Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º ano – 2º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

REGULARIDADES NUMÉRICAS: SEQUÊNCIAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA

TAREFA 1 - Grupo 2

Cursista: Vanessa Gouvêa Zão

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

Sumário

1- INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem como o principal objetivo permitir que os alunos, aprendam de uma maneira diferente do habitual.

As atividades proposta aqui apresentam a álgebra com a finalidade de simplificar procedimentos de cálculos em uma situação prática na vida do aluno, contanto os alunos questiona o por quê? Para que serve? Aonde vou usar esse conteúdo? Com isso nos leva a buscar conhecimentos para mostrar o aluno que a matemática está inserida em todo momento na nossa vida. Que podemos aprender de uma maneira menos maçante e mais eficaz.

Devido essa falta de interesse na matemática que desenvolvo esse plano de trabalho, acreditando que podemos inverter essa situação propondo aqui situações problemas que irão despertar interesse.

2- DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1 – Pitágoras e as Regularidades Numéricas

Duração prevista: 100 minutos
Assunto: Regularidades Numéricas e Matemática Financeira.
Objetivos: Identificação de regularidades numéricas e entendimento da associação entre sequências numéricas e a expressão algébrica de seu termo geral.
Material necessário: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.
Organização da classe: Variando de acordo com a atividade, em dupla, e se for necessário um trio; individual e coletivo.
Descritores associados:

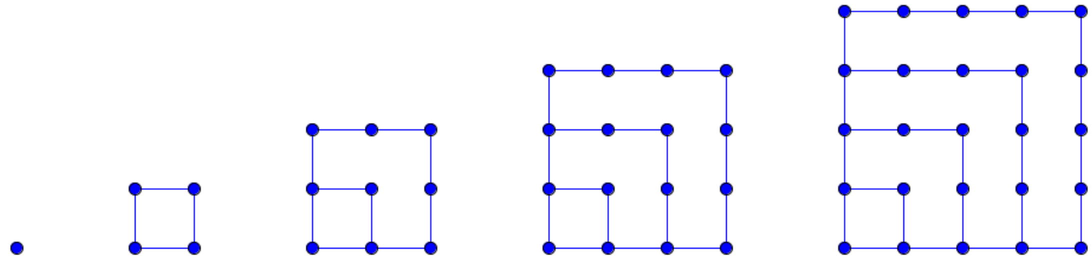
- **H41-** Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de úmeros (padrões).

Os membros da Escola Pitagórica, também chamados de Pitagóricos, tinham como forte crença que todas as coisas seriam expressas por números. Nesse pensamento, todos os números, ou seres, poderiam ser formados a partir do Um, o menor número que pode ser expresso.

Os chamados números figurados possuíam um importante papel dentro da filosofia pitagórica. Esses números eram figuras formadas por uma sequência de pontos dispostos segundo formas geométricas. O estudo das relações expressas pelos números figurados pode ser bastante frutífero para o aprendizado de diversos conceitos em Matemática.

Entremos, então, no mundo aberto pelos Pitagóricos e descubramos juntos o que os números podem nos ensinar. Analisemos as questões a seguir.

1) A sequência de figuras abaixo representa o que podemos chamar de sequência dos números quadrados. Por que você acha que esses números eram chamados por esse nome? Escreva abaixo de cada figura o número correspondente.



____________ ____________ ____________ ____________

Você deve ter observado que a sequência dos números quadrados utilizada na Grécia Antiga, pode ser representada, nos dias de hoje, por uma sequência numérica, nesse caso,1,4,9,16,25,...

Dessa forma, vimos que o primeiro número da sequência dos números quadrados é 1, o segundo número é o 4.

2) Você saberia dizer quais são os números das outras posições? Qual seria o sexto termo? E o sétimo termo?

____
____
____

3) Para organizarmos melhor nosso pensamento, complete a tabela a seguir.

Posição	**Termo da sequência**
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

4) Como poderia ser representado o número que estivesse na posição n
? Tente escrever uma fórmula que o represente.

____
____
____

- **Professor, nas perguntas acima, esperamos que o estudante perceba o padrão que caracteriza os números quadrados, entendendo que o sétimo termo da sequência será expresso por$7^2 = 49$e, de forma similar, o décimo e o décimo quarto termos da sequência serão$10^2 = 100 \; e \; 14^2 = 196$.**
  Talvez, exista uma dificuldade de entendimento que o número que está na posiçãoné representado porn^2.. Essa dificuldade, em geral, advém da passagem da linguagem aritmética para linguagem algébrica. O estímulo ao reconhecimento de padrões numéricos é sempre uma excelente estratégia.

A expressão algébrica é suficiente para caracterizar a sequência numérica a qual está vinculada.

Em Matemática, essas expressões algébricas que caracterizam sequências numéricas são chamadas de termo geral da sequência.

Agora é com você!

5) Descreva as sequências definidas abaixo pelos seus respectivos termos gerais, explicitando os seus quatro primeiros termos.

a) $a_n = n^3$

____

____

____

b) $b_n = 2n$

____

____

____

c) $a_n = 4n - 1$

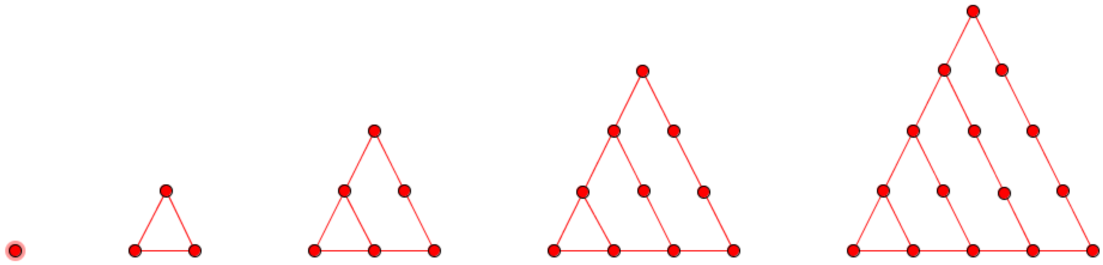
____

____

____

- **Professor, sugerimos que, nesse ponto, seja verificado se o aluno entendeu a relação entre o termo geral de uma sequência e a própria sequência que a caracteriza. Espera-se que o estudante descreva as sequências acima como:**
  a) 1,8,27,81,...
  b) 2,4,6,8,...
  c) 3,7,11,15,...

