Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano – 2º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

Probabilidade e os jogos de azar

Tarefa 1

Cursista: Pedro Henrique Galhardo Rodrigues

Tutor: SUSI CRISTINE BRITTO FERREIRA

Sumário

Introdução

Este Plano de Trabalho tem por objetivo aprofundar os conceitos de probabilidade mais especificamente a probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, probabilidade de eventos dependentes e independentes, probabilidade de eventos sucessivos e probabilidade de eventos simultâneos. Será mostrada também a ligação da probabilidade com os jogos de azar.

Para introduzir o assunto, iremos fazer uma reflexão da história da probabilidade e das personalidades que contribuíram para o seu desenvolvimento.

Os conceitos probabilidade serão passados de forma progressiva, e então os alunos farão alguns exercícios. Para contextualizar o que foi aprendido, será apresentada através de slides, uma explicação sobre o uso da probabilidade para calcular o seguro de veículos.

Os alunos farão um lista de exercícios aos moldes do SAERJINHO. A culminância deste PT será uma lista com 22 exercícios. Tais exercícios serão corrigidos e serão retirados cinco, que farão parte de um teste.

Este PT está previsto para ser aplicado em 8 aulas de 50 min, mais duas aulas para a avaliação.

Desenvolvimento

ATIVIDADE1

Habilidade relacionada:H67 - Resolver problemasenvolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Frações e Princípio Fundamental da Contagem

Tempo de duração: 100 min

Recursos utilizados: Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Conhecer a história da probabilidade bem como suas raízes nos jogos de azar.

Metodologia adotada: Através de uma apresentação de slides, será contada em linhas gerais a história da probabilidade e suas origens com os jogos de azar. Será exibido um vídeo e também será feita a leitura de um texto explicativo sobre o cálculo de seguro de carros.

Um pouco da história da probabilidade e os jogos de azar.

Antes de começar nossa conversa, porque você acha que os jogos de loteria, sorteio e probabilidade são chamados de jogos de azar, e não jogos de sorte?

Pense e depois tocamos novamente nesse assunto.

História da Probabilidade

Você já se perguntou alguma vez como surgiu a ideia de calcular a probabilidade?
A origem da probabilidade remonta aos jogos antigos e jogos de azar. Além disso, ao cálculo de seguros[1].

No Egito Antigo, cerca de 3500 A.C, **o astrágalo**, de certos animais era usado em alguns jogos. Sabemos que o Tali (jogo do osso) era jogado com astrágalo, provavelmente de carneiro. Mais tarde, gregos e romanos estudaram as possibilidades ao se jogar com quatro astrágalos. O dado cúbico, feito a partir dos ossos do calcanhar (aproximadamente 1200 A. C.) também era muito utilizado em jogos.

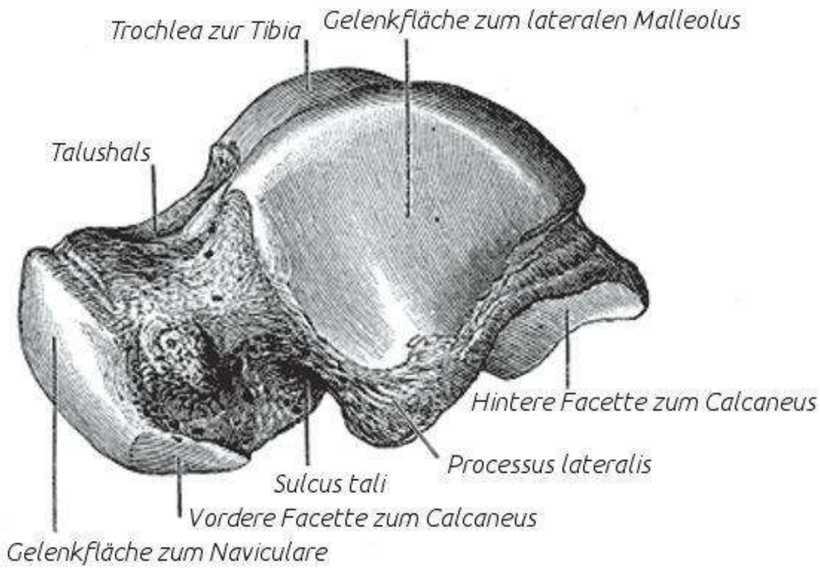
[1] Como é calculado o valor do prêmio do seguro de automóvel?

Na linguagem do seguro, prêmio é o valor que você paga para ter direito ao seguro. No seguro de automóveis, como em qualquer outra modalidade, quanto maior o risco, maior o prêmio. As seguradoras calculam o risco com base em dados estatísticos gerais, que lhes permitem saber, por exemplo, em que porcentagem as mulheres batem menos os carros que os homens, em que regiões os roubos são mais frequentes, que modelos têm custos de reparos mais caros, etc. São levadas em consideração, também, para a determinação do prêmio, informações específicas de cada cliente, tais como seu histórico de sinistros e mesmo acidentes ou roubos de veículos não segurados, além de histórico de crédito, entre outros. O valor do prêmio será fixado pela seguradora a partir das informações que você prestar sobre o automóvel e, em geral, sobre seus dados pessoais e de quem mais vai dirigir o carro, se tem garagem para o pernoite e no trabalho, região em que reside, dentre várias questões que, no conjunto, formam o perfil do segurado. Daí que o questionário preenchido pelo segurado é de fundamental importância. O valor final do prêmio é o resultado do custo do risco – quanto a seguradora estima que vai gastar, em média, com os sinistros da apólice – mais a remuneração do corretor (comissão), os gastos administrativos (funcionamento) da seguradora, impostos e lucro. As seguradoras têm liberdade para estipular o valor do prêmio e oferecem várias opções de financiamento do seguro. Vale lembrar que o documento de cobrança deve ser entregue ao segurado no máximo em até cinco dias úteis antes da data do vencimento.

Disponível em http://www.tudosobreseguros.org.br/sws/portal/pagina.php?l=167

Astrágalo

Também conhecido como tálus, é um osso que liga a tíbia ao calcanhar e possui quatro faces irregulares. É considerado precursor do dado de seis faces usado atualmente



Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Talus_(deutsch)_nach_Gray273.jpg

Além dos jogos, a probabilidade surge da necessidade de se calcular seguros devido às perdas das cargas por naufrágios de navios ou por roubo. Provavelmente, o seu uso teve início com os comerciantes fenícios e mesopotâmicos; depois com os gregos e romanos; e até chegar aos comerciantes marítimos italianos. No pós-Idade Média temos a popularização do seguro de vida. Assim, dos jogos de azar (no sentido de acaso) e dos seguros surge a disciplina Matemática, e com ela a probabilidade.

Os italianos dos séculos XV e XVI foram os primeiros a fazerem cálculos de probabilidade. Destacamos o matemático Pacioli que tentou resolver o problema dos pontos, mas não obteve o resultado correto. Mais tarde, os franceses Pascal e Fermat resolvem de forma correta este problema.

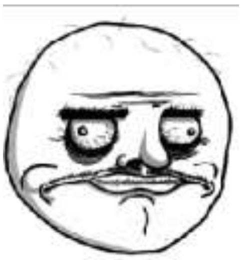
O vídeo a seguir explica como funciona o problema dos pontos.

Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1062

Mas a probabilidade não se limita às áreas apresentadas até aqui. Há muitas outras áreas de aplicação da teoria das probabilidades. Algumas delas são:

* Teoria dos jogos
* Engenharia
* Estatística
* Biologia
* Psicologia
* Sociologia
* Economia
* Pesquisa operacional
* Processos estocásticos
* Mecânica estatística
* Teoria das filas
* Controle de qualidade através do CEP (Controle Estatístico do Processo)
* Teoria dos estoques
* Simulações de sistema

E aí, já sabe por que o nome jogos de azar?



Segundo o wikipedia, "...os jogos de azar são jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder não dependem da habilidade do jogador, mas sim exclusivamente da sorte ou do azar do apostador. A essência do jogo de azar é a tomada de decisão sob condições de risco. Assim, a maioria deles são jogos de apostas cujos prêmios estão determinados pela probabilidadeestatística de acerto e a combinação escolhida. Quanto menor é a probabilidade de se obter a combinação correta, maior é o prêmio."

Ou seja, as chances de perder são muito maiores, logo, AZAR.

ATIVIDADE 2

Habilidade relacionada: H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Frações e Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação, Permutação e Probabilidade.,

Tempo de duração: 100 min

Recursos utilizados: Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Trabalhar com os alunos os conhecimentos de probabilidades da união de dois eventos, probabilidade condicional, probabilidade de eventos dependentes e independentes, probabilidades de eventos simultâneos e sucessivos.

Metodologia adotada: Após uma exposição dos conteúdos serão propostos alguns problemas que envolvam principalmente Probabilidade da União de dois Eventos e Probabilidade Condicional.

Probabilidade da união de dois eventos

Uma boa forma de iniciarmos este assunto é lembrarmos aos estudantes do resultado obtido da teoria dos conjuntos em que eles aprenderam sobre o número de elementos da união de dois conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Assim fica fácil mostrarmos aos alunos o resultado da probabilidade da união de dois eventos. Se considerarmos A e B dois eventos, dividindo $n(\Omega)$ por ambos os membros desta equação, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}, \text{ ou seja,}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esta é a expressão para a probabilidade da união de dois eventos. É importante destacarmos para os alunos que quando $A \cap B = \emptyset$ dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos. Portanto, neste caso a expressão fica reduzida apenas a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo:

Exemplo 1: Em uma determinada turma o professor resolveu chamar um aluno para ir a um quadro. Para isso ele escolheu de forma aleatória um dos 29 números da chamada que se encontrava em seu diário de classe. Qual a probabilidade de ter sido escolhido um número que seja par ou múltiplo de 3?

Acompanhe a leitura do problema com os alunos e ajude-os em primeiro lugar a definir os eventos A = sair número par e B = sair número múltiplo de 3.

Temos então n(A) = 15, n(B) = 9 e n(Ω) = 29. Devemos fazer com que o aluno entenda o que está sendo pedido. O aluno deve entender que o evento sair número par *ou* número múltiplo de 3 significa A∪B. Já o evento A∩B significa sair número par *e* número múltiplo de 3, ou seja, múltiplo de 6, assim n(A∩B) = 4.

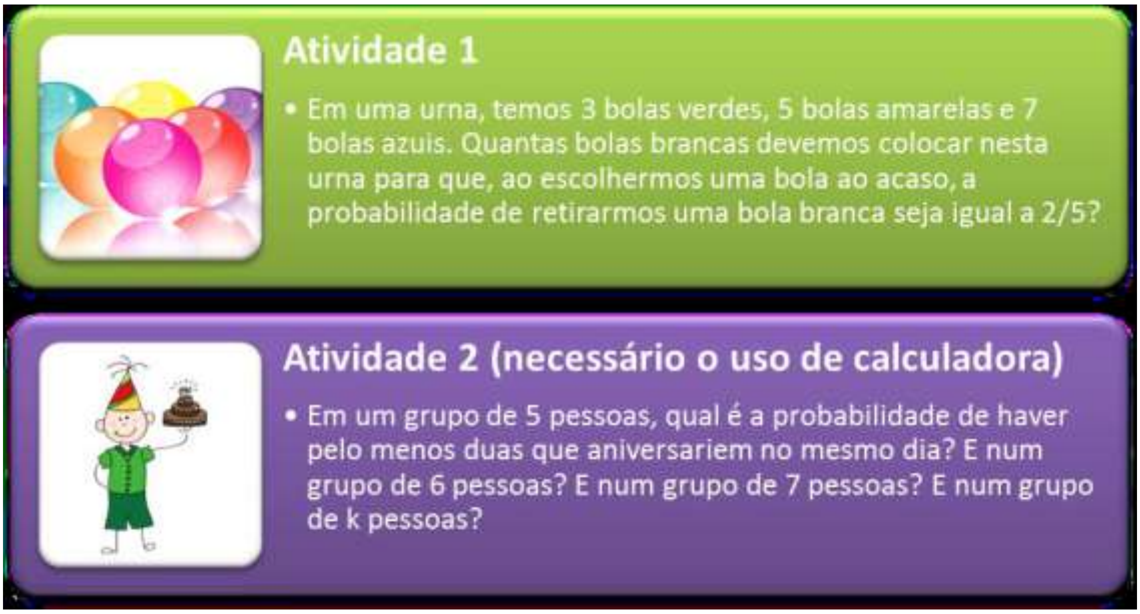
As probabilidades que podemos calcular são:

$$P(A) = \frac{15}{29},\ P(B) = \frac{9}{29} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{4}{29}$$

Usando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{15}{29} + \frac{9}{29} - \frac{4}{29} = \frac{20}{29}.$$

Resolva os exercícios:



Probabilidade Condicional

Muitas vezes, saber que um evento B ocorreu pode nos ajudar a avaliar a probabilidade de ocorrência de um evento A. Saber que o primeiro filho de um casal é menino muda a chance do segundo filho deste mesmo casal ter um segundo filho do sexo feminino? Em que tipo de situação saber de uma informação a mais altera nossa avaliação da probabilidade de um evento ocorrer?

Uma situação simples e interessante para começar, explicando este tópico é a seguinte.

<u>Exemplo 2</u>: Em uma festa de fim de ano de uma empresa, os funcionários resolveram participar de um amigo oculto. No entanto, ao colocar os nomes nos papéis decidiram que colocariam os nomes das mulheres em papel vermelho e os nomes dos homens em papel azul. Entre os funcionários desta empresa estão Marlise e Nilton. Participaram do amigo oculto 25 homens e 35 mulheres. Sabendo que Marlise retirou um papel azul, qual é a probabilidade dela ter retirado o papel com o nome Nilton?

Como já sabemos que a pessoa sorteada pela Marlise foi um homem então ela só pode ter retirado um dos 25 nomes, então podemos considerar o conjunto com estes 25 nomes como sendo o nosso "espaço amostral". Considerando o evento A como "sair o papel com o nome Nilton", e sabendo que o papel azul saiu, caímos no caso de uma probabilidade condicional, pois já conhecemos uma informação adicional, neste caso que o papel era azul.

Se denotarmos o evento "sair papel azul" pela letra B, é possível calcular P(A/B), ou seja, a "probabilidade do evento A ocorrer sabendo que B ocorreu" que pode ser lido como "probabilidade de A dado B".

Assim

$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{25}$$

pois dos 25 papéis azuis 1 tem o nome de Nilton. Lembrando que A∩B = papel azul e que contém o nome Nilton.

De maneira geral, qualquer que seja o evento A e o evento B, teremos:

$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

e ao dividirmos o numerador e o denominador por n(Ω), temos:

$$P(A/B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}\text{, ou seja, } P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Utilizando esta fórmula no exemplo anterior, temos:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{25}{60}}=\frac{1}{25},$$

o mesmo resultado que obtivemos sem a utilização da fórmula. É importante destacar para o aluno que em sempre vale a pena usar fórmulas mecanicamente sem antes entender o que está sendo pedido. Este é um bom exemplo em que a fórmula é desnecessária.

