

PLANO DE TRABALHO

Professor: Carlos Alberto Lopes dos Santos de Oliveira.

Tema: Probabilidade

Série de Atuação: 3º ano.

Tutor: Edeson dos Anjos Silva

Introdução

Este Plano de trabalho tem por objetivo estabelecer os meios direcionadores estratégicos para trabalhar os conceitos introdutórios de Probabilidade dentro da realidade do atual ensino médio vigente assim como a agenda de ações que deverão orientar os alunos durante duas primeiras semanas de aula.

Na parte inicial do desenvolvimento do mesmo, sobre cada aula, serão descritas as principais estratégias para se trabalhar o conceito hoje associado aos diversos recursos que, nós professores, disponibilizamos. Também, quando possível, relacionando as dificuldades e obstáculos que enfrentamos ao utilizar dos métodos aqui mencionados, e não obstante, os meios para contorná-las.

Cabe nesta introdução também dizer que todos os meios aqui relacionados tanto qual como apresentar o conteúdo até a avaliação, não garante a mesma homogeneidade em todas as turmas aplicadas, levando em conta as diferenças que todas elas apresentam. Porém cabem ao professor possíveis mudanças dentro de suas expectativas.

Em relação aos alunos, para introduzirem ao tema, precisam estar familiarizados com as técnicas de Contagem que no bimestre passado, tiveram contato. Essas técnicas são imprescindíveis para se calcular o número de maneiras chamadas “favoráveis” que estão presentes dentro de um evento probabilístico. Com essa abordagem ao estudo da Probabilidade, espera que o aluno consiga calcular com alguma facilidade a chance de um evento ocorrer em um processo aleatório. Também se espera que ele entenda o resultado dessa probabilidade representada por meio de uma fração e faça equivalência com a porcentagem.

É também relevante considerar que nesse bimestre, os alunos deverão continuar com o estudo de probabilidades que iniciaram no bimestre anterior e, portanto darão continuidade aos estudos. Infelizmente, não pude trabalhar satisfatoriamente como deveria. Por tal razão, este plano de Trabalho traçará estratégias de introdução, de base, consentindo com o currículo mínimo.

Desenvolvimento

Todo e qualquer plano de trabalho, a meu ver, precisa se envolver de um processo construtivista partindo de um conhecimento prévio adquirido, já concretizado, para que a partir daí façam associações de modo a obter um conhecimento concreto e relacionado com o já construído.

O estudo das probabilidades é atribuído primeiramente às correspondências entre *Pierre de Fermat* e *Blaise Pascal* e teve início com os jogos de carta, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório. É definido experimento aleatório aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso.

Dentro de sala de aula, podemos utilizar de inúmeros jogos para poder familiarizar estes conceitos. É preciso que o aluno entenda as regras de cada jogo apresentado e também, jogando, em que situações ele ganha e perde. A partir daí podemos calcular suas chances de sucesso dentro do contexto e assim garantir que o aluno desenvolva habilidades e competências inerentes ao conteúdo apresentado.

Estratégia de trabalho

Aula 1 – Apresentação do conteúdo.

No primeiro encontro, acho fundamental discutirmos o conceito de probabilidade. Primeiro, do modo que usualmente utilizamos a palavra em nosso dia-a-dia, em expressões corriqueiras ou mesmo situações que habitualmente ouvimos nos meios de telecomunicação. Os alunos se lembrarão de algumas dessas e após algumas discussões terão uma boa definição da palavra Probabilidade. Algo do tipo: “A chance de alguma coisa acontecer...”.

Nesse contexto, podemos encontrar uma boa definição e introduzir um pouco da história da Matemática abordando os primeiros estudos sobre a Probabilidade. É preciso que o aluno esteja à vontade sobre o tema e entenda como é importante seu estudo para a Matemática e o cotidiano.

Um ótimo recurso para introduzir o conceito, logo na primeira aula, seria o maravilhoso vídeo que conta sobre o dilema de Fermat e Pascal em um jogo de Cara ou Coroa em um cenário fictício em algum lugar da França Medieval. Através de um problema de pontos, os divertidos atores encaram os personagens e protagonizam um dilema interessante sobre um bom problema envolvendo o conceito de probabilidade.



