

Curso de Formação Continuada em MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

SEEDUC – RJ

Matemática no 3º Ano – 1º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

TAREFA 1

INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE

Cursista: **Valter Fernandes Costa**

Tutora: EDESON DOS ANJOS SILVA Tutor

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO:_____	2
DESENVOLVIMENTO_____	3
FONTES DE PESQUISA_____	19
AValiação_____	18

INTRODUÇÃO

Nesse plano de trabalho, temos o objetivo de fazer a introdução do conteúdo de probabilidade com suas noções básicas. A ideia é desenvolver através de problemas ligados ao cotidiano e aplicações o conceito de probabilidade. O foco estará na percepção quase intuitiva desses conceitos, partindo logo para a resolução de problemas que estimulem a lógica em matemática dos alunos.

O planejamento prevê um total de 6 aulas de 50 minutos cada para esses primeiros passos em probabilidade. Será reservada mais uma aula para um teste para aferir o quanto se progrediu no assunto.

De início o único pré-requisito será o domínio das quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão) e domínio de combinação, dessa forma fazendo o elo e mostrando a aplicação de combinação.

DESENVOLVIMENTO:

ATIVIDADE RELACIONADA 1: Jogando com Dois Dados

- **PRÉ-REQUISITOS:** Conhecimentos de básicos de aritmética.
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado colaborativo.

➤ **OBJETIVOS:** : Resolver problemas de probabilidade simples.

Nessa atividade após a turma ser dividida em duplas, os alunos receberão um par de dados. Será pedido que eles jogassem várias vezes esse par de dados e observem os resultados. As seguintes perguntas serão feitas:



1. Qual o total de resultados possíveis de pares?

2. Seria possível montar uma tabela com todos os resultados possíveis de pares? Sim ou não?

3. Caso seja possível montar uma tabela com todos os resultados possíveis? Como seria essa tabela?

4. Sabendo que podemos definir probabilidade como sendo

$$P(X) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados favoráveis}}{n^{\circ} \text{ total de possibilidades}}$$

, qual a probabilidade de sair os mesmos números nos dois dados?

5. Qual a probabilidade de sair números diferentes nos dois dados?

6. Qual a probabilidade de sair primeiro um par e depois um ímpar?

7. Qual a probabilidade de sair soma maior que 7?

8. Qual a probabilidade de sair soma menor que 7?

9. Qual a probabilidade de sair soma igual 10?

10. É possível usando a tabela construída do item 3, encontrar um padrão para achar certos resultados?

11. Qual a probabilidade de sair soma maior que 12?

-
-
-
- O total de resultados seria 36 da pergunta 1.
 - Sim
 - A tabela seria essa:

D_1/D_2	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

- $P = 6/36$
- $P = 30/36$
- $P = 9/36$
- $P = 15/36$
- $P = 21/36$
- $P = 3/36$
- Sim, basta observar, por exemplo, que na diagonal principal estão todos os números que são iguais.
- Zero. Basta olhar na tabela.

Desenvolvimento Histórico da probabilidade:

As probabilidades nasceram na Idade Média com os tradicionais jogos de azar e apostas que se efetuaram na Corte.

Os algebristas Italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc.XVI) fizeram as primeiras observações matemáticas relativas às apostas patentes nos jogos de azar.

Porém, a verdadeira teoria relativa às probabilidades surgiu através da correspondência entre Blaise Pascal e seu amigo Pierre De Fermat, chegando estes à mesma solução do célebre problema da divisão das apostas em 1654, embora tivessem seguido caminhos diferentes.

Este problema foi posto a Pascal pelo Cavaleiro De Méré. Este Cavaleiro era considerado por alguns um jogador inveterado, por outros um filósofo e homem de letras.

Um facto curioso é que este problema era o mesmo que, sensivelmente, um século antes havia retido a atenção de Pacioli, Tartaglia e Cardano.