Exemplo 3: Um baralho tem 52 cartas. Uma carta é retirada ao acaso. Sabendo que a carta retirada é vermelha, determine a probabilidade de esta carta ser um rei.

Para resolvermos esta questão devemos saber que as cartas vermelhas são de dois naipes distintos (copas e ouro). Outra informação importante é que em cada naipe temos uma mesma quantidade de cartas, ou seja, são 13 cartas de cada naipe. Assim temos 26 cartas vermelhas e destas, dois reis (rei de ouro e rei de copas).

Após estas informações podemos calcular a probabilidade pedida. Mais uma vez, é importante ajudar os alunos a visualizar e definir os eventos envolvidos na situação:

V = sair uma carta vermelha

R = sair rei

Logo, $P(R/V)=\frac{n(R\cap V)}{n(V)}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$.

ATIVIDADE 1

O texto a seguir foi tirado do artigo “Relações Históricas entre os Jogos de Azar e a Probabilidade” de Thiago Brañas de Melo e José Cláudio Reis, leia-o com atenção e responda a pergunta que se segue.

“O também italiano Galileu Galilei, nascido em Pisa, escreveu Sopra le Scoperte dei Dadi (Considerações sobre o Jogo de Dados), publicada postumamente em 1718. Galileu introduz o texto com a seguinte frase: "O fato de que em um jogo de dados determinados números são mais vantajosos que outros tem um motivo muito óbvio(...)." (Galilei, 1962, p. 192) A partir daí explica para um amigo nesta obra que apesar de serem seis as possibilidades das faces dos três dados somarem 10 e, também, serem seis as possibilidades das faces dos três dados somares 9, o estudo feito por ele mostra que é mais comum de acontecer de dar a soma 10 do que a soma 9.”

Explique por que o trecho sublinhado é verdadeiro?

ATIVIDADE 2

Os jogadores A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha um total de 7 pontos, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve a soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?

Probabilidade de dois eventos simultâneos e a probabilidade de dois eventos sucessivos

Como podemos retirar duas bolas de uma urna? É importante destacar para os alunos a diferença entre eventos sucessivos e eventos simultâneos.

Ao retirarmos ao acaso 2 bolas de uma urna, podemos retirar uma após a outra, ou seja, sucessivamente (com ou sem reposição), ou retirar as duas ao mesmo tempo, isto é simultaneamente. Você pode simular estes movimentos em classe junto com os alunos.

Figura 1: Pegar três bolas, sendo uma cada vez (sucessivamente) é diferente de pegar três bolas de uma vez só (simultaneamente), ou seja, ao mesmo tempo.

Fonte mão com 1 bola: http://www.sxc.hu/photo/1006587 - Jan Willem Geertsma
Fonte mão com 3 bolas: http://www.sxc.hu/photo/1040693 - Dani Simmonds

Uma boa estratégia para ensinar ao aluno como calcular a probabilidade destes eventos é construirmos um diagrama de árvores. A situação a seguir ajuda bastante a explicar o significado de cada ramo desta árvore.

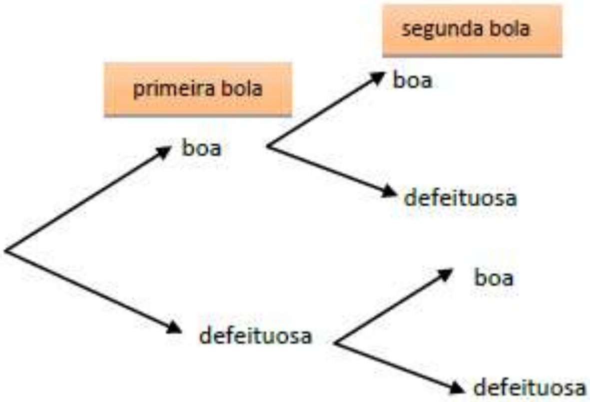
Exemplo 4: Em um lote de 100 peças produzidas numa fábrica 80 estão boas e 20 estão defeituosas. Retiram-se ao acaso duas destas peças sucessivamente, sem reposição.

Qual a probabilidade:

a) da 1ª peça ser boa e a 2ª peça ser defeituosa?

]

É importante construir o diagrama de árvore e explicá-lo aos alunos para só depois resolvermos o problema. Você pode deixá-los conversar e levá-los a estabelecer esta forma de registro dos dados.

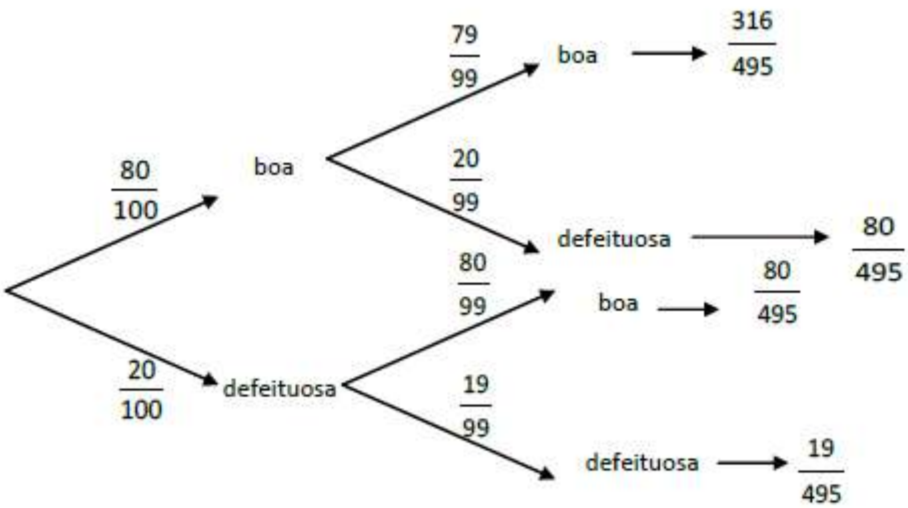


Para calcular estas probabilidades é importante lembrar a fórmula da probabilidade condicional: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, multiplicando ambos os membros desta igualdade por $P(B)$ podemos reescrever esta fórmula como $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Assim, podemos concluir que para calcular a probabilidade em cada *saída* devemos multiplicar as probabilidades dos ramos que antecedem a *saída*. Por exemplo:

P(primeira *boa* ∩ segunda *boa*) = P(primeira boa)·P(*segunda boa /primeira boa*).

Agora já é possível preencher o diagrama com as probabilidades:



As respostas então ficam:

a) 1ª peça ser boa e a 2ª peça ser defeituosa: $\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}=\frac{316}{495}$

b) duas peças defeituosas, ou seja, a 1ª é defeituosa e a 2ª é defeituosa: $\frac{20}{100}\cdot\frac{19}{99}=\frac{19}{495}$

c) da 2ª peça ser defeituosa sabendo que a 1ª peça está boa: $\frac{20}{99}$

d) da 2ª peça ser defeituosa: Esta é uma boa pergunta, pois para a 2ª peça ser defeituosa temos duas possibilidades que são "a 1ª ser boa e a 2ª ser defeituosa" ou "a 1ª ser defeituosa e a 2ª ser defeituosa". A palavra "ou" tem um significado de união então:

P(segunda defeituosa) = P(primeira boa ∩ segunda defeituosa) + P(primeira defeituosa ∩ segunda defeituosa)

Substituindo os valores obtemos $\frac{80}{495}+\frac{19}{495}=\frac{99}{495}$

e) da 1ª peça ser boa sabendo que a 2ª peça está defeituosa: Esta é o tipo de pergunta que devemos tomar cuidado, pois devemos chamar a atenção dos alunos que a informação que possuímos é da 2ª peça e isto no diagrama da árvore significa uma informação a posteriori e não a priori. Portanto, deve ser explicado aos alunos que neste caso a fórmula da probabilidade condicional é importante, na verdade, é essencial. Temos:

$$P(\textit{primeira}\text{ boa / segunda defeituosa})=\frac{P(\textit{primeira}\text{ boa}\cap\text{segunda defeituosa})}{P(\text{segunda defeituosa})}=\frac{\frac{80}{495}}{\frac{99}{495}}=\frac{80}{99}$$

ATIVIDADE 3

Habilidade relacionada: H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Frações e Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação, Permutação e Probabilidade.