Investiguemos outra importante sequência de números figurados, também estudada pelos Pitagóricos, os números triangulares.



6) Explicite os termos da sequência dos números triangulares de acordo com a figura.

____

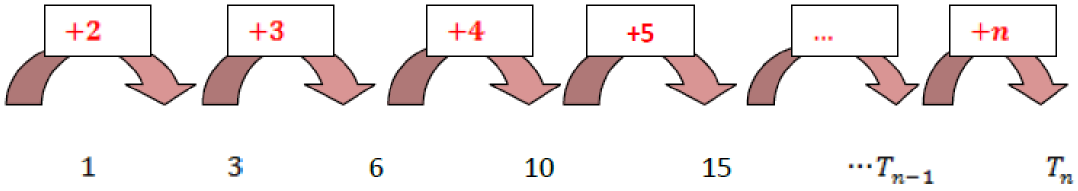
____

____

7) Observe os números da sequência e, tentando encontrar algum padrão que possibilite descobrir o próximo termo da sequência, complete a tabela abaixo.

Posição (n)	**Termo da sequência (T_n)**
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	
7	
8	
9	
10	
20	

- **Professor, a investigação dos padrões encontrados nos números figurados constitui uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do raciocínio matemático.**
  Nas questões acima, além dos alunos constatarem que a sequência dos números triangulares é formada por1,3,6,10,15,...esperamos que eles percebam que a sequência possui o seguinte padrão:



- **Podemos perceber, por meio desse padrão, que o termo geral (T_n)dessa sequência pode ser obtido pela soma:**

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + n, n \in N$

Caso o estudante não perceba, de imediato, sugerimos que sejam estabelecidas argumentações no intuito de observar que o enésimo número triangular é exatamente a soma dos n primeiros números naturais.

Você deve ter observado que o primeiro número triangular T_1 é 1, o segundo número triangular T_2 é 1+2 = 3, já o terceiro termo da sequência dos números triangulares é $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ e, assim por diante. Sendo assim:

8) Generalize esse raciocínio, escrevendo uma sentença matemática para descobrir o número que ocupa a posição n da sequência dos números triangulares.

$T_n =$ ______________________________

Portanto, podemos identificar o n-ésimo número triangular como a soma dos n primeiros números naturais. Assim,

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$\vdots$

$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$

Vamos, então, descobrir uma expressão mais simples para o termo geral de T_n.

Já sabemos que

$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$

9) Qual é o valor da soma dos termos equidistantes ao termo central, ou seja, qual é o resultado da soma do primeiro termo com o último, do segundo termo com o penúltimo, do terceiro termo com o antepenúltimo e assim sucessivamente?

____

____

____

Ao fazermos essas somas, note que podemos reescrever T_n como:

$$T_n = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots + [p+(n-p+1)]\ 1 \leq p \leq n$$

10) Quantas são as parcelas da soma acima?

____

____

11) Agora que você já sabe quantas são as parcelas da soma acima e o valor de cada soma, escreva uma nova expressão para T_n.

____

____

____

- **Professor, a abordagem nesse ponto é mais genérica. Esperamos que o aluno perceba que T_n (no caso de n par) pode ser escrita como $\frac{n}{2}$ somas de parcelas $n+1$.**

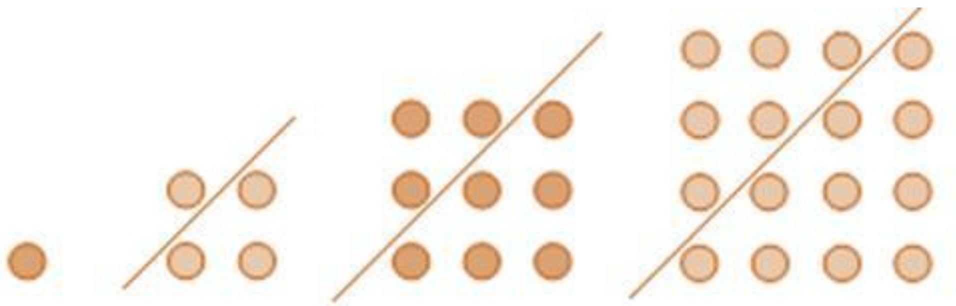
Daí,

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Outra opção que pode ser usada é repetir esse mesmo raciocínio para termos específicos da sequência, por exemplo, $T_{100} = \frac{101.100}{2}$, de maneira que o estudante possa perceber o padrão existente para que seja feita a generalização.**

Existem ainda diversas relações entre os números figurados. Vamos estudar, em particular, uma relação entre os números triangulares e quadrados.

12) Na figura abaixo, estão representados os primeiros números quadrados. Observando essa representação, você percebe alguma relação entre os números quadrados e os triangulares?



- **Professor, nosso intuito aqui é que o estudante tenha a percepção visual de que cada número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.**

Na atividade a seguir, almejamos estimular os alunos a conjecturar, que a soma de dois números triangulares consecutivos resulta em um número quadrado.

13) Para continuarmos nossa investigação acerca da relação entre os números triangulares e quadrados, reveja o que você já aprendeu e complete a tabela a seguir:

n	Q_n	T_{n-1}	T_n
2	4	1	3
3	9	3	6
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

14) Você percebeu alguma relação entre os valores da segunda coluna da tabela com os valores das duas últimas colunas? Qual?

____
____
____

15) A partir da resposta ao item anterior, escreva uma sentença matemática associando Q_n, T_{n-1} e T_n.

____
____
____

- **Na realização das atividades anteriores você deve ter chegado à conclusão de que a soma de dois números triangulares consecutivos resulta sempre em um número quadrado. Podemos escrever esse fato, em notação matemática, da seguinte forma:**
- $Q_n = T_{n-1} + T_n$, $\quad n \in N, n \geq 2$

16) Podemos ainda verificar algebricamente a relação acima. Para isso, faça o que se pede abaixo:
a) Escreva o termo geral de T_n .

____
____
____

b) Escreva o termo geral de T_{n-1}.

