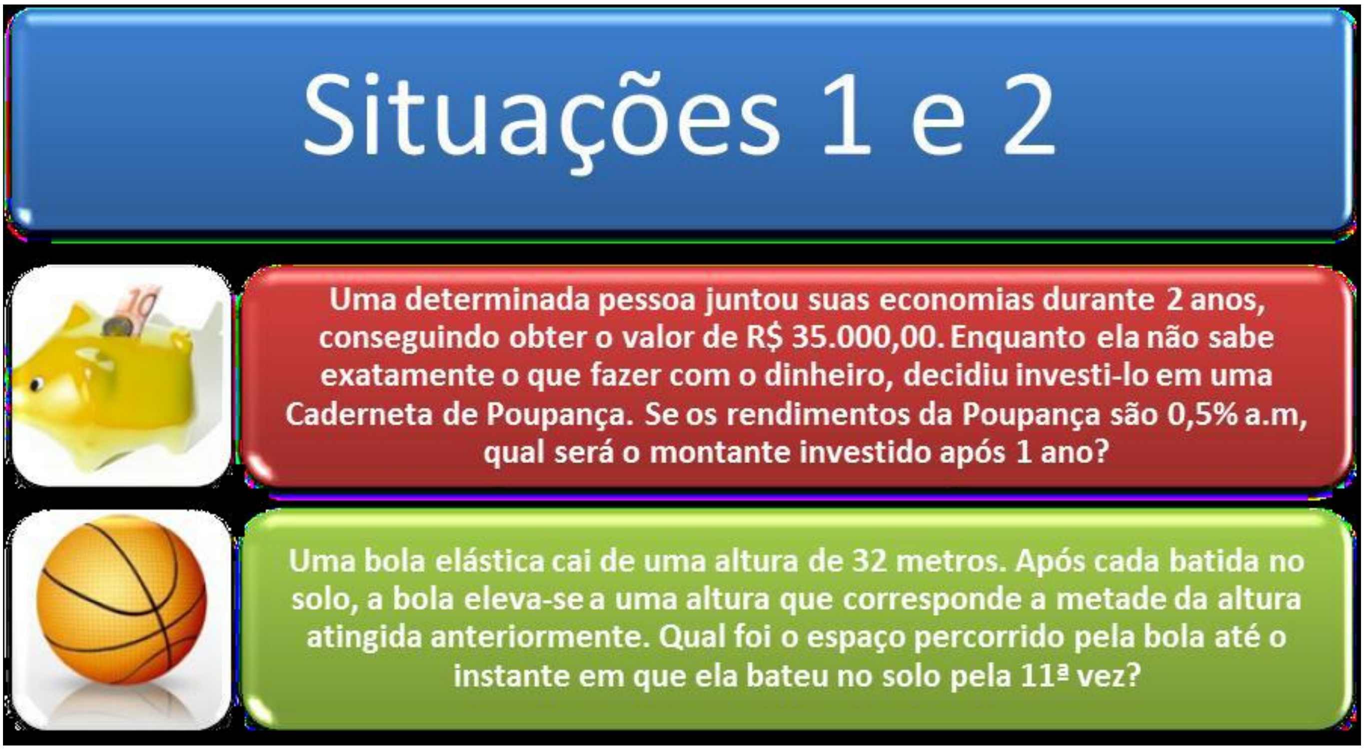
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

HABILIDADE E COMPETÊNCIA: Diferenciar Progressão Aritmética de Progressão Geométrica.

METODOLOGIA ADOTADA:

Leia com atenção cada uma das situações-problema e junte-se com seu colega para iniciarmos nossa investigação**.**



Analisemos, inicialmente, a Situação 1. Ela nos traz um problema de Matemática Financeira bastante relevante, principalmente por ser um problema comum que qualquer pessoa consegue se imaginar contextualizado. Pode-se notar que, na realidade, tal problema é calculado considerando juros compostos, ou como é chamado popularmente, “juros sobre juros”.

Por outro lado, podemos visualizar o montante obtido a cada mês como um termo de uma sequência numérica.

Tente responder:

1) Dentro desse raciocínio qual seria o primeiro termo da sequência? ___________________

2) Encontre os três primeiros termos da sequência. _________________________________

3) Descreva, em breves palavras, como você procederia para encontrar cada termo da sequência. ____

4) Você consegue observar alguma característica especial nessa sequência? Qual? ________

____

5) O que acontece quando dividimos um termo da sequência pelo seu termo anterior? _______

____

Você deve ter notado que a sequência que nos levará a resolver o problema colocado na Situação 1 possui uma propriedade muito especial, cada termo é obtido pelo produto do termo anterior por uma constante fixa.

