FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

C.E. RUI GUIMARÃES DE ALMEIDA - CERGA

CURSISTA: Vandete Freire de Souza

TUTOR: Edeson dos Anjos Silva

PROBABILIDADES

INTRODUÇÃO

Neste plano de trabalho será explorado o Estudo das Probabilidades que será ministrado no 2º bimestre, tendo como inspiração os roteiros 1,2 e 3.

É importante destacar que embora os jogos de azar tenham historicamente impulsionado o desenvolvimento da Teoria de Probabilidades, essa parte da Matemática tem aplicações em outras ciências, como biologia (principalmente em genética), finanças, marketing, econometria, etc. Ainda que matemáticos como Cardano e Kepler já tivessem se ocupado desse estudo, foi a partir dos contatos, por volta de 1650, de Chevalier de Meré (rico jogador francês) e do matemático Blaise Pascal que a Teoria das Probabilidades se desenvolveu.

De Meré apresentou a Pascal um problema envolvendo jogos (Problema dos Pontos): “Um jogo entre dois jogadores igualmente hábeis é interrompido. No momento da interrupção são conhecidos os pontos obtidos por cada jogador e o número de pontos necessários para que cada um ganhe o jogo. Como dividir o prêmio?”. Esse problema já havia sido discutido por Cardano, Paccioli e Tartaglia. No entanto, motivado pelo desafio Pascal escreveu a Pierre de Fermat, trocando ideias sobre o problema, favorecendo dessa maneira o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades.

Outros estudiosos como Huygens, Bernoulli, De Moivre, também, se dedicaram ao estudo desse tema. Mas foi Laplace quem publicou a Teoria Analítica das Probabilidades, na qual discutiu inúmeros problemas de probabilidade, desenvolveu técnicas para o cálculo de probabilidades e analisou várias aplicações desses cálculos. Laplace é considerado o matemático que mais contribuiu para a Teoria das Probabilidades. No século passado, os matemáticos russos Chebyshev, Markov e Kolmogorov deram prosseguimentos a esses estudos.

A Teoria das Probabilidades estuda os fenômenos aleatórios. Chamamos de experimento aleatório a todo processo cujo resultado é incerto, ou não pode ser previsto, mas que apresenta regularidade. Assim, por exemplo, quando lançamos uma moeda sobre a mesa pode ocorrer cara ou coroa; porém, se forem feitas várias experiências, espera-se que cara ou coroa, ocorram igual número de vezes. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório recebe o nome de espaço amostral e qualquer subconjunto desse conjunto é conhecido como evento.

Os PCNEM (1999: p.257) mencionam que técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Tal fato mostra como é importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio, formando conexões entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

OBJETIVOS

- Identificar fenômenos aleatórios.
- Utilizar um vocabulário probabilístico e perceber os erros mais frequentes de seu uso no cotidiano.
- Conceituar experimento aleatório, espaço amostral e evento.
- Calcular probabilidade por diferentes procedimentos.

METODOLOGIA

Os temas centrais deste projeto são a compreensão dos conhecimentos relacionados com o estudo das probabilidades. Serão desenvolvidas várias atividades que possibilitarão o entendimento dos conceitos relativos ao conteúdo em estudo.

HABILIDADES RELACIONADAS

- Calcular a probabilidade de um evento.
- Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares.
- Resolver problemas envolvendo probabilidade condicional.

PRÉ-REQUISITOS

- Utilizar o Princípio Multiplicativo.
- Fazer uso de tabelas, árvore das possibilidades, diagramas, etc.

Tempo de Duração: 10 horas-aula

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

A atividade será desenvolvida com os alunos organizados em duplas.

1) Os alunos serão divididos em duplas.
2) Cada dupla receberá uma folha com as atividades sugeridas.
3) De acordo com a orientação da professora deverão realizar as atividades e responder aos questionamentos feitos.

1ª Atividade – Jogo de Dados

Este jogo utiliza dois dados e é disputado por dois jogadores, João e Maria. Os resultados abaixo valem os pontos indicados e resultados diferentes não são pontuados.