____
____
____

c) Efetuando a soma entre as respostas dos itens anteriores, mostre que:
$T_{n-1} + T_n = n^2 = Q_n$

- **Professor, esperamos que os alunos façam os procedimentos da seguinte maneira:**

$$T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = Q_n$$

Chegamos ao final dessa aula e esperamos que tenham percebido, que os Pitágoricos ainda podem nos ensinar muitas coisas em Matemática, além do Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 2 – Progressão Aritmética (P.A.)

Duração prevista: 100 minutos
Assunto: Regularidades Numéricas: Progressões Aritméticas
Objetivos: Solucionar problemas que envolvem uma progressão aritmética.
Material necessário: Folha de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.
Organização da classe: Variando de acordo com a atividade, em dupla, e se for necessário um trio; individual e coletivo.
Descritores associados:

- **H55 -** Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.

Fórmula do termo geral de uma P.A.

Neste item demonstraremos uma fórmula que permite encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética sem precisar escrevê-la completamente.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

Na fórmula:

a_n é o enésimo termo (termo geral);

a_1 é o primeiro termo;

n é o número de termos;

r é a razão.

Vejamos alguns exemplos

1º exemplo: Encontrar o termo geral da P.A. (4,7,...).

Resolução:

$a_n = 4 + (n-1).3$

$a_n = 4 + 3n - 3$

$a_n = 3n + 1$

2º exemplo: Qual é o vigésimo termo da P.A. (3,8,...)?

Resolução:

$a_{20} = 3 + (20-1).5$

$a_{20} = 3 + 19.5$

$a_{20} = 3 + 95$

$a_{20} = 98$

3º exemplo: Determinar o número de termos da P.A.$(-3,1,5,\ldots,113)$.

Resolução:

$113 = -3 + (n-1).4$

$113 = -3 + 4n - 4$

$113 = 4n - 7$

$113 + 7 = 4n$

$120 = 4n$

$n = \frac{120}{4}$

$n = 30$

4º exemplo: Achar o número de múltiplos de 5 compreendido entre 21 e 623.

Resolução:

$620 = 25 + (n-1).5$

$620 = 25 + 5n - 5$

$620 - 20 = 5n$

$600 = 5n$

$n = \frac{600}{5}$

$n = 120$

<u>Observações que podem facilitar a resolução de problemas de P.A.</u>

<u>1º observação</u>

É sempre conveniente colocar os termos em função de **a_1** e **r**, lembrando que:
$a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_1 + 2.r$; $a_4 = a_1 + 3.r$; ....; $a_{10} = a_1 + 9.r$, e assim por diante.

<u>Exemplo:</u> Numa PA, $a_2 + a_6 = 20$ e $a_4 + a_9 = 35$. Escrever a PA.

Resolução: Vamos escrever os dados em função de a_1 e r:

$a_2 = a_1 + r;\ a_6 = a_1 + 5r;\ a_4 = a_1 + 3r;\ a_9 = a_1 + 8r$

Podemos formar o sistema com duas variáveis:

$$\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 20 \\ (a_1 + 3r) + (a_1 + 8r) = 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 6r = -20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$

$5r = 15$

$r = 3$

Como r = 3, temos:

$2a_1 + 6.3 = 20$

$2a_1 = 20 - 18$

$2a_1 = 2 \rightarrow a_1 = 1$

Logo, a P.a. pedida é (1,4,7,...)

2º observação

Quando os problemas tratam de soma ou produto de termos consecutivos de uma PA, é conveniente escrever a PA em função do termo do meio, que indicaremos por x. Assim:

- Se a PA tem três termos, vamos indicá-los por: (x – r, x, x + r);
- Se a PA tem 5 termos, vamos indicá-los por:
  (x – 2r, x – r , x, x + r, x + 2r);
  Se a PA tem 4 termos, vamos indicá-los por:
  (x – 3r, x – r , x + r, x + 3r);

1º Exemplo: Três números estão em PA, de tal forma que a soma entre eles é 18 e o produto é 66. Calcular os três números.
Resolução: Vamos indicar:
$a_1 = x - r;\ a_2 = x;\ a_3 = x + r$

Podemos formar o sistema com duas variáveis (x e r):

$$\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=18\\ (x-r).(x+r)=66\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3x=18\\ x(x^2-r^2)=66\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\left.\begin{matrix}3x=18\\ x=6\end{matrix}\right\}\ 6(36-r^2)=66 \rightarrow 36-r^2=11 \rightarrow r^2=25 \rightarrow r=\pm 5$$

Sendo:

$r = 5$
1º termo= $6 - 5 = 1$
2º termo $= 6$
3º termo$6 + 5 = 11$

$r = -5$
1º termo= $6 — 5 = 11$
2º termo= 6
3º termo= $6 + (-5) = 1$

Os números pedidos são 1,6,11.

2º Exemplo: Determinar 5 números em PA, sabendo-se que o produto dos dois extremos é 220 e a soma dos outros três vale 48.
Resolução: Vamos indicar:
1º número= $x - 2r$;
2º número= $x - r$;
3º número $= x$;
4º número= $x + r$;
5º número= $x + 2r$.

Podemos formar o sistema com duas variáveis (x e r):

$$\begin{cases} (x-2r)(x+2r)=220 \\ (x-r)+x+(x+r)=48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-4r^2=220 \\ 3x=48 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$3x = 48$

$x = 16$

$16^2 - 4r^2 = 220$

$256 - 4r^2 = 220$

$4r^2 = 36 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

Sendo:

$r = 3 \rightarrow 1^{\underline{o}}\ número = 16 - 6 = 10$

$2^{\underline{o}}\ número = 16 - 3 = 13$

$3^{\underline{o}}\ número = 16$

$4^{\underline{o}}\ número = 16 + 3 = 19$

$5^{\underline{o}}\ número = 16 + 6 = 22$

$r = -3 \rightarrow 1^{\underline{o}}\ número = 16 — 6 = 22$

$2^{\underline{o}}\ número = 16 — 3 = 19$

$3^{\underline{o}}\ número = 16$

$4^{\underline{o}}\ número = 16 + (-3) = 13$

$5^{\underline{o}}\ número = 16 + (-6) = 10$

Os números pedidos são: 10,13,16,19 e 22.