Gerolamo Cardano, médico e matemático Italiano, nascido em Pavia (1501-1576) escreveu o primeiro livro relativo às probabilidades "*Liber de Ludo Alex*" ("**Livro dos jogos do azar**"), embora este só tenha sido publicado em 1663.

Laplace publicou a obra da Teoria Analítica das Probabilidades, em 1812. Esta obra foi um importante tributo para o desenvolvimento dos conhecimentos nesta área, uma vez que reuniu as ideias descobertas até então, donde se salienta a famosa **Lei de Laplace**.

Laplace comentou as teorias de Pascal do seguinte modo:

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

A teoria das probabilidades evoluiu de tal forma que no século XX possui uma axiomática própria dentro da teoria matemática. Tal efeito deve-se sobretudo a

Kolmogorov, que em 1933 adotou a nova definição de probabilidade que atualmente designamos por "*Definição frequêncista*".



Pierre De Fermat



Blaise Pascal

Problema histórico:

Em 1754, perguntaram a D'Alembert qual era a probabilidade de obter pelo menos uma cara ao lançar uma moeda duas vezes. O raciocínio de D'Alembert terá sido o seguinte:

" Só existem três casos possíveis.

- Sair cara no 1º lançamento (e o jogo termina);
- Não sair cara no 1º lançamento mas sair no 2º;
- Nunca sair cara.

"Ora, os dois primeiros são favoráveis, logo a probabilidade pedida é $2/3$."

O que pensa deste raciocínio?

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm>. Acessado em 09/05/2013

ATIVIDADE RELACIONADA 2: Mega Sena

- **PRÉ-REQUISITOS:** Combinação
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos.
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado colaborativo.
- **OBJETIVOS:** Resolver problemas, usando o conceito de probabilidade aplicado aos jogos da Mega Sena, o que envolve os conceitos de união de eventos e de eventos complementares.

Nessa atividade será desenvolvida uma aplicação muito atual e que chama a atenção de todos, em probabilidade, que é o jogo da Mega Sena. Será aproveitado o momento para revisar e aplicar um importante conteúdo anterior, as Combinações.

Leia com atenção a reportagem a seguir:

Ilustração/diagramação, o texto a seguir simula uma notícia de jornal. Sendo assim, gostaria que fosse diagramado como tal. Gostaria que passasse a impressão, para quem o ler, de que está lendo uma notícia em um jornal, ok? Ambulante deixa de registrar aposta na Mega Sena da virada e perde milhões

Mulher perde o dinheiro da aposta do bolão. Ao conferir o resultado, passa mal e é internada.

Fim do título da reportagem.



Fonte: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Loteria_Mega-Sena_\(2011\).jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Loteria_Mega-Sena_(2011).jpg) – Wilson Dias

Início do texto da reportagem

Marlinda Gerbara é do Rio de Janeiro e junto com outros colegas ambulantes resolveu apostar na Mega Sena da virada que, nesta versão, pagaria um prêmio recorde. Ela ficou encarregada de registrar as apostas na lotérica Mil Maravilhas que fica no centro do Rio, próxima ao camelódromo da cidade. No entanto, Marlinda não conseguiu achar o dinheiro que foi arrecadado e não fez a aposta, embora tenha dito aos colegas que havia feito.

Hoje, ao encontrar um dos colegas apostadores que a informou que estavam milionários, a ambulante teve uma parada cardíaca e teve de ser levada às pressas para o Hospital público mais próximo. O estado de Marlinda ainda é instável.

As dezenas sorteadas pela Caixa Econômica Federal ainda tiveram mais dois acertadores.

Fim do texto da reportagem

Em nosso país, a Mega Sena é o jogo de loteria que desperta o maior interesse na população. Isso se deve ao fato das quantias oferecidas como prêmio serem bastante altas. Além disso, vemos a grande divulgação feita pela mídia sobre o

jogo, apresentando as possíveis chances de alguém ganhar, o que fazer com o dinheiro ganho etc ...