(4; 1) ou (1; 4) – 1 ponto;	(4; 2) ou (2; 4) – 2 pontos;
(4; 3) ou (3; 4) – 3 pontos;	(4; 4) – 4 pontos;
(4; 5) ou (5; 4) – 5 pontos;	(4; 6) ou (6; 4) – 6 pontos.

Cada jogador poderá efetuar até dois lançamentos. Se não conseguir nenhuma face 4 no primeiro lançamento, efetuar o segundo lançamento com os dois dados. Se conseguiu pelo menos uma face 4 no primeiro lançamento, reserva este dado e decide se lança ou não o outro dado mais uma vez. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação. Caso os dois jogadores obtenham a mesma pontuação o procedimento todo é repetido.

Comentários sobre o jogo: Num primeiro momento todos os alunos deverão jogar. Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O segundo jogador possui maior possibilidade de vencer o jogo?

Estamos supondo a utilização de dados com faces equiprováveis. Se o jogador conseguiu (4; 1) ou (1; 4) – 1 ponto no primeiro lançamento, é conveniente lançar o segundo dado mais uma vez, não existe neste caso possibilidade de piorar sua pontuação. Agora se o jogador obteve 3 pontos, (4; 3) ou (3; 4) no primeiro lançamento e decidir lançar o segundo dado mais uma vez, então ele terá uma chance em 6 de permanecer com a mesma pontuação, duas chances em 6 de piorar sua pontuação; ou seja; obter a face 1 ou a face 2 no lançamento do segundo dado e possui três chances em 6 (faces 4, 5 ou 6) de melhorar sua pontuação.

O jogador poderá não marcar pontos ou ter pontuação zero, isto ocorre se nos seus dois possíveis lançamentos ele não conseguiu nenhuma face 4.

Primeiramente, João efetua um ou dois lançamentos, posteriormente é a vez de Maria efetuar o seu jogo. Assim Maria está numa posição melhor de decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, ela já conhece a pontuação obtida por João. Para tornar o jogo mais justo deve existir uma alternância entre João e Maria para ser o primeiro a jogar.

2ª Atividade – Problema 1

Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir 1 ponto ou 6 pontos? Justificar sua resposta.

Solução

Os alunos deverão apresentar suas soluções utilizando-se de sua própria linguagem. O professor não deve neste momento apresentar definições ou conceitos. O objetivo do problema é fazer com que os próprios alunos sistematizem o conceito matemático que se pretende estudar. O professor deve sim explorar o fato que embora no lançamento de dois dados não sejamos capazes de prever o resultado (*Experimento Aleatório*), somos capazes de descrever todos os resultados possíveis (*Espaço Amostral*).

Temos os resultados possíveis { (1; 1), (1; 2), ... , (1; 6), (2; 1), (2; 2), ... , (2; 6), ... , (6; 1), (6; 2), ... , (6; 6)} – 36 elementos. Uma representação destes 36 pontos em um eixo cartesiano pode também ser bastante útil. João obtém 1 ponto quando ocorre (1; 4) ou (4; 1) (*Evento*). Assim terá duas chances em 36 de marcar 1 ponto. De maneira análoga, terá duas chances em 36 de marcar 6 pontos, isto ocorrerá nos casos (4; 6) ou (6; 4) (*Evento*). Conclusão, João possui a mesma chance de marcar 1 ponto ou 6 pontos considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados.

3ª Atividade – Problema 2

Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir 5 ou 4 pontos? Justificar sua resposta.

Solução

Da mesma forma que no *problema 1*, o professor deve explorar o fato que dos 36 resultados possíveis, João marcará 5 pontos quando ocorrer (4; 5) ou (5; 4), ou seja, terá duas chances em 36 de marcar 5 pontos. Entretanto, João marcará 4 pontos somente no caso de ocorrer a face 4 nos dois dados; ou seja; no caso (4; 4). Assim terá apenas uma chance em 36 de marcar 4 pontos. Conclusão, João possui maior chance de marcar 5 pontos do que 4 pontos considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados.

Após o trabalho com problemas do tipo dos problemas 1 e 2, o professor terá mais facilidade para sistematizar os conceitos de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento.