Assim, toda sequência numérica que possui tal propriedade recebe um nome especial. Elas são chamadas de *Progressões Geométricas* ou, simplesmente, *PG*.

Uma sequência numérica é chamada de Progressão Geométrica (PG), quando cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante. Essa constante, que indicaremos por *q*, é denominada razão da Progressão Geométrica.

Atividade 4:

ROTEIRO 5

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ASSUNTO: Matemática Financeira

OBJETIVOS: Entendimento dos conceitos de Juros Simples e Compostos. Resolução de problemas com o uso da Matemática Financeira.

PRÉ-REQUISITOS: Porcentagem

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de atividades, régua, calculadora, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

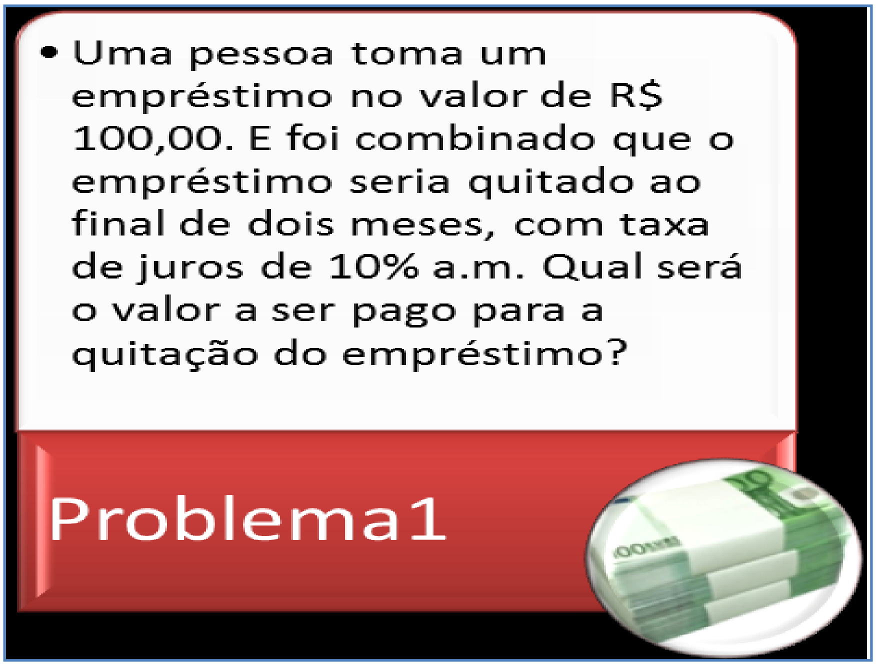
HABILIDADE E COMPETÊNCIA: - Distinguir os juros simples dos compostos, aplicando em situações problemas.

- Utilizar os conceitos de matemática financeira para resolver problemas do dia a dia.

METODOLOGIA ADOTADA:

PROBLEMA 1

Matemática financeira – Leia atentamente o problema:



Tente resolver o problema 1 acima e compare a sua resposta com a de seu colega. Vocês chegaram à mesma conclusão?_____________________________

Observação: O problema acima pode ser resolvido por dois sistemas de cálculo de juros, Juros Simples e Compostos. Pois não foi especificado no enunciado.

Em quais situações são usados os Juros Simples? Em geral, as instituições financeiras e comerciais trabalham com o sistema de Juros Compostos. Mas existem situações em que os cálculos são feitos no sistema de Juros Simples. Ao ser pago um título de R$ 100,00, menos de trinta dias após a data de vencimento, o montante a ser pago será calculado com Juros Simples.

PROBLEMA 2

Complete a tabela a seguir, sabendo-se que Rodrigo tomou um empréstimo de R$ 1.000,00 com uma taxa de juros de 15% a.m.

Mês	Dívida	Razão entre a dívida de um mês e a do mês anterior
0	**1000,00**	
1		
2		
3		
4		

2) Ao realizar os cálculos e preencher a tabela, o que você percebeu com relação aos números da terceira coluna da tabela?

____

____

3) No mês 0 a dívida era de R$ 1.000,00, para obter o valor da dívida no mês 1, devo fazer a multiplicação de R$ 1.000,00 por qual número?

____

4) No mês 2 a dívida era de R$ 1.322,50, para calcular o valor da dívida no mês anterior, ou seja, no mês 1, devo efetuar a divisão de R$ 1.322,50 por qual número?

____

Observação: Você deve ter percebido que, nesse problema, para calcular o valor da dívida no mês seguinte, basta multiplicar o valor da dívida atual por 1,15. Analogamente, para calcular o valor da dívida no mês anterior, basta dividir o valor da dívida atual por 1,15.