Vídeo do projeto matematicamultimídia sobre o interessante problema dos pontos. Uma boa introdução à probabilidade.

<https://www.youtube.com/watch?v=E5Ais7qIDrk>

Creio que o mais relevante neste vídeo, nesse princípio, não seja a resolução apresentada, mas sim o problema e a situação. Os alunos, provavelmente, não conseguirão acompanhar a solução, mas acharão interessante a situação e o problema apresentados. Verão aonde a probabilidade é aplicada e como o resultado soluciona o dilema dos dois personagens.

Mais um vídeo interessante sobre o conceito de probabilidade:



Vídeo do projeto *matematicamultimídia*, que apresenta uma situação de probabilidade sobre o contexto do *Rolying Play Game (RPG)*

<https://www.youtube.com/watch?v=it1wZJ3RkVA>

Neste vídeo também o problema em questão é uma ótima introdução para enxergar situações onde a probabilidade é aplicada.

Os dois vídeos podem ser apresentados nesta primeira aula criando assim situações para discussão, sem focar em resolvê-los, deixando que o aluno faça algumas estimativas de resultados e discutindo-os posteriormente. Nesta primeira aula, é legal também discutir outros exemplos onde a probabilidade aparece.

Ao final, o professor pode ainda definir a razão que calcula a probabilidade:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Aula 2 – Definindo experimento aleatório, Espaço amostral e evento

Definir um experimento aleatório é importante logo quando introduzimos conceitos de probabilidade. Um aluno sabe que ao jogar um dado, espera-se que em qualquer um dos resultados possíveis estes tenham a mesma chance de ocorrer, ou seja, que tirar {1, 2, 3, 4,5 ou 6} tenham a mesma probabilidade. Isto equivale a pensar que o dado não é o que chamamos de “viciado” que é quando um dado apresenta sempre uma face com mais frequência que outras.

Para a definição de experimento aleatório vale:

Entendemos por experimento aleatório os fenômenos que, quando repetidos inúmeras vezes em iguais condições, possuem resultados imprevisíveis.

O aluno precisa entender que isso é fundamental para que o resultado do cálculo de probabilidade seja válido.

Um exemplo para ser trabalhado:

Um dado para não ser viciado precisa ter o mesmo peso (massa) em todas as suas faces. Para que um dado fique viciado basta que uma de suas faces tenha um peso maior que as demais, desta forma o número da face oposta à mais pesada terá a maior chance de sair.

Por exemplo, se se deseja que o número 6 saia com maior frequência basta tornar a face do número 1 mais pesada. Quando um dado (de seis lados) é feito de forma correta as faces opostas sempre somam 7 pontos.

Uma analogia deste princípio é o boneco chamado de "João Bobo", aquele que você bate e ele sempre fica de pé. Como a base dele é mais pesada, ele tenderá a estar sempre em baixo.

Imaginemos então que em determinado dado a chance de sair 6 seja 2 vezes maior do que a de sair qualquer outro número. Quando lançamos o dado estamos diante de um experimento aleatório? Os alunos dirão que não. E o professor poderá mostrar como se calcula esta probabilidade. É fundamental que nossos alunos entendam este conceito.

Continuemos definindo agora o Espaço amostral:

Para cada experimento aleatório E, define-se espaço amostral S o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento.

Uma boa atividade é sugerir experimentos para que os alunos listem todos os resultados possíveis. Claro que isso posteriormente poderá não ser aproveitado, uma vez que precisamos apenas do número desses resultados em cada experimento, mas para início de conversa ajudará a compreender o conceito.

Exercícios possíveis:

1. Determine o espaço amostral de cada experimento abaixo

- a) Jogar um dado e observar o número da face de cima.
- b) Jogar duas moedas e observar o resultado.
- c) De um baralho de 52 cartas retirar, aleatoriamente, uma carta e observá-la.
- d) Lançar dois dados e observar a soma dos números das faces voltadas para cima.