4ª Atividade – Problema 3

Se João obteve 1 ponto no primeiro lançamento ele deverá utilizar o segundo lançamento para melhorar sua pontuação? Justificar sua resposta.

Solução

No primeiro lançamento, João obtém 1 ponto se ocorre um dos dois casos: (4; 1) ou (1; 4). Pelas regras do jogo, João deve reservar o dado com a face 4 e lançar novamente o segundo dado. Neste caso, terá 5 chances em 6 de melhorar sua pontuação. Os casos favoráveis são: faces 2, 3, 4, 5, ou 6, em seis casos possíveis. Ainda, João terá uma chance em 6 de continuar com 1 ponto e nenhuma chance de piorar sua pontuação.

Conclusão, João deve aproveitar o lançamento do segundo dado com o objetivo de melhorar sua pontuação.

5ª Atividade – Problema 4

Se João obteve 3 pontos no primeiro lançamento, quais são suas chances em melhorar, piorar ou manter inalterada sua pontuação se utilizar o segundo lançamento?

Solução

Da mesma forma que no *problema 3*, João terá 3 chances em 6 de melhorar sua pontuação; 2 chances em 6 de piorar sua pontuação e 1 chance em 6 de manter sua pontuação inalterada. Portanto, neste caso é mais conveniente que João utilize o segundo lançamento. Entretanto, deve-se observar que João poderá piorar sua pontuação.

Para as soluções dos *problemas 1, 2, 3* e *4* já estamos, intuitivamente, calculando a probabilidade (de Laplace):

$$p = \text{Probabilidade de A} = P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

No caso do *problema 4*, concluímos que João possui uma probabilidade de 33,3 % (2/6) de piorar sua pontuação e uma probabilidade de 66,7% (3/6 + 1/6) de manter ou melhorar sua pontuação. Assim, neste caso é recomendável que João aproveite o seu segundo lançamento.

6ª Atividade – Problema 5

Qual a probabilidade de João não obter a face 4 no primeiro lançamento?

Solução

$$p = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{25}{36}.$$

7ª Atividade – Problema 6

Se João obteve 4 pontos no primeiro lançamento, qual a probabilidade de aumentar, diminuir ou permanecer com esta pontuação se utilizar o segundo lançamento?

Solução

João terá probabilidade $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de aumentar sua pontuação, probabilidade $p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de diminuir sua pontuação e probabilidade $p = \frac{1}{6}$ de permanecer com a mesma pontuação. Neste caso, João possui uma probabilidade de 50% (1/2) de diminuir sua pontuação e uma probabilidade de 50% (1/3 + 1/6) de manter ou melhorar sua pontuação, se decidir pela utilização do segundo lançamento.

8ª Atividade – Problema 7

Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 3 pontos, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados uma face 4?

Solução

O professor deve explorar inicialmente que o Espaço Amostral mudou. Quando lançamos dois dados temos um Espaço Amostral S constituído de 36 resultados possíveis, neste caso, a informação que João obteve em pelo menos um dos dois dados a face 4, reduz o espaço amostral para { (1; 4), (4; 1), (2; 4), (4; 2), (3; 4), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4), (4; 6), (6; 4) } – 11 elementos, (Espaço Amostral Reduzido - $\bar{S}$). Assim a probabilidade de João marcar 3 pontos deve agora ser calculada neste novo espaço amostral e João obtém 3 pontos se ocorrer (3; 4) ou (4; 3); ou seja; a probabilidade de João marcar 3 pontos sabendo-se que obteve pelo menos uma face 4 será: p = $\frac{2}{11}$.

A representação de S e $\bar{S}$ e dos casos favoráveis (3; 4) e (4; 3) num eixo cartesiano facilita em muito o entendimento do conceito de Probabilidade Condicional.

9ª Atividade – Problema 8

Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 3 pontos, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo?

Solução

Da mesma forma que no *problema 7*, temos agora o Espaço Amostral Reduzido, $\bar{S}$ = { (2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5) } – 15 elementos. Destes 15 elementos, João pode marcar 3 pontos em apenas um deles, quando ocorrer (4; 3). Assim, a probabilidade de João marcar 3 pontos no primeiro lançamento, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo é p = $\frac{1}{15}$.

A partir daqui é possível começar a sistematizar o conceito de probabilidade condicional. Neste problema, definimos os eventos:

A = { João marcou 3 pontos no primeiro lançamento dos dois dados } e

B = { O número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo}.

Temos neste caso, B = { (2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5) } – 15 elementos. Assim, P(B) = $\frac{15}{36}$.

Agora, A = {(3; 4), (4; 3)} e $A \cap B$ = {(4; 3)}. Assim, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Das probabilidades calculadas acima e do resultado do problema, obtemos:

$$P(A|B) = \frac{1}{15} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observar que as probabilidades $P(A \cap B)$ e P(B) são calculadas considerando-se o Espaço Amostral S, enquanto que a probabilidade condicional

P(A|B) é calculada em termos do espaço amostral reduzido $\bar{S}$.

Obs.: Os problemas serão resolvidos utilizando o mínimo possível de fórmulas.

10ª Atividade – Formalizando os conhecimentos adquiridos

1) Os alunos trabalharão individualmente.
2) Cada aluno fará o registro, em seu caderno, dos conhecimentos adquiridos durante as atividades em duplas, sob a orientação da professora e com sugestões de todos os colegas.

AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados no decorrer das atividades levando em consideração os objetivos propostos.

Em aulas posteriores será feita uma avaliação formalizada para saber se os conteúdos trabalhados foram consolidados, levando em conta, principalmente, a habilidade: Calcular a probabilidade de um evento.

Questões Propostas

1. Foi criado por um aluno um alvo em forma de retângulos.

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
</table>

a- Qual a chance do atirador de acertar a região 1?

b- Qual a chance do atirador de acertar a região 2?

c- Qual a chance do atirador de acertar a região superior?

d- Qual a chance do atirador de acertar a região da esquerda?

2. Em uma propriedade rural, os tomates são colhidos e acondicionados em caixas com 80 tomates cada uma. O dono da propriedade retirou, ao acaso, um tomate de uma caixa com 10 tomates estragados e 70 bons para o consumo. A probabilidade de esse tomate estar bom para o consumo é igual a
A) 1/80 B) 1/70 C) 1/10 D) 1/8 E) 7/8

3. Sérgio possui uma caixa com 70 varetas coloridas. Desse total, 40 são amarelas, 20 são vermelhas e 10, verdes. Sérgio retirou uma vareta da caixa aleatoriamente. Qual é a probabilidade da vareta retirada por Sérgio ser verde ou vermelha?
A) 1/7 B) 2/7 C) 3/7 D) 4/7 E) 3/4

4. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número nela marcado é maior que 8. Qual é a probabilidade de esse número ser múltiplo de 5?
A)1/4 B) 3/20 C) 12/20 D) 3/4 E) 1/12

5. (UFF–RJ) Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 a 75, e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo. Qual é a probabilidade de que os três primeiros números sorteados estejam nessa cartela?

B	I	N	G	O
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

6. **(UFSCar)** Dois dados usuais e não-viciados são lançados. Sabe-se que os números bservados são ímpares. Então a probabilidade de que a soma deles seja 8 é

a) 2/36

b) 1/6

c) 2/9

d) 1/4

e) 2/18

7.

Lúcio está certo: desde o dia 07/07/2007, existem dois grupos de 7 Maravilhas do Mundo: as 7 do Mundo Antigo e as 7 do Mundo Moderno e nenhuma pertence a ambos os conjuntos. Suponha que se escolham, aleatoriamente, duas entre essas 14 Maravilhas. Determine a probabilidade de ambas estarem em um mesmo grupo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM)**. Brasília: MEC, 1999.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. 2006. Disponível em http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos296652. Acesso em 02.02.13.

FIGUEIREDO, Luiz Manoel et al. **Matemática Discreta: módulo 2**. V.2. 2 ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. V.2. Saõ Paulo: FTD, 2005.

IEZZI, Gelson. et al**. Fundamentos de Matemática Elementar: Análise Combinatória e Probabilidades.** V. 5. São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 2. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

SMOLE, Katia C.Stocco; DINIZ, Maria Ignez de S.Vieira . **Matemática: Ensino Médio**. V. 2. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.