Tempo de duração: 100 min

Recursos utilizados: Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Trabalhando com o pano de fundo dos jogos de azar, conceitos de probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, probabilidade de eventos independentes, dependentes e simultâneos.

Metodologia adotada: Serão apresentadas através de slides as situações dos jogos de televisivos de Roda da Fortuna.

Vamos jogar "Roda a Roda"?

Quem conhece ou já brincou com o jogo roda da fortuna? Pois é, embora alguns nunca tenham jogado esse jogo, com certeza já viram alguma versão dele na televisão, no vídeo game ou no computador, etc.
Recentemente uma emissora de televisão brasileira exibia em sua grade de atrações o programa "Roda a Roda", que distribuía muitos prêmios em dinheiros, casas, automóveis, etc. Esse programa é uma versão do jogo Roda da fortuna.

O objetivo dessa versão televisiva do jogo da fortuna é adivinhar uma palavra oculta por meio de uma dica e de alguns palpites. Para isso o jogador deve girar a roleta contendo 24 setores, na qual uma seta faz a marcação do setor selecionado que contem um prêmio financeiro (de R$ 100,00 a R$ 1.000,00), ou "Perde Tudo", ou "Passou a Vez".

Figura 2 – Versão televisiva do jogo Roda da Fortuna.
Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wheel_of_Fortune_set_2006.jpg

Aproveitando o sucesso da versão televisiva, do jogo da fortuna, inúmeros sites da internet apresentam uma versão online, desenvolvida por uma empresa, que pode ser executada gratuitamente direto do computador ligado a internet.

Questão 1

Você sabia que na maioria das versões do jogo Roda da Fortuna, o setor destinado ao maior prêmio é menor que os outros setores? Será que o tamanho do setor interfere na chance da seta parar nesse setor? Justifique.

____

____

____

____

Elizeu resolveu testar suas habilidades e jogar sozinho a versão online do jogo "Roda a Roda". Ele deverá adivinhar uma palavra de 8 letras, cuja dica é PROFISSÃO. Para isso ele deverá rodar uma roleta circular dividida em 24 **setores congruentes**, (contendo valores de R$ 100,00 a R$ 1.000,00, o "Perde tudo" e "Passou a vez"), sempre dois setores de cada um. Uma seta indica qual é o valor do setor da roleta que o participante receberá como prêmio para cada letra que acertar.

A figura 3 apresenta a situação vista por Elizeu ao iniciar o seu jogo.

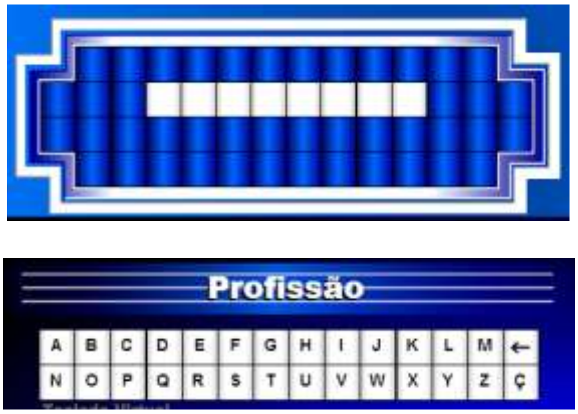


Figura 3 apresenta a situação vista por Elizeu ao iniciar o seu jogo.

Figura 4 –Página do **Jogo** Roda da Fortuna.

Questão 2

Elizeu começa o jogo girando a roleta. Qual é a chance da seta cair no setor “PERDE TUDO”?

____

____

____

Questão 3

Numa determinada rodada, para que Elizeu não tenha direito a escolha de uma letra, basta que a seta termine apontando para os setores “Passou a Vez” ou “Perde tudo”. Nessa rodada, qual a chance de isso acontecer com Elizeu?

____

____

____

____

RESOLUÇÕES

As questões 2 e 3 desse roteiro de atividades exploram a probabilidade geométrica e sua propriedade da união de eventos. É importante que você relembre este conceito de união de eventos com os alunos.

Para o item 2, como a roleta possui dois setores referentes ao “Perde tudo”, temos que a probabilidade da seta parar nesse setor é $p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Para o item 3, o evento A = chance do “Perde Tudo”, $p(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Para o evento B = chance do “Passou a Vez”, $p(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

Logo, como os eventos Perde tudo e Passou a Vez são independentes, temos:

$$p(A \cup B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Após várias rodadas, Elizeu não pode errar mais nenhuma letra. Ele rodou a roleta e a seta parou no setor que marca R$ 800,00. O programa pede para ele dizer uma letra. Veja na figura 2, a seguir, como ficou a situação do painel nesse momento do jogo:

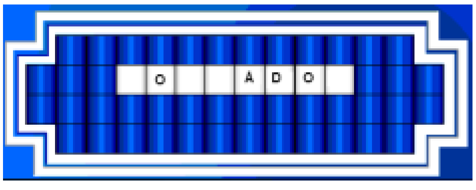


Figura 3 – Situação do jogo após algumas rodadas.

Questão 4

Elizeu desconfia que a profissão no painel é uma das seguintes palavras: Contador, Montador, Cobrador, Boxeador.

Considerando que um dos palpites de Elizeu é a palavra oculta no jogo do Roda a Roda, qual letra ele deverá escolher a fim de não errar a palavra e aumentar suas chances de acertar? Justifique.

____

____

____

Questão 5

Qual é a chance dele acertar a palavra nessa etapa do jogo?

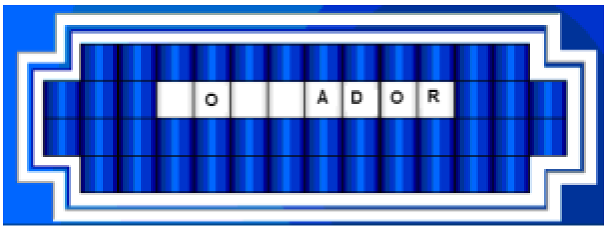
____

____

____

____

Elizeu, então, escolheu a letra "R" e o painel registrou o seguinte resultado.



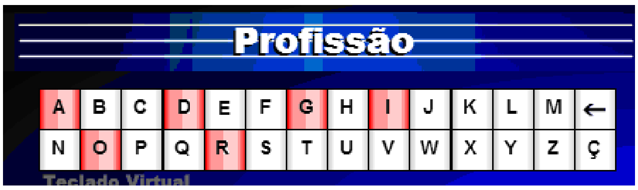


Figura 4 – Jogo após a escolha da letra “R”.

Questão 6

Qual é a probabilidade de Elizeu responder corretamente a palavra oculta, sem ter que girar novamente roleta?