Para definir evento, o aluno deve ter compreendido bem o conceito de espaço amostral. Na linguagem de conjuntos, podemos definir evento como:

Um evento é um conjunto de resultados (um subconjunto do espaço amostral) ao qual é associado um valor de probabilidade

Exercícios serão melhores para distinguir e definir estes conceitos:

Ao baralhar um baralho de 52 cartas de jogar sem, e ao escolher-se uma, o espaço amostral terá 52 elementos, um associado a cada uma das 52 cartas. Um evento, todavia, é qualquer subconjunto do espaço amostral, incluindo qualquer singular elemento (um evento elementar, do qual há 52, representando as 52 possíveis cartas), o conjunto vazio (definido como tendo probabilidade 0) e o conjunto inteiro de 52 cartas, o espaço amostral inteiro (com probabilidade 1). Outros eventos são subconjuntos próprios do espaço amostral que contêm múltiplos elementos. Por exemplo, os potenciais eventos incluem:

- "Vermelha e preta ao mesmo tempo. (0 elementos),
- "O 5 de Copas" (1 elemento),
- "Um Rei" (4 elementos),
- "Uma Figura" (12 elementos),
- "Uma carta de Espadas" (13 elementos),
- "Uma Figura ou uma carta vermelha" (32 elementos),
- "Uma carta" (52 elementos).



A probabilidade dos eventos pode ser identificada pela razão entre áreas de eventos e do espaço de probabilidade.

Novamente, cabe:

$$Probabilidade = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

É preciso que a partir daqui o professor proponha um exemplo, e no quadro calcule sua probabilidade para que o aluno entenda como funciona a mecanização do processo.

O professor pode, por exemplo, ainda no contexto com o baralho, perguntar:

“Qual é a probabilidade de aleatoriamente retirar desse baralho uma dama?”

Ora, com 4 damas possíveis dentro de 52 cartas que aleatoriamente podem ser retiradas não é difícil que essa probabilidade seja determinada:

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

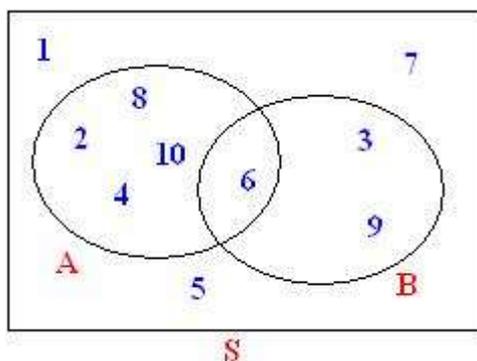
Após o professor concluir o primeiro exemplo, seja ele qual for, acredito ser necessário que não deixe a probabilidade em forma de fração, ou melhor, que discuta com seus alunos o que significa este resultado. Acho que convém também nesta hora mostrar como posso expressar esse resultado em forma de porcentagem, e certamente, os alunos compreenderão melhor o quão fácil/difícil é de alcançar o que o evento procurado.

Com meus alunos do ano passado, arrumei uma maneira bem razoável: Após eles encontrarem a fração que representa a probabilidade, peço para eles acrescentarem dois “zerinhos” ao numerador desta fração. (No exemplo acima ficaria $\frac{100}{13}$). Daí, com o auxílio de uma calculadora, calculamos essa porcentagem encontrando a razão numerador/denominador.

Aula 3 – Probabilidade da união eventos

Dando sequencia aos estudos, precisamos mostrar aos alunos que dentro de um experimento aleatório podemos ter eventos que dependem um dos outros. Um exemplo fácil que utilizo sempre:

Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?



A é o evento “múltiplo de 2”.
B é o evento “múltiplo de 3”.

Os alunos geralmente não tem dificuldade neste tipo de desafio. Neste problema é necessário que nossos alunos percebam que com eventos tendo elementos repetidos (eventos dependentes), tem-se que evitar contar os elementos repetidos.

A representação pelo diagrama de Venn ajuda muito a entender e representar esses problemas.