Atividades de aprendizagem

1- Determine:

a) o 5º termo da P.A. $(-5, 2, \ldots)$

b) o 4º termo da P.A. $(6, 3, \ldots)$

c) o 6º termo da P.A. (2,4,...)

d) o 5º termo da P.A. $(a+3b, a+b, \ldots)$

2- Classifique as PAs em crescente, decrescente ou constante. Identificando a razão de cada uma. A seguir considerando o primeiro termo e a razão, obtenha a lei de formação dessas progressões aritméticas.

a) $(-2, -5, -8, -11, -14)$

$b)(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots)$

$c)(-10, 0, 10, \ldots)$

d) $\left(\frac{1}{1000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1000}, \frac{1}{250}, \ldots\right)$

3- Numa PA, $a_4 = 12$ e $a_9 = 27$. Calcule a_3.

4- Numa progressão aritmética, o oitavo termo é igual a 16 e o décimo termo é igual a 20. Calcule o primeiro termo e a razão dessa progressão.

5- Ache três números em PA crescente, sabendo que a soma é 15 e o produto é 105.

6- A soma de três números em PA crescente é 21 e a soma de seus quadrados é 165. Ache os três números.

Atividades complementares

1- Calcule os cinco primeiros termos de cada PA.

a) $a_1 = 12 \quad e \quad r = 7$

b) $a_1 = 12 \quad e \quad r = -7$

c) $a_1 = 12 \quad e \quad r = -0{,}25$

2- Determine o 13º termo da PA $(1, -7, -15, -23, \dots)$

3- Encontre o termo geral da P.A. (2,7,...)

4-Determinar o termo geral da sequência (8,15,22,29,36...).

5- Qual é o décimo quinto geral da P.A. $(4{,}10, \dots)$?

6- Num teatro, a primeira fila tem 24 assentos, a segunda 28, a terceira 32, e assim por diante. Quantos lugares tem a 18º fila?

7- Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga R$ 140,00. A partir daí, o valor da mensalidade decresce R$ 8,00 a cada mês.

a) Quanto o aluno pagará no 8º mês do plano?

b) Que valor total anual o aluno pagará?

c) Em um ano, em média, quanto o aluno pagará por mês?

8- Um cinema tem 448 lugares, distribuídos da seguinte maneira: na primeira fila, há 13 poltronas, na segunda, 15, na terceira, 17, e assim sucessivamente até completar n filas. Determine o número total de filas desse cinema.

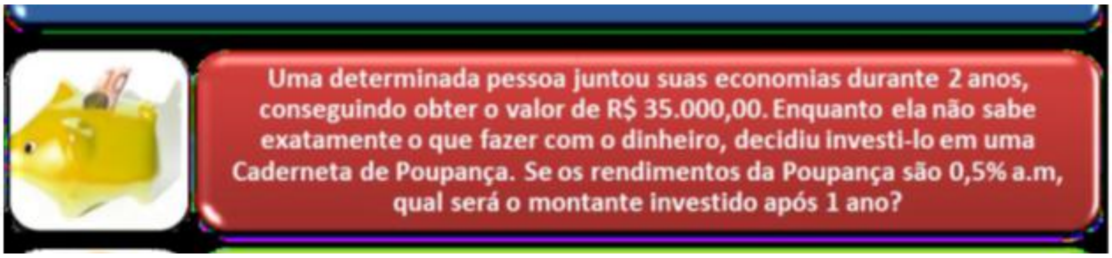
ATIVIDADE 3 – Mais duas Situações e outra Sequência Especial

Duração prevista: 100 minutos
Assunto: Regularidades numéricas - Progressões Geométricas
Objetivos: Entendimento das propriedades e conceitos relacionados às Progressões Geométricas
Material necessário: *Folha* de atividades, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica.
Organização da classe: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.
Descritores associados:

- **H55 -** Resolver problemas envolvendo P.A./P.G. dada a fórmula do termo geral e/ou a soma dos termos.

Aprenderemos, a partir de situações-problema nesse roteiro, uma sequência extremamente importante na matemática e que pode ser aplicada a diversas situações.

Situação 1



Fonte porquinho: http://www.sxc.hu/photo/1187929 - RAWKU5'S
Fonte bola: http://www.sxc.hu/photo/1358286 - Robert Proksa

Leia com atenção o problema e junte-se com seu colega para iniciarmos nossa investigação.

- **Professor, tal como fizemos no roteiro anterior, desenvolveremos a teoria a respeito das Progressões Geométricas a partir da perspectiva da resolução de problemas.**
  A exploração da primeira situação nos permitirá definir uma PG, deduzir seu termo geral e explorar algumas propriedades.
  Por meio da segunda situação pretendemos explorar a ideia contida na demonstração de que a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão é dada por:

  $$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

  Assim, o estudante não só entenderá a maneira como a fórmula foi concebida, mas poderá sempre chegar ao resultado da soma sem fazer o uso da fórmula.

Analisemos, inicialmente, a Situação 1. Ela nos traz um problema de Matemática Financeira bastante relevante, principalmente por ser um problema comum que qualquer pessoa consegue se imaginar contextualizado. Pode-se notar que, na realidade, tal problema é calculado considerando juros compostos, ou como é chamado popularmente, "juros sobre juros".

Por outro lado, podemos visualizar o montante obtido a cada mês como um termo de uma sequência numérica.

Tente responder:

1) Dentro desse raciocínio qual seria o primeiro termo da sequência?

2) Encontre os três primeiros termos da sequência.

3) Descreva, em breves palavras, como você procederia para encontrar cada termo da sequência.

4) Você consegue observar alguma característica especial nessa sequência? Qual?

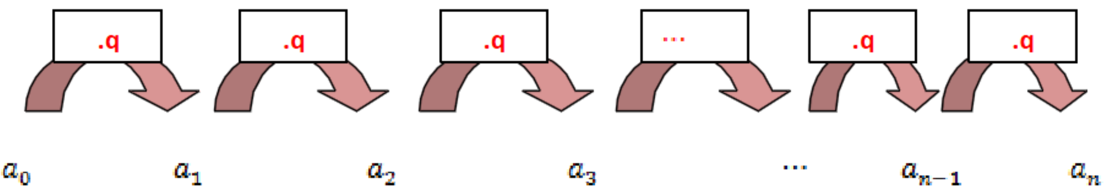
- **Professor, nesse ponto nosso intento é levar o estudante a perceber que, uma vez conhecido o primeiro termo , o termo seguinte é determinado pela multiplicação do termo anterior.**

5) O que acontece quando dividimos um termo da sequência pelo seu termo anterior?