5) Assim, no sistema de Juros Compostos de taxa i, um valor M_0 transforma-se, após um período de tempo, em ____________.

6) Analogamente, no sistema de Juros Compostos de taxa i, um valor futuro M_1 deve ser dividido por _________, para que se descubra o valor atual M_0 .

Temos então a Fórmula Fundamental da Equivalência de Capitais:

7) Para obter o valor futuro, depois de um período de tempo, basta multiplicar o valor atual por _______________.

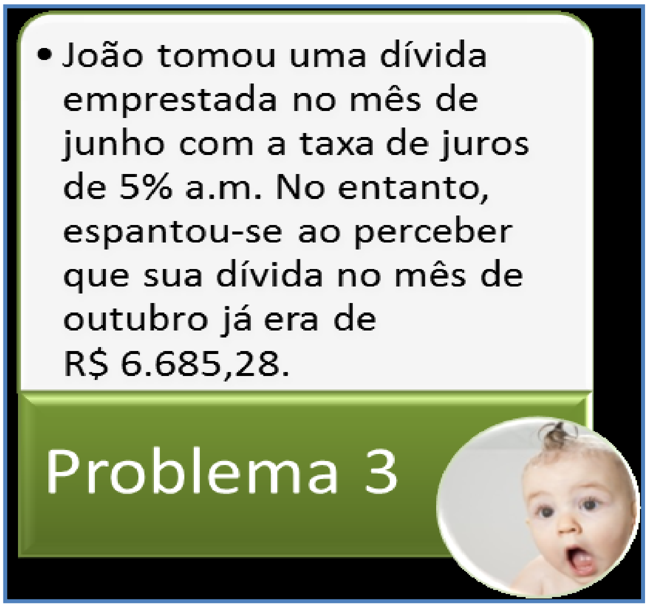
8) Para obter o valor atual, em um período de tempo, basta dividir o valor do valor futuro por__________.

Assim, nosso objetivo é que o estudante entenda que em um sistema de Juros Compostos com taxa de juros i :

→ Para obter o valor futuro, depois de um período de tempo, *basta multiplicar* o valor atual por 1 + i.

→ Para obter o valor atual, em um período de tempo, *basta dividir* o valor do valor futuro por 1 + i.

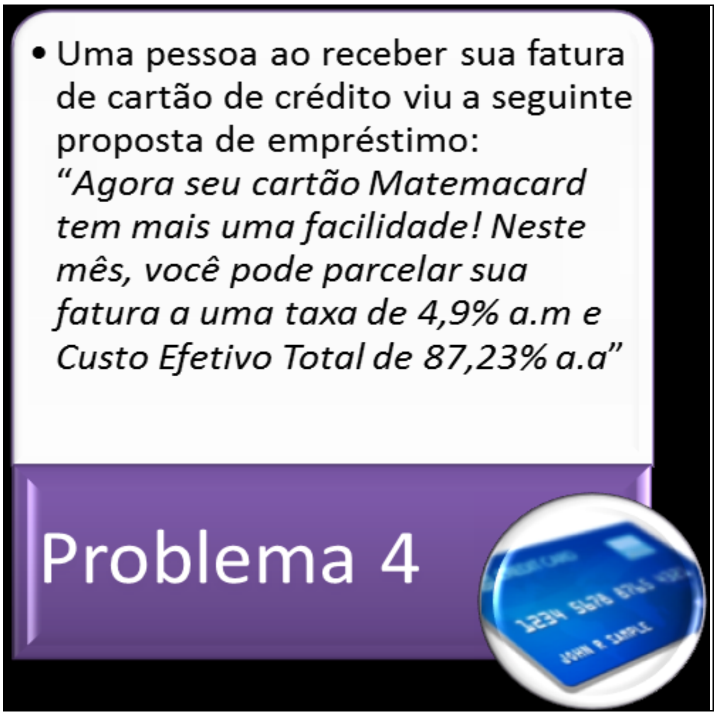
PROBLEMA 3



Considerando que não foram efetuados pagamentos relativos a essa dívida, preencha a tabela abaixo e calcule qual foi o valor emprestado no mês de junho.

MÊS	DÍVIDA
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	**6685,28**
Novembro	
Dezembro	

PROBLEMA 4



A partir da problemática apresentada, responda:

1) Uma taxa de juros de 4,9% a.m gera uma taxa anual maior, menor ou igual a 87,23%? Por quê?____

____

2) O que, em sua opinião, pode ocasionar o fato de a taxa anual ser diferente do Custo Efetivo Total?____

____

Observação: Uma explicação plausível para essa diferença é que a Instituição Financeira, ao realizar a operação de empréstimo, embute no valor das parcelas vários encargos e impostos além dos juros.