Como já foi estudado anteriormente, esse jogo consiste em realizar uma aposta, contendo no mínimo 6 e no máximo 15 dezenas escolhidas do conjunto $\{01, 02, 03, \dots, 59, 60\}$. Cada aposta simples de 6 dezenas custa, atualmente, R\$ 2,00 e o preço das apostas varia de acordo com o número de dezenas escolhidas.

Questão 1: Com base nas informações apresentadas, qual é o número máximo de jogos simples, distintos entre si, no jogo da mega sena?

Questão 2: Um determinado apostador fez um jogo com 8 dezenas. Qual é a probabilidade desse jogador ganhar a sena?

Questão 3: Quantos resultados possíveis dariam o prêmio da quadra para o apostador da questão 2?

Questão 4: Qual é a probabilidade desse mesmo apostador ganhar o prêmio da quadra?

Questão 5: Qual a chance dele ganhar a sena?

Questão 6: Qual é a chance dele ganhar a quina?

Questão 7: Qual é a chance dele ganhar a quadra?

OBS: É possível perceber que, do ponto de vista teórico, ainda que pequena, a chance de um apostador acertar a quadra é muito maior que a de acertar a Sena. Se isso serve de consolo, talvez seja esta, uma das razões pela qual tantas pessoas jogam na Mega Sena, mesmo sabendo que suas chances de ganhar são muito pequenas. Ainda que não ganhem na sena, existe a esperança de ganhar na quadra.

Um certo apostador separou R\$ 14,00 para jogar na Mega Sena. Ele tem duas opções de realizar seu jogo:

Ou faz um jogo com 7 dezenas.

Ou faz 7 jogos de seis dezenas simples.



Questão 8: Qual é a chance deste apostador acertar as seis dezenas da Mega Sena em cada opção de jogo?

Questão 9: Qual é a vantagem de se fazer 7 jogos simples ao invés de um jogo com 7 dezenas?

Questão 10: A chance de ele acertar a quina em cada uma das opções de jogo é a mesma? Justifique.

GABARITO

Questão 1: Como a Mega Sena disponibiliza um total de 60 dezenas para a realização dos jogos, o número de dezenas simples, formadas a partir dessas 60 dezenas, é obtido por $C_{60,6} = 50.063.860$. Esse número é da ordem de 50 milhões.

Questão 2: $C_{8,6} = 8!/6!2! = 28$

Logo, temos 28 jogos simples. Portanto, a chance dele acertar na Mega Sena é de: $P(8) = 28/50.063.860$ aproximadamente de **0,00005593%**

OBS: Além da Sena, as 6 dezenas distintas sorteadas pela Caixa Econômica Federal, que administra o jogo, servem para premiar as apostas que contêm 4 (quadra) e 5 (quina) dezenas sorteadas. Isso significa, por exemplo, que, para um apostador que fez um jogo com 8 dezenas ganhe a quadra, é necessário que quatro das seis dezenas apostadas estejam entre as 8 dezenas apostadas por ele e duas estejam entre as outras 52.

Questão 3: Para o apostador ganhar uma quadra, é necessário que quatro das seis dezenas sorteadas estejam entre as 8 nas quais ele apostou, e duas estejam entre as outras 52. As quatro podem ser escolhidas de $C_{8,4} = 70$ maneiras e as outras duas de $C_{52,2} = 1326$ maneiras. Logo, existem $70 \times 1326 = 92820$ resultados que dariam o prêmio da quadra para o apostador.

Questão 4: A probabilidade do apostador ganhar a quadra é calculada da seguinte maneira: $P = NF/NP = 92890/50063860$ que é aproximadamente 0,185%.

Questões 5 a 7: Apostador escolheu 10 dezenas para jogar na Mega Sena.