Você deve ter notado que a sequência que nos levará a resolver o problema colocado na Situação 1 possui uma propriedade muito especial, cada termo é obtido pelo produto do termo anterior por uma constante fixa.
Assim, toda sequência numérica que possui tal propriedade recebe um nome especial. Elas são chamadas de *Progressões Geométricas* ou, simplesmente, *PG*.

Uma sequência numérica é chamada de Progressão Geométrica (PG), quando cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante. Essa constante, que indicaremos por q, é denominada razão da Progressão Geométrica.

Observe que:



6) A partir do raciocínio ilustrado no esquema, complete os espaços em branco a seguir de maneira que o padrão possa ser mantido.

$$a_1 = a_0 \cdot q^{\square}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q^{\square}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 = a_0 \cdot q^{\square}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_2 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^3 = a_0 \cdot q^{\square}$$

7) Observando o padrão de maneira a dar continuidade a essa ideia, você poderia completar o espaço em branco na expressão a seguir, que generaliza esse raciocínio?

$$a_n = a_0 \cdot q^{\square}$$

A partir dessa ideia, podemos definir o termo geral de uma PG.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Perceba que qualquer termo da PG pode ser escrito em função da razão e de seu primeiro termo.

Agora já é possível resolver nosso problema.

Converse com seu colega e resolva o problema relatado na Situação 1. Ao encontrar alguma dificuldade, peça ajuda ao seu professor.

Com o que você aprendeu nessa atividade, vamos colocar agora em prática? Resolvendo os itens abaixo

1) Determine a razão de cada uma das seguintes PG:

a) (3, 12, 48,...)

b) (10,5,...)

c) (5, - 15,...)

d) (10, 50,...)

2- Encontre o termo geral da PG (1,5,...)

3- Encontre o termo geral da PG (2,1,...)

4- Qual é o 6º termo da PG (512,256,...)

5- Determine o número de termos da PG (1,2,...,256)

6- Sabe-se que numa PG a razão é 9, o primeiro termo é $\frac{1}{9}$ e o último termo é 729. Qual o número de termos dessa PG?

7- Um carro, cujo preço à vista é R$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4 000,00 e a quarta parcela de R$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

8- . Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da 7ª geração que serão descendentes de uma única coelha?

AVALIANDO OS CONHECIMENTOS

1- Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética. O valor da segunda hora é R$ 4,00 e o da sétima é R$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local?

a) R$ 17,80
b) R$ 20,00
c) R$ 18,00
d) R$ 18,70
e) R$ 18,60

2- Um doente toma duas pílulas de certo remédio no primeiro dia, quatro no segundo dia, seis no terceiro dia e assim sucessivamente até terminar o conteúdo do vidro.

Em quantos dias terá tomado todo o conteúdo, que é de 72 pílulas?

a) 6
b) 8
c) 10

d) 12
e) 14

3- Comprei um automóvel e vou pagá-lo em 7 prestações crescentes, de modo que a primeira prestação seja de 100 reais e cada uma das seguintes seja o dobro da anterior. Qual é o preço do automóvel?

a) R$ 12 700,00
b) R$ 13 000,00
c) R$ 11 800,00
d) R$ 13 200,00
e) R$ 14 000,00

4- Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)?

a) 157
b) 205
c) 138
d) 208
e) 209

5- Num teatro, a primeira fila tem 24 assentos, a segunda 28, a terceira 32, e assim por diante. Quantos lugares tem a 18º fila?

a) 90
b) 91
c) 92
d) 93
e) 94

6- Um ciclista percorre 20 km na primeira hora, 17 km na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

a) 50
b) 60
c) 65
d) 70
e) 71

7- Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, o número de metros percorridos no 3° dia foi:

a) 1 000
b) 2 000
c) 1 500
d) 2 500
e) 2 600

8- (Saerjinho) Qual é o décimo termo da sequência $(4,7,10,13,\ldots)$?

a) 20 b) 27 c) 31 d) 34 e) 37

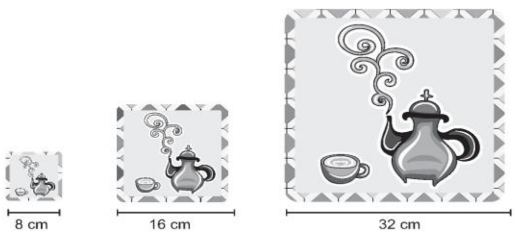
9-(Saerjinho) Um trabalhador ganha, a cada ano R$ 18,00 a mais de salário que no ano anterior. Se em 2005 seu salário é de R$ 410,00, qual será o valor desse salário 2013?

a) R$ 518,00
b) R$ 536,00
c) R$ 554,00
d) R$ 572,00
e) R$ 590,00

10-(Saerjinho) Paulo decidiu poupar parte do seu salário para comprar um carro depositando o dinheiro em um banco. Assim sendo, no mês de janeiro Paulo depositou R$ 100,00, em fevereiro R$ 120,00, em março R$ 140,00 e assim sucessivamente. Qual o valor depositado por Paulo em outubro desse mesmo ano?

a) R$ 320,00
b) R$ 300,00
c) R$ 280,00
d) R$ 260,00
e) R$ 240,00

11- (saerjinho)A figura abaixo mostra três ampliações de uma foto que segue um padrão.



A largura, em cm, dessa foto após ser realizada a quinta ampliação é:

a) 64

b) 80

c) 96

d) 128

e) 256

12- (Saerjinho) Considere este anúncio de emprego:

> Venha trabalhar conosco de segunda a sábado e ganhe R$1,00 pelo primeir
> de trabalho e, nos dias seguintes, o dobro do que recebera no dia anterior.