Atividade Extra

OBJETIVOS: Aprimorar os conhecimentos de PA e PG

DESCRITORES ASSOCIADOS: - Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas significativos.

<u>ENEM - 2011</u>

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

A) 38.000

B) 40.500

C) 41.000

D) 42.000 x

E) 48.000

Questão 40 M110073RJ

Observe abaixo o desenho de uma sequência formada por quadrados. Essa sequência segue um padrão.

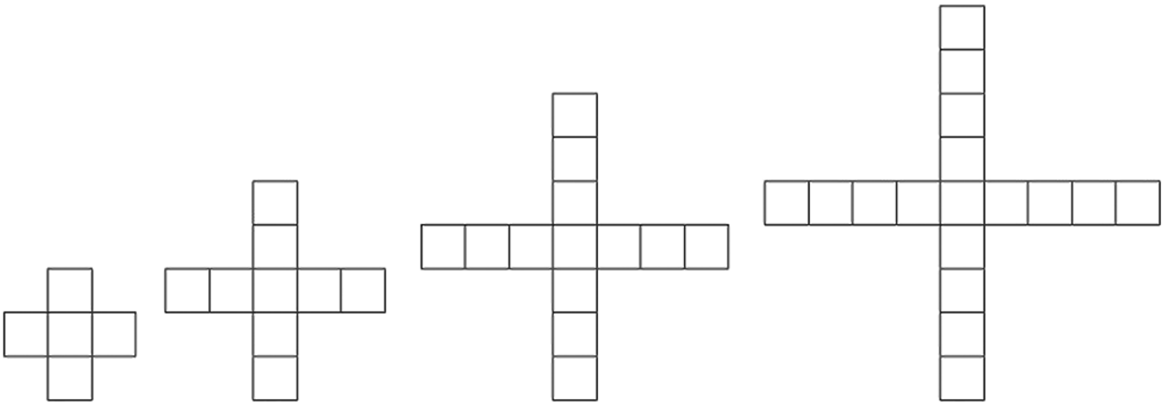


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Qual é a expressão que permite calcular o número de quadrados q das figuras dessa sequência de acordo com sua posição p?

A) q = p + 4
B) q = 4p
C) q = 4p + 1
D) q = 4p + 5
E) q = 5p

(PAMA11181MS) Um vazamento em uma caixa d´água provocou a perda de 3 litros no primeiro dia, 6 litros no segundo dia, 9 litros no terceiro dia, e assim sucessivamente. Quantos litros vazaram no sétimo dia?

A) 9

B) 12

C) 15

D) 18

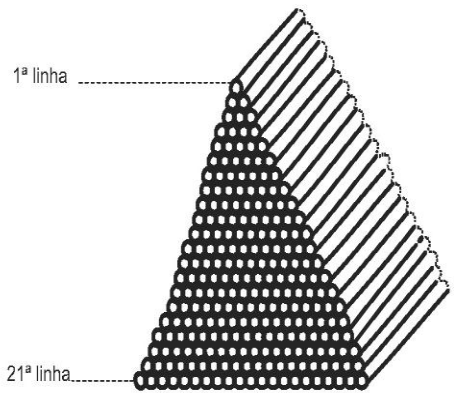
E) 21

(M120803A9) Carlos comprou uma casa financiada em 60 meses. A primeira prestação foi de R$ 800,00 e, a cada mês seguinte, o valor da prestação diminui R$ 2,50.
Sabendo que Carlos pagou todas as prestações em dia, quanto ele pagou pela casa?

A) R$ 652,50
B) R$ 947,50
C) R$ 43 575,00
D) R$ 48 000,00
E) R$ 52 425,00

Dados:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

(M120200ES) Os canos de PVC de uma empresa foram empilhados em sequência conforme a figura. Na primeira linha tem 1 cano e na 21ª linha foi empilhado 21 canos de PVC.



O número total de canos empilhados será igual a
A) 210
B) 231
C) 420
D) 441
E) 462

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita todos os dias, pois os alunos irão trabalhar em pequenos grupos e os mesmos irão discutir entre si os seus resultados onde vou avaliar o aproveitamento e sanar as dúvidas existentes.

Avaliar o desempenho do aluno no decorrer da sequência.

Propor ao aluno situações problemas e analisar a capacidade de resolver.

Avaliar o desempenho dos alunos nas atividades escritas.

FONTE DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 2º bimestre.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1.5 ed. Rio de Janeiro. 2000.

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio.1ª Série. 5ed. São Paulo. Saraiva. São Paulo. 2005

Side acessado em 01/05/2013. Disponível em: <http://download.rj.gov.br/documentos/10112/451413/DLFE-35010.pdf/OrientacoesPedagogicasSAERJINHO.pdf>