Outros sugeridos:

▪ Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de tevê que habitualmente assistem, obteve-se o seguinte resultado: 280 pessoas assistem ao canal A, 250 assistem ao canal B e 70 assistem a outros canais, distintos de A e B. Escolhida uma pessoa ao acaso, determine a probabilidade de que ela assista:

- a) ao canal A.
- b) ao canal B.
- c) ao canal A ou ao canal B.

▪ Num grupo, 50 pessoas pertencem a um clube A, 70 pertencem a um clube B, 30 a um clube C, 20 pertencem aos clubes A e B, 22 aos clubes A e C, 18 aos clubes B e C e 10 pertencem aos 3 clubes. Escolhida ao acaso uma das pessoas presentes, a probabilidade de ela:

- a) pertencer aos 3 clubes.
- b) pertencer somente ao clube C.
- c) pertencer a pelo menos dois clubes.
- d) não pertencer ao clube B.

Nestes dois problemas, é totalmente aconselhável que nossos alunos esboquem um esquema, um diagrama, para representar as quantidades. Fica imensamente mais fácil tendo um esquema para analisar as quantidades. Os alunos não tiveram dificuldades.

Aula 4 – Probabilidade de eventos complementares

Este conceito eu sempre procuro discutir desde o início das minhas aulas sobre probabilidade. O aluno entendendo que a probabilidade é um valor entre zero e um, com um significando “ ocorre com certeza” e zero: “ nunca ocorre, podemos definir que a probabilidade complementar é uma ótima ferramenta no cálculo das probabilidades.

Ex:

No lançamento simultâneo de dois dados, determinar a probabilidade de não sair soma 4.

No lançamento de dois dados temos o espaço amostral de 36 elementos. Considerando os eventos em que a soma seja quatro, temos: $\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$. Probabilidade de sair soma quatro é igual a: 3 em 36, que corresponde a $3/36 = 1/12$. Para determinarmos a probabilidade de não sair soma quatro realizamos o seguinte cálculo:

$$P = 1 - \frac{1}{12}$$

$$P = \frac{12-1}{12}$$

$$P = \frac{11}{12}$$

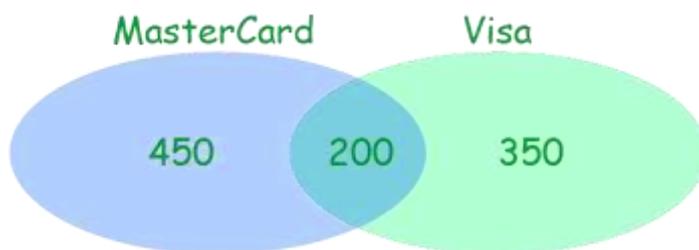
Estes cálculos facilitam muito para determinar a probabilidade quando calcular diretamente é demasiadamente trabalhoso.

Aula 5 – Problemas envolvendo probabilidade condicional.

Probabilidade condicional é um segundo evento de um espaço amostral que ocorre em um evento depois que já tenha ocorrido o primeiro. Também fica perfeitamente melhor representado quando se utiliza de diagramas para observar cada caso e compreender o que foi pedido. Não costumo trabalhar com meu aluno a fórmula, acho desnecessário. Uma boa leitura e observação no problema proposto são o bastante na resolução dos problemas.

Ex:

Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?



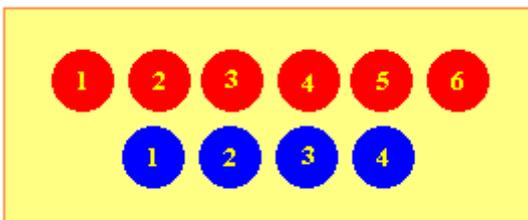
Com o diagrama, é naturalmente fácil observar que reduzimos o nosso espaço amostral. Na verdade nisto consiste a probabilidade condicional. Em saber que é criada uma situação de probabilidade sobre um subconjunto do espaço amostral.