Uma pessoa que conhecia progressão geométrica achou a proposta sensacional e aceitou o trabalho. Depois de 10 dias de trabalho, o salário dessa pessoa está acumulado em:

a) 10

b) 512

c) 1023

d) 1024

e) 5120

13- (Saerjinho) Uma progressão geométrica tem primeiro termo $a_1 = 3$ e quinto termo $a_5 = 48$. O nono termo dessa progressão geométrica é:

a) 93

b) 256

c) 512

d) 768

e) 1536

14- . (FGV) Durante o último jogo da seleção brasileira, brinquei com meu primo, apostando quem conseguiria colocar mais pipocas na boca. Comecei colocando 2 na boca e fui aumentando r pipocas por vez, como em uma PA. Ele começou colocando 1 na boca e foi multiplicando por r, como numa PG. Na quarta vez em que colocamos pipocas na boca, descobrimos que a quantidade colocada por nós dois foi a mesma. Nessa nossa brincadeira, o valor de r é:

a) um número quadrado perfeito

b) um número maior que 3

c) um divisor de 15

d) um múltiplo de 3

e) um número primo

15- Os irmãos Antônio, Beatriz e Carlos comeram, juntos, as 36 balas que havia em um pacote. Mas Antônio, achou a divisão injusta, já que beatriz comeu 4 balas a mais que ele, e Carlos comeu mais balas que Beatriz.

Se as balas que os irmãos comeram formavam uma progressão aritmética, quantas balas Antônio comeu?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

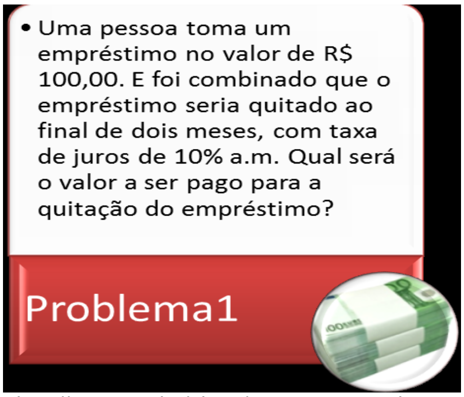
ATIVIDADE 4 – Resolvendo Problemas com Matemática Financeira

Duração prevista: 100 minutos
Assunto: Matemática financeira
Objetivos: Entendimento dos conceitos de Juros Simples e Compostos. Resolução de problemas com o uso da Matemática Financeira.
Material necessário: Folha de atividades, régua, calculadora, lápis de cor ou caneta hidrográfica.
Organização da classe: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.
Descritores associados:

- **H54 -** Resolver problemas envolvendo juros simples ou compostos.

Nesse roteiro, vamos resolver juntos vários problemas e, assim desenvolveremos, e aprenderemos conceitos importantes em Matemática Financeira. Junte-se a um colega, leia com atenção o Problema 1 e vamos juntos nessa viagem!

- **Professor, nesse roteiro pretendemos abordar os conceitos de Juros Simples, Juros Compostos e o Problema da Equivalência de Capitais, por meio da resolução de problemas.**
  Almejamos que ao final da aplicação do roteiro os estudantes estejam preparados para resolver uma série de problemas envolvendo a Matemática Financeira.



Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1302510 - G Schouten de jel

1) Tente resolver o problema 1 acima e compare a sua resposta com a de seu colega. Vocês chegaram a mesma conclusão?

- **Professor, essa questão tem por objetivo motivar a discussão a respeito da diferença entre os sistemas de Juros Simples e Compostos, portanto, é importante que os alunos tentem resolvê-las primeiro discutindo entre si.**
  Como não apresentamos maiores detalhes no Problema 1, esperamos que os alunos apresentem, ao menos, duas soluções diferentes para o problema.

- **Por um lado, o entendimento pode ser que, se a taxa é de 10% a.m e 10% de 100 resulta em 10, então o valor a ser acrescido a cada mês deverá ser de R$ 10,00. Dessa forma, o valor a ser pago ao final de 2 meses deverá ser de R$ 120,00.**

  Por outro lado, pode-se entender que ao final de um mês a dívida será de R$ 110,00 e não mais de R$ 100,00, como um mês antes. Assim, ao ser calculado o novo valor da dívida para o segundo mês, será considerado o novo valor da dívida, ou seja, será calculado 10% de R$ 110,00 e não mais 10% de R$ 100,00. Portanto, nesse sentido o valor a ser pago ao final de dois meses será de R$ 110,00 + 10% de R$ 110,00, ou seja, R$ 121,00.
  Repare que os dois raciocínios estão corretos, visto que o enunciado do problema não especifica o sistema pelo qual deverão ser calculados os juros. O primeiro raciocínio está trabalhando com o sistema de Juros Simples enquanto o segundo trabalha com o sistema de Juros Compostos.
- **Sugerimos, que a partir desse exemplo, sejam exploradas as ideias contidas nesses sistemas.**

Aqui foram apresentados dois sistemas de cálculo de juros, Juros Simples e Compostos.

É possível que se pergunte então: Em quais situações são usados os Juros Simples?

Em geral, as instituições financeiras e comerciais trabalham com o sistema de Juros Compostos. Mas existem situações em que os cálculos são feitos no sistema de Juros Simples. Ao ser pago um título de R$ 100,00, menos de trinta dias após a data de vencimento, o montante a ser pago será calculado com Juros Simples.

2) Agora, calcule o valor a ser pago por um título de R$ 100,00, seis dias após o vencimento, sabendo-se que a taxa de juros do título é de 12% a.m.

- **Professor, espera-se que o aluno aplique o raciocínio envolvendo, de alguma forma, a proporcionalidade.**
  O mês comercial é considerado com trinta dias. Daí, um atraso de seis dias corresponde a $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ do mês.
  Assim, os juros a serem pagos ao final de trinta dias seriam R$ 12,00. Mas como o atraso corresponde a $\frac{1}{5}$ do mês, os juros também seriam de $\frac{1}{5}$ de R$ 12,00, que é R$ 2,40.
  Portanto, o valor a ser pago será de R$102,40.

Nas situações em que o prazo é menor que a quantidade de tempo, o montante calculado sobre Juros Simples são maiores que o montante calculado sobre Juros compostos.