____
____
____
____

RESOLUÇÕES

Professor deixe seus alunos conjecturarem possibilidades, mas controle o tempo que levarão para analisar as situações.

Para prosseguir com a atividade anote no quadro pelo menos 2 respostas diferentes oferecidas por seus alunos, analisando se as mesmas aumentam as chances de acerto de Elizeu.

Verifique se na questão 4 os alunos pensaram o seguinte:

Elizeu deve escolher a letra R, pois fazendo essa escolha ele acertará a última letra da palavra. Se COBRADOR for a palavra certa, aparecerá mais uma letra R na 4ª letra, eliminando assim as demais palavras e restando como único palpite a palavra COBRADOR. Se aparecer apenas a última letra R, a palavra COBRADOR será eliminada e terá uma opção a menos de errar a palavra, aumentando sua chance de acerto.

Acompanhe se no item 5 eles pensaram assim:

Se aparecerem duas letras R, Elizeu terá somente uma palavra a considerar e, portanto sua probabilidade será $p=1$ ou seja $p=100\%$. Se aparecer apenas uma letra R, Elizeu eliminará a palavra Cobrador. Logo sua chance será $p=\frac{1}{3}$.

No item 6, sua chance será $p=\frac{1}{3}$.

A fim de aumentar suas chances de acertar a palavra oculta Elizeu resolveu girar a roleta mais uma vez. Após essa rodada, resolveu arriscar, escolhendo a letra X.

Questão 7

Sabendo que Elizeu acertou a letra X, qual é a chance de Elizeu acertar a palavra oculta, nessa rodada?

____
____
____
____

RESOLUÇÕES

Na questão 7, como Elizeu acertou a letra X, ele eliminou a possibilidade das Palavras Contador e Montador serem a resposta do jogo. Logo, Elizeu terá somente uma palavra a considerar, Boxeador e, portanto, sua probabilidade será $p=1$ ou seja $p=100\%$.

ATIVIDADE 4

Habilidade relacionada: H67 - Resolver problemas envolvendo probabilidade.

Pré-requisitos: Frações e Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação, Permutação e Probabilidade.

Tempo de duração: 100 min

Recursos utilizados: Computador, Data Show, Internet Banda Larga e os Softwares: Microsoft Paint ou Gwenview.

Objetivos: Trabalhando com o pano de fundo dos jogos de azar, conceitos de probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, probabilidade de eventos independentes, dependentes e simultâneos.

Metodologia adotada: Serão apresentadas através de slides as situações dos jogos de televisivos de Roda da Fortuna.

O jogo da Roleta

Figura 5: Roleta de cassino, vamos jogar?
Fonte: http://www.sxc.hu/photo/425859 - Lozba Paul

Questão 1
Imagine uma roleta democrática de 5 setores circulares, isto é, cada setor circular dessa roleta possui a mesma chance de ocorrência na parada do ponteiro. Qual é a chance de ocorrência de cada setor? Faça um desenho dessa roleta, indicando os setores e o valor do ângulo central de cada um deles.

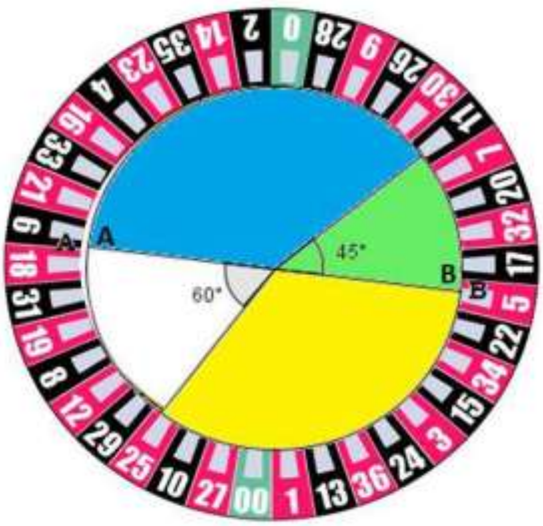
____
____
____
____
____

Como cada um dos 5 setores tem a mesma chance de ocorrência na parada do ponteiro, temos que todos os setores são congruentes.

Logo, temos que a chance de ocorrência de cada setor será $p = \frac{1}{5}$.

Uma possível representação dessa situação pode ser vista pela figura a seguir. Dividindo o círculo em 5 setores congruentes, teremos que cada setor terá um ângulo central de 72º.

Na roleta da figura a seguir, AB é diâmetro e temos que os setores verde e branco têm, respectivamente, ângulos centrais iguais a 45º e 60º. Responda às questões de 2 a 5.



Questão 2

Ao girar essa roleta, qual é a probabilidade do ponteiro cair no setor amarelo?

____
____
____
____

Quando o ponteiro cai no setor amarelo, que possui 120º, temos que a probabilidade de isso ocorrer é $p = \frac{\text{área do setor } (120°)}{\text{área do cículo } (360°)} = \frac{1}{3}$.

Questão 3

Ao girar essa roleta, qual dos seus setores possui a maior chance de ser identificado pelo ponteiro?

____

____

____

____

Questão 4

Se a probabilidade do ponteiro parar em um dos setores dessa roleta é 12,5%, qual é esse setor?

____

____

____

____

Veja se os alunos pensaram assim:

Temos que $p = \frac{\text{área do setor } (x°)}{\text{área do cículo } (360°)} = 12{,}5\% = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$.

Logo, esse setor corresponde a $\frac{1}{8}$ do círculo. Com isso seu ângulo central será de $360 \div 8 = 45°$. Sendo assim, o setor pedido no problema é aquele que possui um ângulo central de 45º.

Questão 5

É possível obtermos uma roleta de 3 setores circulares cuja probabilidade sejam $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$? Justifique sua resposta.

____

____

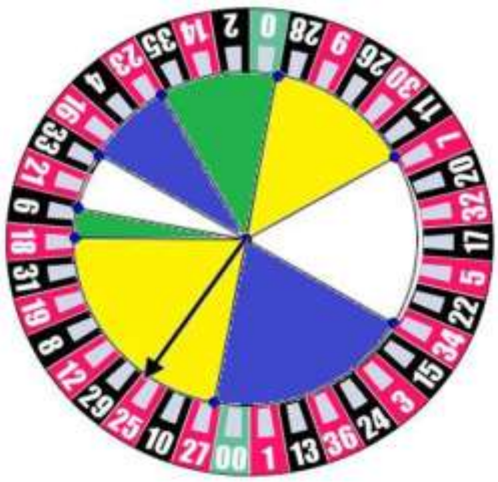
____

____

Professor, deixe seus alunos conjecturarem as possibilidades de resposta, mas controle o tempo que levarão para analisar as situações. Para prosseguir com a atividade, caso a turma apresente muitas dificuldades na resolução desse item, lembre-os que a probabilidade de ocorrência do espaço amostral é 100% (ou 1).

A resposta do item 5 é não, pois a soma das probabilidades desses três setores, que formam o espaço amostral é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}<1$.

A figura a seguir apresenta uma roleta circular formada por 8 setores circulares, cujos ângulos centrais correspondentes variam de 10º em 10º, em sequência crescente. Responda às questões de 6 a 10.



Questão 6

Em qual dos setores a chance do ponteiro parar é maior?

____

____

____

Questão 7

Em qual dos setores a chance de o ponteiro parar é menor?

____

____

____

Por construção, os 8 setores tem ângulos centrais, respectivamente iguais a 10º, 20º, 30º, 40º, 50º, 60º, 70º e 80º. Vale ressaltar que só faz sentido falar nessa probabilidade, pois a soma dos ângulos centrais dos 8 setores é igual a 10º + 20º + 30º +40º + 50º + 60º + 70º + 80º = 360º que é o ângulo central referente ao espaço amostral.

Para a questão 6, lembre aos alunos que a maior chance ocorrerá no setor de maior área e, portanto, de maior ângulo central. Logo, o ponteiro tem a maior chance de parar no setor cujo ângulo central mede 80º.

Para a questão 7, a menor chance ocorrerá no setor de menor área e, portanto, de menor ângulo central. Logo, o ponteiro tem a menor chance de parar no setor cujo ângulo central mede 10º.

Questão 8

Qual é a chance do ponteiro parar em um dos setores de cor branca?

____
____
____
____

Questão 9

Numa determinada rodada, o ponteiro não pode parar em um setor de cor branca ou azul. Qual é a probabilidade de que isso aconteça?

____
____
____
____

As questões 8 e 9 exploram a probabilidade geométrica e sua propriedade da união de dois eventos, representada por $p(A \cup B)$

Na questão 8, como o ponteiro deve cair num setor de cor branca, isso pode acontecer nos setores cujos ângulos centrais são respectivamente iguais a 20º e 60º. Por construção, esses setores correspondem a eventos independentes e, portanto poderemos recorrer a "regra do ou" para determinar essa probabilidade. Assim, teremos:

Evento A = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 20º.

$$p(A) = \frac{\text{área do setor } (20°)}{\text{área do cículo } (360°)} = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}$$

Evento B = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 60º.

$$p(A) = \frac{\text{área do setor } (60°)}{\text{área do cículo } (360°)} = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

$$p(A \cup B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Na questão 9, como o ponteiro não deve cair num setor de cor branca ou azul, ele só pode cair num setor de cor verde ou amarela. Assim temos que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10º ou 40º. ("Regra do ou")

$$p(A) = \frac{\text{área do setor verde}}{\text{área do cículo } (360°)} = \frac{10}{360} + \frac{40}{360} = \frac{50}{360}$$

Evento B = O ponteiro cair no setor de cor amarela (ângulo central igual 50º ou 80º ("regra do ou").

$$p(B) = \frac{\text{área do setor verde}}{\text{área do cículo } (360°)} = \frac{50}{360} + \frac{80}{360} = \frac{130}{360}$$

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

$$p(A \cup B) = \frac{130}{360} + \frac{50}{360} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Isso nos diz que essa chance é de 50%.

Questão 10

Numa determinada rodada, sabe-se que o ponteiro parou em um setor de cor verde. Qual é a probabilidade dele ter parado no setor de maior ângulo central?

____

____

____

____

Professor, a questão 10 explora a probabilidade geométrica e sua propriedade de probabilidade condicional, representada por $p(A/B)$.

É importante que o aluno entenda que a probabilidade condicional $p(A/B)$ trata da probabilidade de ocorrência de um evento A, tendo ocorrido um evento B, ambos do espaço amostral, ou seja, ela é calculada sobre o evento B e não em função do espaço amostral Ω. É preciso que os alunos entendam essa mudança no espaço amostral para o cálculo da probabilidade condicional.

No caso da questão 10, o espaço amostral deixa de ser o círculo e passam a ser os setores circulares de cor verde. Assim segue a resolução desse item.

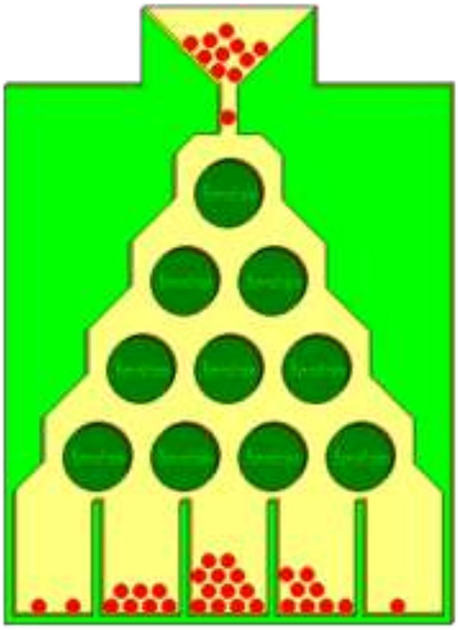
Como sabe-se que o ponteiro caiu num setor de cor verde, ele só pode ter caído nos setores cujos ângulos centrais são, respectivamente, iguais a 10º e 40º. Logo, temos que o espaço amostral deixa de ser o círculo como um todo e passam a ser os setores de cor verde. Assim, segue que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde de ângulo central igual 40º.

Evento B(Espaço amostral) = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10º ou 40º.

$$p(A/B) = \frac{\text{área do setor verde } (40°)}{\text{áreas dos setores verdes } (10°+40°)} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 80\%$$

IMAGENS DA PROBABILIDADE



Lista de Exercício com gabarito

1) (FGV) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

(A) 3/25 (B) 7/50 (C) 1/10 (D) 8/50
(E) 1/5

Solução. O espaço amostral (Ω) possui 50 elementos. O número de múltiplos de 8, pode ser calculado utilizando a progressão aritmética de razão 8, com a_1 = 8 (1º múltiplo) e a_n = 48 (último múltiplo).

$$\boxed{48 = 8 + (n-1).8 \Rightarrow 48 = 8 + 8n - 8 \Rightarrow n = \frac{48}{8} = 6}.$$

O número de elementos do evento E (múltiplos de 8) é n(E) = 6. Logo, $\boxed{P(E) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}}$.

2) No lançamento de um dado não viciado o resultado foi um número maior do que 3, qual é a probabilidade de esse ser um número par?

(A) 1/6 (B) 1/2 (C) 1/3 (D) 2/5
(E) 2/3

Solução1. O espaço amostral para um lançamento de dados é {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Como foi informado queo resultado é maior que 3, o espaço amostral fica reduzido para {4, 5, 6}. Neste espaço, os resultados pares são 4 e 6. Logo $\boxed{P(par\,|>3) = \frac{2}{3}}$.

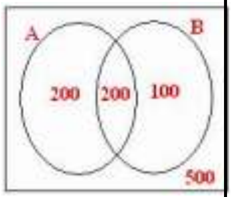
Solução2. Utilizando a fórmula para a probabilidade condicional, temos:

i) E = {resultado maior que 3} = {4, 5, 6}; ii) E' = {resultado par} = {2, 4, 6}; iii) E ∩ E' = {4, 6}

Logo, $\boxed{P(E'|E) = \frac{P(E' \cap E)}{P(E)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{6}.\frac{6}{3} = \frac{2}{3}}$.

3) Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios de um clube **A**, 300 de um clube **B** e 200 de ambos. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade dessa pessoa ser sócia de **A** ou de **B**?

(A) 75% (B) 60% **(C)** 50% (D) 45% (E) 30%



Solução. Utilizando a teoria de conjuntos, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 400 + 300 - 200 = 500$.

Logo, $\boxed{P(A \cup B) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} \rightarrow 50\%}$.

4) Uma pessoa joga uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de sair CARA nas quatro jogadas?

(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 1/8 **(D)** 1/16
(E) 1

Solução1. O espaço amostral para essas jogadas possuirá $2^4 = 16$ elementos. O evento CCCC ocorrerá somente uma vez. Logo, $\boxed{P(CCCC) = \frac{1}{16}}$.

Solução2. Como as jogadas são independentes, isto é, um resultado não depende do outro, temos pelo teorema da multiplicação:
$\boxed{P(C \cap C \cap C \cap C) = P(C).P(C).P(C).P(C) = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}}$.

5) (UPF) - Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. Tira-se, sucessivamente, 2 bolas. Então a probabilidade das bolas serem da mesma cor, é:

(A) 1/7 (B) 2/7 **(C)** 3/7 (D) 4/7
(E) 5/7

Solução. Não há reposição, pois as retiradas são sucessivas.

$$\boxed{P(\text{mesma cor}) = P(BB \cup PP) = P(B \cap B) + P(P \cap P) = \left(\frac{3}{7}\right).\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{7}\right).\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}}.$$

OBS: Usando o espaço amostral: $\boxed{P(\text{mesma cor}) = \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}}$.

6) Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é:

(A) 2/5 (B) 3/5 (C) 1/2 (D) 1/3
(E) 2/3

Solução. Como queremos que três estejam ocupados teremos três desocupados. Alinhando os apartamentos utilizando O (ocupado) e D (desocupado), temos a sequência: ODODOD. O número total de possibilidades de permutar (com repetição) essa situação seria $\boxed{P_6^{2,2} = \frac{6!}{3!3!} = 20}$**. Mas como a situação é por andar, temos 2 possibilidades em cada andar. Logo, 2x2x2 = 8 possibilidades de termos 1 vazio e 1 ocupado por andar. Então,** $\boxed{P(1O / Andar) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}}$**.**

OBS: O número total de ocupações poderia ser calculado como combinação: $\boxed{C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20}$**.**

7) (VUNESP) Dois jogadores, A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e, se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter vencido?

(A) 10/36 **(B)** 5/32 (C) 5/36 (D) 5/35 (E) não se pode calcular

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto de 36 elementos (pares ordenados). O evento "soma 5" será E(A) = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)}. Os eventos "soma 5" e soma "8" são disjuntos, logo não há interseção. Se A não ganhou o espaço amostral ficará reduzido para 36 – 4 = 32 elementos. O evento soma 8 será E(B) = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.

Logo, a probabilidade de B vencer será: $\boxed{P(soma\ 8) = \frac{5}{32}}$**.**

8) Se num grupo de 10 homens e 6 mulheres sorteamos 3 pessoas para formarem uma comissão, qual a probabilidade de que essa comissão seja formada por 2 homens e 1 mulher?

(A) 3/56 (B) 9/56 (C) 15/56 **(D)** 27/56 (E) 33/56

Solução1. Queremos um resultado HHM em qualquer ordem. Logo há 3!/2! = 3 formações possíveis. A probabilidade para um deles, por exemplo, HHM será:

$$\begin{cases} P(HHM) = \left(\frac{10}{16}\right).\left(\frac{9}{15}\right).\left(\frac{6}{14}\right) = \frac{5}{8}.\frac{3}{5}.\frac{3}{7} = \frac{9}{56} \\ P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases} \Rightarrow P(2H1M) = 3.\frac{9}{56} = \frac{27}{56}.$$

Solução2. $$P(2H1M) = \frac{C_{10}^2.C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{\frac{10.9.8!}{2!8!}.\frac{6!}{1!0!}}{\frac{16.15.14.13!}{3!13!}} = \frac{\frac{10.9}{2}.6}{\frac{16.15.14}{6}} = \frac{10.9.3}{8.5.14} = \frac{2.9.3}{8.14} = \frac{9.3}{8.7} = \frac{27}{56}.$$

9)(UFRGS) Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de:

(A) 25% (B) 30% (C) 33% (D) 50%
(E) 60%

Solução1. Queremos um resultado HMM em qualquer ordem. Logo há 3!/2! = 3 formações possíveis. A probabilidade para um deles, por exemplo, HHM será:

$$\begin{cases} P(HMM) = \left(\frac{2}{6}\right).\left(\frac{4}{5}\right).\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}.\frac{4}{5}.\frac{3}{4} = \frac{1}{5} \\ P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases} \Rightarrow P(1H2M) = 3.\frac{1}{5} = \frac{3}{5} \to 60\%.$$

Solução2. $$P(1H2M) = \frac{C_2^1.C_4^2}{C_6^3} = \frac{\frac{2!}{1!0!}.\frac{4.3.2!}{2!2!}}{\frac{6.5.4.3!}{3!3!}} = \frac{2.6}{5.4} = \frac{6}{10} \to 60\%.$$

10) (UFRGS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

(A) 1/10 **(B)** 1/9 (C) 1/5 (D) 2/5
(E) 1/2.

Solução1. Considerando os pares como AA, BB, CC, DD, EE, há um total de 10 meias. O número de formas de retirar duas meias quaisquer desse total

será: $C_{10}^{2}=\frac{10.9.8!}{2!8!}=45$**. Há 5 possibilidades de saírem duas do mesmo par.**

Logo, $P(\text{Mesmo Par})=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$**.**

Solução2. O resultado é um dos pares (AA) ou (BB) ou (CC) ou (DD) ou (EE). Como não há interseções entre os pares, a probabilidade total será a soma das probabilidades de cada caso.

$$P[(AA)\cup(BB)\cup(CC)(DD)(EE)]=\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right)=5.\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}$$

11)(UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de:

(A) 10% (B) 15% (C) 30% (D) 50%
(E) 75%

	Máquina A	Máquina B	Total
defeituoso	15	5	20
não defeituoso	85	95	180
Total	100	100	200

Solução. A caixa possui um total de 200 parafusos e há 15% de 100 = 15 parafusos defeituosos da máquina A e 5% de 100 = 5 parafusos defeituosos da máquina B. Logo, há um total de 20 parafusos defeituosos. Como já foi detectado que o parafuso retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20.

Logo, $P(A\,|\,\text{defeituoso})=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\rightarrow 75\%$**.**

12) (UFRGS) Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídasao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos.A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo éde:

(A) 14% (B) 16% **(C)** 20% (D) 25%
(E) 33%

Solução. O espaço amostral será $\boxed{C_{10}^{2}=\frac{10.9.8!}{2!8!}=45}$**. Cada número de 1 a 9 possui um consecutivo, excetuando o 10, pois não há a ficha 11. Logo,** $\boxed{P(\text{consecutivo})=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}\rightarrow 20\%}$**.**

13) (FUVEST) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

(A) 1/2 (B) 1/3 **(C)** 1/4 (D) 1/5
(E) 1/6

Solução. A decomposição em fatores primos de 60 é (2 x 2 x 3 x 5) = 2² x 3 x 5. O número de divisores é calculado pelo produto (2+1).(1+1).(1+1) = 12. Os únicos divisores primos são 2, 3 e 5, num total de três elementos. Logo, $\boxed{P(\text{DivPrimo})=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}}$**.**

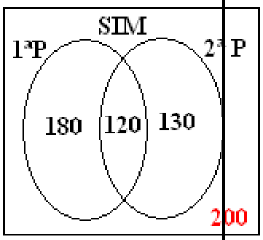
14)(VUNESP) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados 1 , 2 , 3 , . . . , 9 . Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de serem escolhidos) , a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

(A) 0,3777... (B) 0,47 (C) 0,17 **(D)** 0,2777...
(E) 0,1333...

Solução. Há cinco rótulos ímpares e quatro pares. Considerando cada retirada de camundongo e buscando a possibilidades (Ímpar, Ímpar), temos: $\boxed{P(II)=\frac{5}{9}.\frac{4}{8}=\frac{5}{18}=0{,}2777\ldots}$**.**

15)(FEI) Em uma pesquisa realizada em uma Faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. Cento e vinte responderam sim a ambas; 300 responderam sim à primeira; 250 responderam sim à segunda e 200 responderam não a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido não à primeira pergunta?

(A) 1/7 (B) 1/2 (C) 3/8 **(D)** 11/21
(E) 4/25



Solução. O número de alunos será a soma do número de alunos que responderam SIM com o número de alunos que responderam NÃO. Como há interseção nas respostas sim, forma-se o diagrama mostrado.

i) Total de alunos: 180 + 120 + 130 + 200 = 630 alunos.

ii) Responderam NÃO à primeira pergunta: 130 + 200 330 alunos. Observe que responder NÃO à primeira pergunta, implica em responder SIM <u>somente</u> segundapergunta ou NÃO a ambas. Logo, $P(N1^{a}P) = \frac{330}{630} = \frac{33}{63} = \frac{11}{21}$**.**

16)(FATEC) Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade de ele ser um número ímpar é:

(A) 1 (B) 1/2 **(C)** 2/5 (D) 1/4
(E) 1/5

Solução. Para que o número seja ímpar a unidades simples deverá ser um algarismo ímpar. Há dois casos a considerar: _ _ _ _ 5 e _ _ _ _ 7. Como 5 e 7 estão fixos, a permutação será entre os quatro algarismos restantes. Logo há 2.4! = 2(24) = 48 números ímpares. O espaço amostral será 5! = 120 números de cinco algarismos distintos. Logo, $P(N \text{ímpar}) = \frac{48}{120} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$**.**

17) (Objetivo) Uma urna contém apenas 10 bolas. Essas bolas são de diversas cores, e somente 4 são brancas. Sabe-se que as bolas diferem apenas na cor. Retira-se uma bola ao acaso, e em seguida retira-se outra bola, sem reposição da primeira. A probabilidade de obter duas bolas que não sejam ambas brancas é:

(A) 2/15 **(B)** 13/15 (C) 1/3 (D) 3/5
(E) 2/9

Solução. Como há várias possibilidades, o evento complementar E = {duas bolas brancas} facilitará o cálculo: $P(BB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$**. Logo, o evento pedido é o complementar desse:** $P(\overline{BB}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$**.**

18) (EFOA) Uma pessoa tem em mãos um chaveiro com 5 chaves parecidas, das quais apenas uma abre determinada porta. Escolhe uma chave ao acaso, tenta abrir a porta, mas verifica que a chave escolhida não serve. Na segunda tentativa, com as chaves restantes, a probabilidade de a pessoa abrir a porta é de:

(A) 20% **(B)** 25% (C) 40% (D) 75%
(E) 80%

Solução. Na primeira tentativa a pessoa já excluiu uma das chaves. Logo seu espaço amostral fica reduzido a quatro chaves. Na segunda tentativa a probabilidade será 1 em 4. Logo, $\boxed{P(abrir) = \frac{1}{4} \to 25\%}$.

19) Das 180 pessoas que trabalham em uma empresa, sabe-se que 40% têm nível universitário e 60% são do sexo masculino. Se 25% do número de mulheres têm nível universitário, a probabilidade de selecionar-se um funcionário dessa empresa que seja do sexo masculino e não tenha nível universitário é:

(A) 5/12 **(B)** 3/10 (C) 2/9 (D) 1/5 (E) 5/36

Solução. Observe a tabela com os cálculos de acordo com as informações.

	Possui curso	Não possui curso	Total
Masculino	72 – 18 = 54	54	60% de 180 = 108
Feminino	25% de 72 = 18	72 – 18 = 54	72
Total	40% de 180 = 72	180 – 72 = 108	180

Logo, $\boxed{P(M \cap NãoCurso) = \frac{54}{180} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}}$.

20) (F .Maringá) Um número é escolhido ao acaso entre 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:

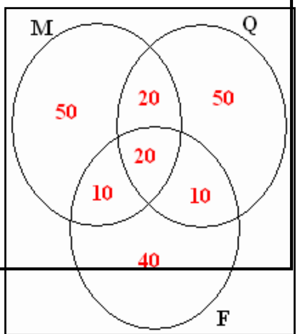
(A) 1/5 (B) 2/25 (C) 4/25 (D) 2/5 **(E)** 3/5

Solução. Não há interseção entre esses eventos. Logo P(Primo ∪QPerfeito) = P(Primo) + P(QPerfeito). Há n{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} = 8 primos e n{1, 4, 9, 16} quadrados: $\boxed{P(Primo \cup QPerfeito) = \frac{8+4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}}$.

21) (FASP) Um colégio tem 400 alunos. Destes, 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química e 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

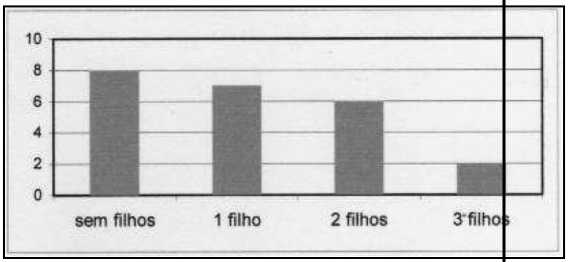
(A) 1/10 (B) 1/8 (C) 2/5 (D) 5/3 (E) 3/10

Solução. Construindo o diagrama com as informações basta identificar a região que indica o número de alunos que estudam Matemática e Química.



$$P(\text{Matemática} \cap \text{Química}) = \frac{20+20}{400} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}.$$

22) (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico mostrado. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



(A) 1/3 (B) 1/4 (C) 7/15 (D) 7/23 **(E)** 7/25

Solução. De acordo com o gráfico, há 8 mulheres sem filhos, 7 mulheres com 1 filho, 6 mulheres com 2 filhos e 2 mulheres com 3 filhos. O total de crianças é: 8(0) + 7(1) + 6(2) + 2(3) = 7 + 12 + 6 = 25. O número de mulheres com filho único é 7. Logo, $P(\text{FilhoÚnico}) = \frac{7}{25}$

Avaliação

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

A LISTA DE EXERCÍCIOS apresentado nas páginas 18 a 36 deste Plano de Trabalho será passada aos alunos em caráter de exercícios de revisão. Desta lista serão retiradas 6 questões que será um TESTE para nota.

Será aplicada também uma prova escrita utilizando questões do SAERJINHO como matriz de referência.

Este plano foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3002 do C.E. Carlos Maria Marchon e para a turma 3002 do C.E. Maria Veralba Ferraz. Serão necessárias 12 aulas de 50 min para a aplicação do mesmo,

Ambas as unidades estão preparadas com projetores e computadores para a aplicação deste trabalho.

Acredito que as atividades propostas neste Plano de Trabalho irão despertar interesse nos alunos em relação aos assuntos abordados.

Fontes de Pesquisa

BUCCHI, Paulo. Matemática e Cidadania: Ensino Médio2, 1ª edição, São Paulo, Escala Editora,2008,pp119-132.

Matemática Didática, Probabilidade.
http://www.matematicadidatica.com.br/ProbabilidadeConceitos.aspx
Acesso em 13 de maio de 2013

Repensando Análise Combinatória. Analise Combinatória. Formação Continuada. Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ.

Pedro Henrique Galhardo Rodrigues, Análise Combinatória, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2013.

Greicy Moraes Martinelle Gustavo, Função polinomial do 1º grau, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2012.

Greicy Moraes Martinelle Gustavo, Razões Trigonométricas, Plano de Trabalho (Formação Continuada), Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ, Rio de Janeiro, 2012.