Sena: $C_{10,6} = 210$

Quina: $C_{10,5} \times C_{50,1} = 12600$

Quadra: $C_{10,4} \times C_{50,2} = 257250$

Probabilidades: Sena: $P = 210/50063860$ aproximadamente 0,000042%

Quina: $P = 12600/50063860$ aproximadamente 0,0252%

Quadra: $P = 257250/50063860$ aproximadamente 0,514%

Questão 8: A chance para cada uma das opções é a mesma:

$P = 7/50063860$ aproximadamente 0,0000014%.

Em ambos os casos teremos 7 jogos diferentes e, portanto, a mesma probabilidade. Uma diferença seria o fato do jogador, escolhendo a 2ª opção, ter mais flexibilidade para escolher outras dezenas que acredite serem sorteadas. Neste caso, apesar da probabilidade ser a mesma, as opções de dezenas diferentes são maiores.

Questão 9: No caso do apostador optar por um jogo de 7 dezenas, ele terá 7 combinações de 6 dezenas, envolvendo as dezenas escolhidas. Caso ele deseje aumentar a possibilidade de dezenas a serem escolhida, é mais vantajoso ele realizar 7 jogos simples, pois ele pode escolher, inclusive, dezenas que ele repetiu em jogos anteriores.

Questão 10: De fato, com um único jogo de 7 dezenas existirão:

$C_{7,5} \times C_{53,1} = 1197$ resultados possíveis desse apostador ganhar na quina. Com um único jogo de 6 dezenas, teremos $C_{6,5} \times C_{54,1} = 324$ resultados contendo uma quina. Logo, se esse apostador optar pelos 7 jogos com nenhuma quina em comum, o total de resultados favoráveis será igual a $7 \times 324 = 2268$. Veja que probabilidade desse apostador acertar uma quina com o segundo sistema é aproximadamente duas vezes maior do que com o primeiro.

Roteiro de ação (2º bimestre -3º ano- 2013) – Fonte: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=53> . Acessado em 05/09/2013.

TEORIA:

Consideremos a experiência do lançamento de uma moeda e leitura da face voltada para cima. Ao realizarmos n vezes a experiência, se obtivermos m vezes o resultado “cara” é $\frac{m}{n}$. É claro que lançada a moeda o resultado é imprevisível, pois não podemos dizer com absoluta certeza que o resultado será “cara”, pois nada impede que dê “coroa”. A experiência provou que conforme se aumenta n , ou seja, à medida que mais lançamentos da moeda são feitos, a frequência relativa $\frac{m}{n}$ tende a estabilizar-se em torno de $\frac{1}{2}$.

Exemplo:

Em 1000 lançamentos ($n = 1000$), 529 resultados foram favoráveis ($m = 529$), o que nos dá para $\frac{m}{n}$ o valor de 0,529.

Em 4040 lançamentos, 2048 resultados foram favoráveis o que nos dá $\frac{m}{n} = 0,50693$, isso significa que no lançamento de uma moeda “honesta” a probabilidade de se obter “cara” é $\frac{1}{2}$. Essa experiência foi realizada por Kerrich e Buffon.

A definição que permite calcular teoricamente a probabilidade de um evento, sem realizar a experiência é:

Dado um espaço amostral S , com $n(S)$ elementos, e um evento a de S , com $n(A)$ elementos, a probabilidade do evento A é o $P(A)$ tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

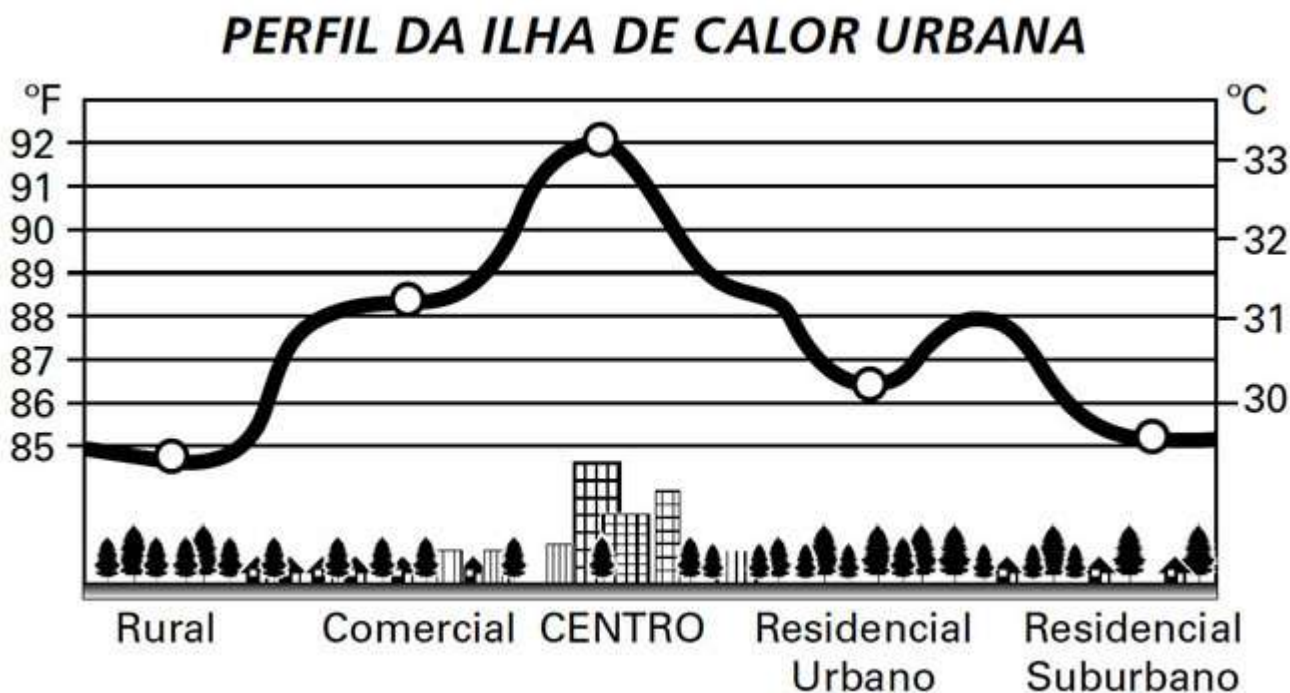
Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/probabilidade.htm>. Acessado em 05/09/2013

ATIVIDADE RELACIONADA 3: Exercícios de Fixação

- **PRÉ-REQUISITOS:** Noções de probabilidade
- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 50 minutos.
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Folha de atividades, lápis e borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas, propiciando um trabalho organizado colaborativo.

- **OBJETIVOS:** Resolver problemas, usando o conceito de probabilidade.
Questão 1. ENEM - 2011

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



➤ FONTE: EPA.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

- a) $1/5$
- b) $1/4$
- c) $2/5$
- d) $3/5$
- e) $3/4$

Questão 2.(FUVEST - 2011)Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a ou que c seja sucessor de b?

- a) $4/27$
- b) $11/54$
- c) $7/27$
- d) $10/27$
- e) $23/54$

Questão 3: (EXTRA - 2009) Qual é a probabilidade de, selecionado ao acaso, um anagrama da palavra ANE, iniciar-se por consoante?

- (A) $1/3$
- (B) $1/6$
- (C) $2/3$
- (D) $5/8$
- (E) $1/2$

Questão 4: (CESGRANRIO - 2008) Em uma urna há 5 bolas verdes, numeradas de 1 a 5, e 6 bolas brancas, numeradas de 1 a 6. Dessa urna retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas. Quantas são as extrações nas quais a primeira bola sacada é verde e a segunda contém um número par?