Agora passemos ao Problema 2 e às questões seguintes:

Problema 2

1) Complete a tabela a seguir, sabendo-se que Rodrigo tomou um empréstimo de R$ 1.000,00 com uma taxa de juros de 15% a.m.

Mês	**Dívida**	**Razão entre a dívida de um mês e a do anterior**
0	1000,00	-----------------------
1		
2		
3		
4		

2) Ao realizar os cálculos e preencher a tabela, o que você percebeu com relação aos números da terceira coluna da tabela?

---

3) No mês 0 a dívida era de R$ 1.000,00, para obter o valor da dívida no mês 1, devo fazer a multiplicação de R$ 1.000,00 por qual número?

---

4) No mês 2 a dívida era de R$ 1.322,50, para calcular o valor da dívida no mês anterior, ou seja, no mês 1, devo efetuar a divisão de R$ 1.322,50 por qual número?

____
____
____

Você deve ter percebido que, nesse problema, para calcular o valor da dívida no mês seguinte, basta multiplicar o valor da dívida atual por 1,15. Analogamente, para calcular o valor da dívida no mês anterior, basta dividir o valor da dívida atual por 1,15.

5) Assim, no sistema de Juros Compostos de taxa , um valor M_o transforma-se, após um período de tempo, em ___________.

6) Analogamente, no sistema de Juros Compostos de taxa i , um valor futuro M_1 deve ser dividido por ________, para que se descubra o valor atual M_o.

Temos então a Fórmula Fundamental da Equivalência de Capitais:

7) Para obter o valor futuro, depois de um período de tempo, basta multiplicar o valor atual por ______________.

8) Para obter o valor atual, em um período de tempo, basta dividir o valor do valor futuro por________________.

- **Professor, essas são atividades fundamentais para o ensino de Matemática Financeira, o valor do dinheiro no tempo. Esperamos que os alunos preencham a tabela da seguinte forma:**

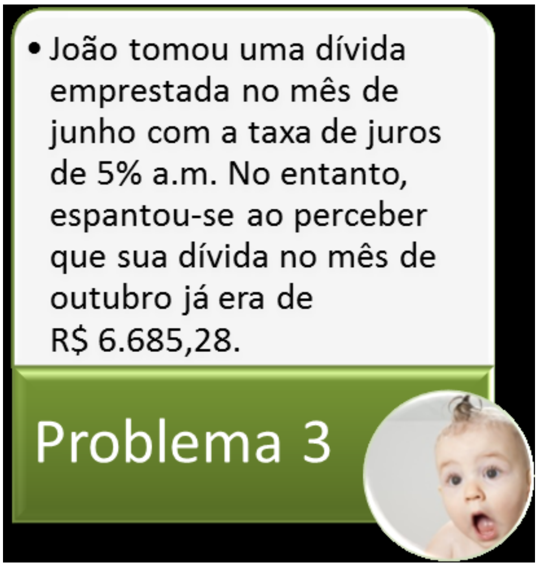
Mês	**Dívida**	**Razão entre a dívida de um mês e a do anterior**
0	**1000,00**	**----------**
1	**1150,00**	**1,15**
2	**1322,50**	**1,15**
3	**1520,87**	**1,15**
4	**1749,01**	**1,15**

Assim, nosso objetivo é que o estudante entenda que em um sistema de Juros Compostos com taxa de juros:

- **Para obter o valor futuro, depois de um período de tempo, basta multiplicar o valor atual por $1 + i$.**

- **Para obter o valor atual, em um período de tempo, basta dividir o valor do valor futuro por $1 + i$.**

No problema seguinte esperamos que os alunos apliquem exatamente o que foi aprendido com esse problema.



Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1359713 - mokra's

Considerando que não foram efetuados pagamentos relativos a essa dívida, preencha a tabela abaixo e calcule qual foi o valor emprestado no mês de junho.

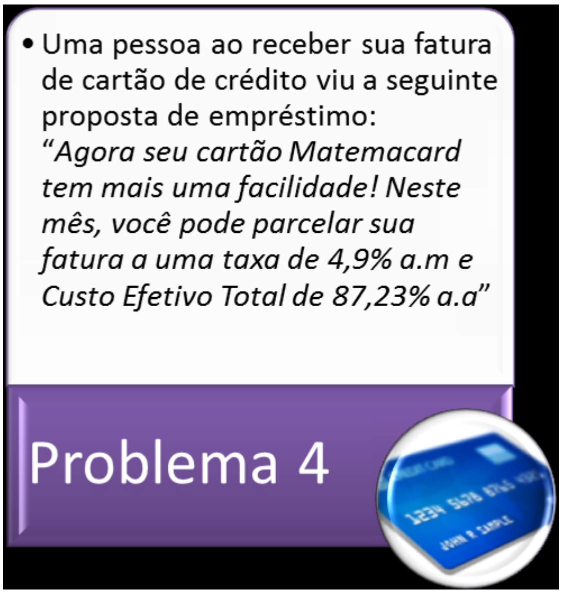
Mês	Dívida
Junho	
Julho	
Agosto	
Setembro	
Outubro	6685,28
Novembro	
Dezembro	

- **Professor, esperamos que os alunos preencham a tabela da seguinte maneira**

Mês	Dívida
Junho	5500,00
Julho	5775,00
Agosto	6063,75
Setembro	6366,94
Outubro	6685,28
Novembro	7019,55
Dezembro	7370,53

A resolução desse problema é uma excelente oportunidade para verificar se os estudantes compreenderam os conceitos trabalhados no problema anterior.

Use os conceitos que você acabou de aprender, para examinar a proposta contida no problema a seguir.



Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1316485 - James Miller

A partir da problemática apresentada, responda:

1) Uma taxa de juros de 4,9% a.m gera uma taxa anual maior, menor ou igual a 87,23%? Por quê?

2) O que, em sua opinião, pode ocasionar o fato de a taxa anual ser diferente do Custo Efetivo Total?

- **Professor, nesse problema esperamos que, fazendo uso dos conceitos trabalhados, o aluno possa fazer um julgamento coerente de um problema real.**

Repare que podemos encontrar a taxa anual fazendo $(1 + 0,49)^{12} \cong 1,7754$, ou seja, a taxa anual será de aproximadamente 77,54%, bem diferente do Custo Efetivo Total de 87,23%.