Com tudo que precisamos em mente, o que nossos alunos precisarão é praticar e muito. O professor deve buscar aplicar exercícios mais simples e gradualmente, de acordo com a turma, ir introduzindo outros melhor elaborados. A correção destes é sempre necessária e cria segurança no aluno após cada aula.

Alguns exercícios que utilizaria:

- ▶ Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?
- ▶ Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?
- ▶ Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas?
- ▶ Um credor está à sua procura. A probabilidade de ele encontrá-lo em casa é 0,4. Se ele fizer 5 tentativas, qual a probabilidade do credor lhe encontrar uma vez em casa?
- ▶ Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela?
- ▶ Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?
- ▶ O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças. Se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face?
- ▶ Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?
- ▶ Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?
- ▶ De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?
- ▶ Quatro moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrer coroa em uma só moeda?
- ▶ Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

- ▶ No jogo de Lipa sorteia-se um número entre 1 e 600 (cada número possui a mesma probabilidade). A regra do jogo é: se o número sorteado for múltiplo de 6 então o jogador ganha uma bola branca e se o número sorteado for múltiplo de 10 então o jogador ganha uma bola preta. Qual a probabilidade de o jogador não ganhar nenhuma bola?
- ▶ Determine a probabilidade de um casal com quatro filhos ter dois do sexo masculino e dois do sexo feminino.
- ▶ O número de placa de um carro é par. Qual é a probabilidade de o algarismo das unidades ser zero?
- ▶ Na experiência de jogar, aleatoriamente, um dado "honesto" de seis faces numeradas de 1 a 6, verificar se os eventos "número dois" e "número par" são independentes.
- ▶ Numa urna existem apenas 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. As bolas vermelhas são numeradas de 1 a 6 e as azuis, de 1 a 4. Retirando, aleatoriamente, uma bola dessa urna, verificar se os eventos "bola vermelha" e "número par" são independentes.



- ▶ (UNI- RIO) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando pênalti são, respectivamente, $1/2$, $2/5$, e $5/6$. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:
 - a) 3%
 - b) 5%
 - c) 17%
 - d) 20%
 - e) 25%
- ▶ Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%, a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença só no 3º mês é igual a:
 - a) 21%
 - b) 49%
 - c) 6,3%

d) 14,7%

e) 26%

Com bastante prática os alunos conseguirão um desenvolvimento significativo no cálculo de probabilidades.

Atividade Complementar

Uma atividade legal é simular uma espécie de jogo de aposta, do tipo “Mega Sena” dentro de sala. O professor distribui as cartelas para os alunos. (posso inclusive pegar na loteria). Pede os alunos que marquem as 6 dezenas, primeiramente, podemos variar depois, e com o auxílio de um globo de um bingo, desses de brinquedo, fazemos os sorteio das dezenas premiadas. Qual seria a chance de alguém levar a quadra? Ou a quina? Ou mesmo o maior prêmio? Os alunos se divertem e no quadro posso auxiliar com os cálculos e ajudarem a melhor fixar o conteúdo.



Avaliação

A avaliação das atividades precisa ser diária e após cada aula. Seguindo esse roteiro, os alunos desenvolverão a habilidade presente no currículo mínimo.

É ela:

H76 – Calcular a probabilidade de um evento.

A avaliação (1 aula) poderá ser da seguinte forma:

Atividades em sala.

Listas de exercícios envolvendo aplicações do assunto no cotidiano.

Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.

Competição entre grupos, de no máximo quatro alunos, onde cada grupo apresenta um problema outro grupo caso consiga resolvê-lo, continua na competição, caso erre, será eliminado.

Seminários sobre as atividades indicadas na aula.

Bibliografia:

- Roteiro de ação 1,2,3,4 e 5.
- <http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/probabilidade>
- <http://www.infoescola.com/matematica/probabilidade/exercicios/>
- <http://www.matematicadidatica.com.br/ProbabilidadeExercicios.aspx>
- <http://pt.wikipedia.org/wiki/Probabilidade>
- <https://www.youtube.com/watch?v=E5Ais7qIDrk>
- <https://www.youtube.com/watch?v=it1wZJ3RkVA>