- (A) 15
- (B) 20
- (C) 23
- (D) 25
- (E) 27

Questão 5: Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais e cartas de pares distintos são diferentes. Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de essas duas cartas serem iguais é

- A) $1/100$
- B) $1/99$
- C) $1/50$
- D) $1/49$

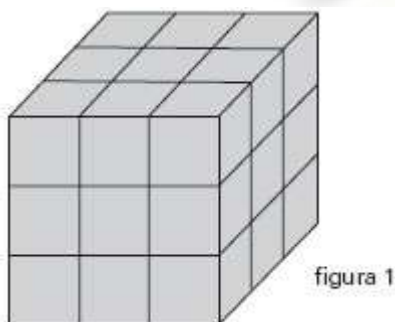
Questão 6: (**UFMG** - **2008**) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta. Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

- A) $27/64$.
- B) $27/256$.
- C) $9/64$.
- D) $9/256$.

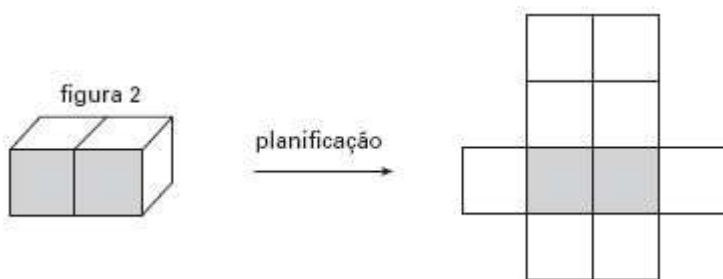
Questão 7: (**CESGRANRIO** - **2004**) Um dado comum (não viciado) teve quatro de suas faces pintadas de vermelho e as outras duas, de azul. Se esse dado for lançado três vezes, a probabilidade de que, em no mínimo dois lançamentos, a face voltada para cima seja azul será, aproximadamente, de:

- (A) 22,2%
- (B) 25,9%
- (C) 44,4%
- (D) 52,6%
- (E) 66,7%

Questão 8:(**UFSCAR** - **2006**) Juntam-se 27 cubos brancos, cada um com 1cm^3 de volume, formando um cubo de 27cm^3 . Em seguida, pinta-se de preto cada uma das seis faces do cubo de 27cm^3 , como indica a figura 1.



Separa-se novamente os 27 cubos. Aleatoriamente e de uma única vez, 2 desses cubos são sorteados. Com os cubos sorteados, deseja-se formar um paralelepípedo de 2cm^3 com cinco faces brancas e apenas uma preta, da forma indicada na figura 2.



A probabilidade de que esse paralelepípedo possa ser formado com os cubos sorteados é igual a:

- A) $2/3$
- B) $17/39$
- C) $29/117$
- D) $2/9$
- E) $5/117$

Fonte: [http://www.profcardy.com/exercicios/assunto.php?pageNum_Recordset1=1&totalRows_Recordset1=22&assunto=Probabilidade:](http://www.profcardy.com/exercicios/assunto.php?pageNum_Recordset1=1&totalRows_Recordset1=22&assunto=Probabilidade)
 acessada em 14/09/2013

AVALIAÇÃO

A avaliação nesse caso serve para poder se saber o quanto se avançou, ou não, na assimilação do conceito de probabilidade.

A avaliação será feito com uma carga horária de 50 minutos e será individual, seguindo a risca os exemplos dados, atividades e exercícios de aprendizagem. Os alunos serão medidos, na capacidade de reconhecer e aplicar o conceito de probabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Matemática: ciência e aplicação, 2 : ensino médio/ Gelson Iezzi...[ET al.]. – 6. Ed. – São Paulo : Saraiva, 2010.
2. Roteiros de Ação 3 - 2º bimestre/3º Série/ 2013 – Formação Continuada – Seeduc/RJ.

Endereços Eletrônicos acessados entre 05/09/2013 e 14/09/2013:

- 1.Fonte:<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm>. Acessado em 09/05/2013
- 2.Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/probabilidade.htm>. Acessado em 09/05/2013
- 3.Fonte:http://www.profcardy.com/exercicios/assunto.php?pageNum_Recordset1=1&totalRows_Recordset1=22&assunto=Probabilidade: acessada em 14/09/2013