- **Uma explicação plausível para essa diferença é que a Instituição Financeira, ao realizar a operação de empréstimo, embute no valor das parcelas vários encargos e impostos além dos juros.**

Perceba como podemos resolver várias situações, presentes em nosso cotidiano, por meio da Matemática.

AVALIANDO OS CONHECIMENTOS

1- (Saerjinho) Carlos comprou um carro no valor de RS 10 000,00. Teve um desconto de 25%. Quanto ele pagou?

a) R$ 2 500,00
b) R$ 5 500,00
c) R$ 6 500,00
d) R$ 7 500,00

2- (Saerjinho) Os médicos recomendam que o peso de uma mochila não deve exceder 10% do peso de um estudante. Se um estudante pesa 60 quilogramas, qual deve ser, no máximo o peso da sua mochila?

a) 6 quilogramas
b) 8 quilogramas
c) 54 quilogramas
d) 66 quilogramas

3- (Saerjinho) O pai de Carlos comprou um televisor por R$ 480,00 e teve 8% de desconto. Quanto ele pagou pelo televisor?

a) R$ 38,40
b) R$ 44,06
c) R$ 384,00
d) R$ 441,60

4- (Saerjinho) O preço à vista de uma televisão é de R$ 1200,00. Parcelado no cartão de crédito é cobrada uma taxa de juros simples de 3,4% ao mês. Qual o preço dessa televisão parcelada no cartão de crédito em 10 meses?

a) R$ 1234,00
b) R$ 1240,00
c) R$ 1540,00
d) R$ 1608,00
e) R$ 1680,00

5- (Saerjinho) Antônio emprestou R$ 3000,00 ao seu primo, a juros simplesde 8% ao ano, durante 3 anos. Os juros obtidos por Antônio ao final desses 3 anos foram de:

a) R$ 720,00
b) R$ 1125,00
c) R$ 8000,00
d) R$ 72000,00
e) R$ 73000,00

6- (Saerjinho) Júnior emprestou R$ 450,00 a juros simples, por uma taxa de 2% ao mês, durante um período de 1 ano e meio. Quanto ele recebeu de juros ao final desse período?

a) R$ 108,00
b) R$ 135,00
c) R$ 162,00
d) R$ 225,00
e) R$ 235,00

7- (Saerjinho) Ana aplicou R$ 2000,00 a juros compostos de 5% ao mês durante 2 meses. O montante recebido apósessa aplicação foi o valor que ela pagou por um computador.
O valor desse computador foi de:

a) R$ 2200,00
b) R$ 2205,00
c) R$ 4000,00
d) R4 4080,00
e) R$ 4500,00

8- (Saerjinho) José aplicou R$ 1000,00 à taxa de juros simples de 4% ao mês durante 2 meses.
Qual é o montante no fim dessa aplicação?

a) R$ 80,00
b) R$ 1008,00
c) R$ 1080,00
d) R$ 1800,00
e) R$ 8000,00

9- (Saerjinho) Severino fez uma aplicação de R$ 3000,00 em uma

determinada instituição que paga juros simples de 4% ao mês.
Quanto de lucro Severino teve após um ano de aplicação?

a) R$ 120,00
b) R$ 1440,00
c) R$ 3120,00
d) R$ 4440,00
e) R$ 12000,00

10- (UFPB) Num supermercado, um produtor foi posto em promoção com 20% de desconto sobre o seu preço de tabela, por um período de 5 dias. Concl duído esse período, o preço promocional foi elevado em 10%. Com esse aumento, o desconto, em relação ao preço de tabela, passou a ser:

a) 8%
b) 10%
c) 12%
d) 15%
e) 14%

11- (Ufla – MG) Um motorista escolhe um trajeto que sabe ser 20% maior que o trajeto que usualmente toma, pois nesse novo trajeto poderá desenvolver uma velocidade média 100% maior que a do trajeto usual. O tempo de viagem diminuirá:

a) 40%
b) 50%
c) 100%
d) 9%
e) 20%

12- (UEG-GO) Um fogão custou R$ 600,00 para um comerciante. O comerciante anunciou o preço para venda do fogão de modo que, se sobre esse preço anunciado fosse aplicado 25% de desconto, ao vender o fogão, o comerciante ainda teria um lucro de 25% sobre o preço de custo. O preço anunciado foi de:

a) R$ 1020,00
b) R$ 1000,00
c) R$ 960,00
d) R$ 940,00
e) R$ 900,00

13- Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% sobre o ganho

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

14- Um fogão é vendido por $600.000,00 à vista ou com uma entrada de 22% e mais um pagamento de $542.880,00 após 32 dias. Qual a taxa de juros mensal envolvida na operação?

a) 5%
b) 12%
c) 15%
d) 16%
e) 20%

15- A taxa efetiva anual de 50%, no sistema de juros compostos, equivale a uma taxa nominal de i % ao semestre, capitalizada bimestralmente. O número de divisores inteiros positivos de i é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

3- AVALIAÇÂO

A avaliação é importante, no sentido da prática educacional necessária para que se saiba como se está, enquanto aluno, professor o que conseguiu alcançar e como vencer aquilo que não foi superado.

Todas as atividades propostas são avaliativas, sendo que os exercícios **Avaliando os conhecimentos** na página 18 e 25; requer uma avaliação detalhada, pois o professor irá conseguir distinguir se o aluno conseguiu alcançar os objetivos propostos nas atividades, ou o que ele, pode melhorar para que esse aluno consiga superar tais dificuldades.

4- FONTES DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO E TEXTOS – Regularidades Numéricas e Matemática Financeira – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 2º Bimestre – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

BARRETO, Benigno Filho. Matemática aula por aula. 1º edição. 2º série. São Paulo:FTD, 2003.

BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a matemática. 1º edição. Volume 2. São Paulo: Moderna, 2010.

DANTE. Contexto e aplicações. 1º edição. Volume 2. São Paulo: Ática, 2012.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva. 1º edição. Volume 2. São Paulo: Moderna, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy. Matemática Fundamental. Volume único. 2º grau. São Paulo: FTD,1994.

Endereços eletrônicos acessados de 20/04/2013 à 13/05/2013:

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava