Matemática 1º Ano – 3ºBimestre/2012
Plano de Trabalho

Função Polinomial do 2º Grau

04/09/2012

Tarefa 1
Cursista: Darling Domingos Arquieres - Matrícula: 911917-3
Tutor: Cynthia Sodré Alexandre

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho tem como finalidade familiarizar os estudantes com a função polinomial do 2º grau com aquisição da linguagem algébrica consigam expressar a relação entre as grandezas e resolver as situações-problema.

O estudo de funções tem aplicações em diversas áreas do conhecimento, utilizando-a podemos analisar, interpretar e descrever diversos fenômenos naturais e sociais, como também fazer previsões de seu comportamento para o uso em desenvolvimentos tecnológicos, projetos de pesquisa e interações com o meio que vivemos.

Aprendizagem da função polinomial do 2º grau faz com os alunos compreendam essa função apresenta um tipo variação regular de crescimento especial, no momento que uma grandeza x cresce, a outra cresce também e depois ambas decresce e vice-versa, aparência de uma "montanha russa".

Segundo o PCN "*Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação."* desta forma, as questões aqui trabalhadas serão apresentadas de formas contextualizadas para melhor compreensão do aluno sobre o conteúdo.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- Habilidade Relacionada: identificar uma função polinomial do 2º grau. **H57** – Resolver problemas envolvendo função do 2º grau.
- Pré-Requisitos: Resolução de equações do 2º grau.
- Tempo de Duração: 100 minutos
- Recursos Educacionais Utilizados: Vídeo do Telecurso Ensino Médio – Matemática – Aula 31 e livro didático.
- Organização da Turma: individual
- Objetivos: Apresentar todos os conceitos sobre o assunto para que o aluno compreenda a sua importância e sua aplicabilidade no dia-a-dia.
- Metodologia Adotada:

  - ✓ 1º: Vídeo Aula
  - ✓ 2º: Apresentação do Conteúdo

Uma função para ser do 2º grau precisa assumir algumas características, pois ela deve ser dos reais para os reais, definida pela fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo que a, b e c são números reais com a diferente de zero. Concluímos que a condição para que uma função seja do 2º grau é que o valor de a, da forma geral, não pode ser igual a zero.

Então, podemos dizer que a definição de função do 2º grau é: $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a € R* e b e c € R.

Numa função do segundo grau, os valores de b e c podem ser iguais a zero, quando isso ocorrer, a equação do segundo grau será considerada incompleta.

Veja alguns exemplos de Função do 2º grau:

$f(x) = 5x^2 – 2x + 8$; a = 5, b = – 2 e c = 8 (Completa)

$f(x) = x^2 – 2x$; a = 1, b = – 2 e c = 0 (Incompleta)

$f(x) = – x^2$; a = –1, b = 0 e c = 0 (Incompleta)

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

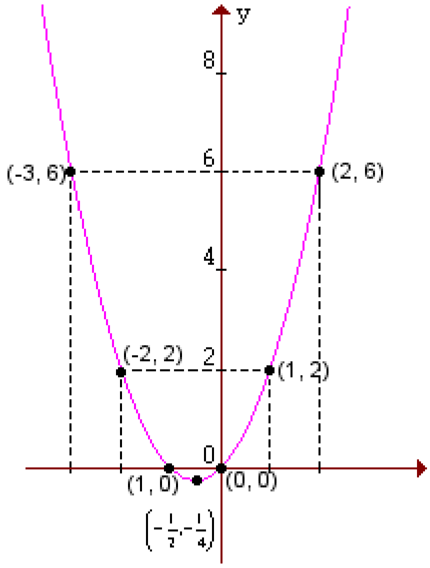
Lembrando f(x) = y

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática y = ax^2 + bx + c, notaremos sempre que:

- se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
- se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

Zero e Equação do 2º Grau

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau f(x) = ax^2 + bx + c , a ≠ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função f(x) = ax^2 + bx + c são as soluções da equação do 2º grau ax^2 + bx + c = 0, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

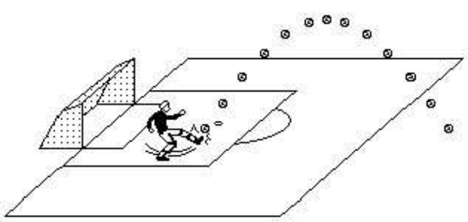
Observação

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

✓ 3º: Questão

1) Um goleiro chuta uma bola que descreve um arco de parábola, como mostra a figura a seguir. Supondo que sua altura y, em metros, x segundos após o chute, seja dada por y = $-x^2$ + 6x, determine o tempo que a bola levará para atingir o chão novamente?



Solução: Quando a bola atingir novamente o chão a altura será zero, ou seja, y = 0.

$-x^2 + 6x = 0$

a = -1; b = 6; c = 0

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-1).0}}{2.(-1)} = \frac{-6 \pm 6}{-2}$$

x = 0

x = 6

Observe que x = 0 representa o ponto inicial do chute, então, a bola levará 6 segundos para atingir o chão.

2) Observe a foto de uma gota em queda livre. Nesta foto, foi utilizado um método que permite visualizar as posições de uma gota em queda livre de acordo com variação do tempo. Esse tipo de fotografia é chamado de estroboscópica. A lei que relaciona a posição (em metro) do objeto em função do tempo (em segundo) é $s(t) = 4,9.t^2$. Calcule a posição s da gota para quando t = 1, t = 2 e t = 3.

	Solução: $s(1) = 4,9 \,.\, 1^2 = 4,9 \,.\, 1 = 4,9$ (passado 1 segundo a gota está 4,9 m distante da torneira). $s(2) = 4,9 \,.\, 2^2 = 4,9 \,.\, 4 = 19,6$ (passado 2 segundos a gota está 19,6 m distante da torneira). $s(3) = 4,9 \,.\, 3^2 = 4,9 \,.\, 9 = 44,1$ (passado 3 segundos a gota está 44,1 m distante da torneira).

- ✓ 4º: Exercícios de Fixação: livro didático adotado pela escola.

Atividade 2

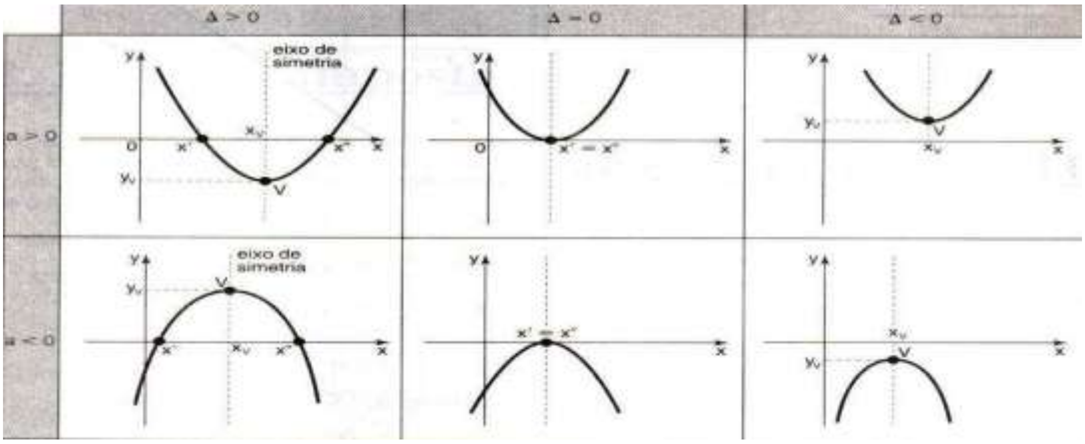
- Habilidade Relacionada: **H57 –** Resolver problemas envolvendo função do 2º grau. **C4** – Resolver problemas que envolvam a determinação do valor y_v como o valor máximo em uma função do 2º grau. **C5 -** Resolver problemas que envolvam a determinação do valor y_v como o valor mínimo em uma função do 2º grau. **C6 -** Resolver problemas que envolvam a determinação do valor x_v como o valor máximo em uma função do 2º grau. **C7 -** Resolver problemas que envolvam a determinação do valor x_v como o valor mínimo em uma função do 2º grau.
- Pré-Requisitos: Conceito de Função Polinomial do 2º grau
- Tempo de Duração: 100 minutos
- Recursos Educacionais Utilizados: Vídeo Roda de Samba, livro didático e folha de exercícios.
- Organização da Turma: Individual
- Objetivos: Aplicar o conceito de máximo ou mínimo de uma função polinomial do 2º grau na resolução de problemas.
- Metodologia Adotada:

  - ✓ 1º: Vídeo Aula – Roda de Samba
  - ✓ 2º: Apresentação do Conteúdo

Vértice e Construção da Parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observação seguinte:

1. O valor do coeficiente **a** define a concavidade da parábola;
2. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x;
3. O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se a > 0), ou máximo (se a< 0);
4. A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola;
5. Para x = 0, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.



✓ 3º: Questão

1) O custo diário de produção de uma indústria de aparelhos de telefone é dado pela função C(x) = $x^2 - 86x + 2500$, onde C(x) é o custo em reais e x é o número de unidades fabricadas. Quantos aparelhos devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo? Qual é o custo mínimo?

Solução: Como a = 1 > 0, a parábola tem um ponto de mínimo V cujas coordenadas são (x_v, y_v). Temos:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-86)}{2.1} = \frac{86}{2} = 43$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-86)^2 - 4.\ 1\ .\ 2500 = 7396 - 10000 = -2604$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-2604)}{4.1} = \frac{2604}{4} = 651$

Assim, devem ser produzidos 43 aparelhos de telefone diariamente para um custo mínimo de R$ 651,00.

2) Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por h(t) = $-20t^2 + 200t$. Qual é a altura máxima atingida pela bala? Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?

Solução: Como a = -20 < 0, a parábola tem um ponto de máximo V cujas coordenadas são (x_v, y_v). Temos:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2.(-20)} = \frac{-200}{-40} = 5$ $\Delta = b^2 - 4ac = 200^2 - 4.\ (-20)\ .\ 0 = 40000 - 0 = 40000$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-40000}{4.(-20)} = \frac{-40000}{-80} = 500$

Assim, a bala atingiu 500m de altura máxima em 5 segundos após o tiro.

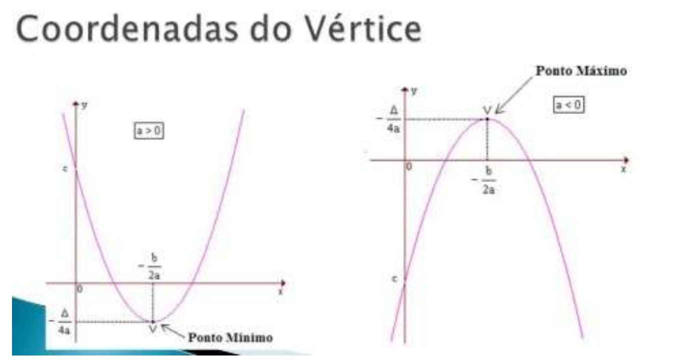
✓ 4º: Exercícios de Fixação: livro didático adotado pela escola.

Atividade 3

- Habilidade Relacionada: Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2º grau a partir de pontos dados ou analisados do gráfico.
- Pré-Requisitos: Resolução de equações e reconhecimentos dos coeficientes da função polinomial do 2º grau
- Tempo de Duração: 100 minutos
- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, quadro e folha de exercícios.
- Organização da Turma: Individual
- Objetivos: Analisar o gráfico de uma função polinomial do 2º grau para determinar sua lei de formação.
- Metodologia Adotada:

✓ 1º: Apresentação do Conteúdo

Relembrar o conteúdo que foi trabalhado até agora e acrescentar o conteúdo abaixo:

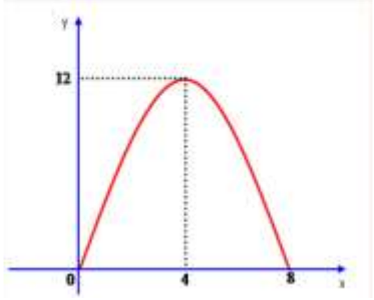


- Para x = 0, temos y = a · 0^2 + b · 0 + c = c; então (0, c) é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

- Numa função polinomial do 2º grau quando Δ é positivo há duas raízes reais e distintas, x_1 e x_2, a abscissa vértice é a média aritmética entre as raízes, ou seja, as raízes são eqüidistantes do x_v.

✓ 2º: Questões:

1) O gráfico da função f(x) = $ax^2 + bx + c$ é a parábola de a figura a seguir. Determine os valores de a, b e c:



Solução:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Pelo gráfico temos: f(0) = 0 => c = 0 e vértice (4, 12)

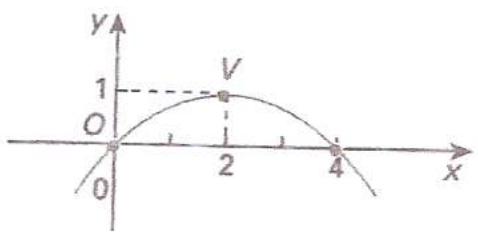
$X_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 4 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 8a = -b \Rightarrow b = -8a$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 12 = \frac{-(b^2-4.a.0)}{4a} \Rightarrow 12 = \frac{-(-8a)^2}{4a} \Rightarrow 12 = \frac{-64a^2}{4a} \Rightarrow 12 = -16a \Rightarrow a = \frac{-12}{16} \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$

$b = -8.\left(\frac{-3}{4}\right) \Rightarrow b = 6$

Logo, ***f(x) = $\frac{-3}{4}$x + 6x***

2) O gráfico da função f(x) = $ax^2 + bx + c$ é o apresentado abaixo. Determine os valores de a, b e c:



Solução:

Os pontos (0,0), (2,1) e (4,0) pertencem ao gráfico, logo:

f(x) = $ax^2 + bx + c$

f(0) = a.0^2 + b.0 + c =0 => **c = 0**

f(2) = a.2^2 + b.2 + c = 1 => 4a + 2b + 0 = 1 => **4a + 2b = 1**

f(4) = a.4^2 + b.4 + c = 0 => 16a + 4b + 0 = 0 => 16a + 4b = 0 => 4b = -16a => b = $\frac{-16a}{4}$ => **b = -4a**

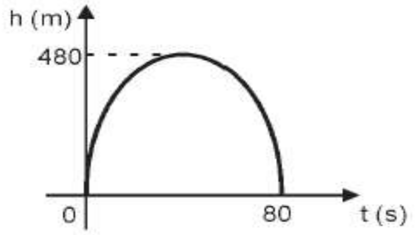
$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ b = -4a \end{cases}$$

4a + 2.(-4a) = 1 => 4a – 8a = 1 => -4a = 1 => **a =$\frac{-1}{4}$**

b= -4.$\frac{-1}{4}$ => **b = 1**

f(x) = $\frac{-1}{4}$x + x

3) O gráfico abaixo representa a altura (h), em metros, atingida por um projétil em função do tempo (t).



Em quanto tempo após o lançamento, o projétil atinge a altura máxima?

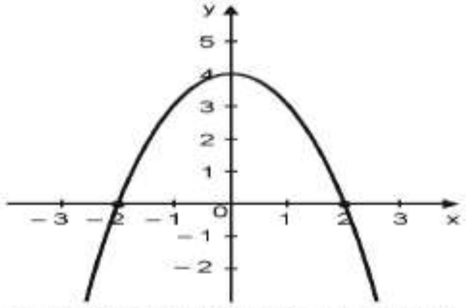
A) 30 segundos.
B) 40 segundos.
C) 50 segundos.
D) 60 segundos.
E) 80 segundos.

Solução: Neste gráfico temos $x_1 = 0$ e $x_2 = 80$ e como o x do vértice é o ponto médio das raízes da função então:

$X_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+80}{2} = 40$

Resposta: Após 40 segundos.

4) O gráfico abaixo representa uma função do 2° grau definida de IR em IR.



A expressão que representa essa função é

A) $y = -2x^2 + 2x + 4$
B) $y = -x^2 - 2x + 2$
C) $y = -x^2 + 4$
D) $y = x^2 - 4$
E) $y = 2x^2 - 2x + 4$

Solução: Neste gráfico temos:
Concavidade da parábola voltada para baixo => a< 0(negativo), com isso, desconsideramos os itens (d) e (e)
Vértice: (0,4), assim:

(a) $x_v = \frac{-2}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{2}$, desconsidera esse item.

(b) $x_v = \frac{-(-2)}{2\cdot(-1)} = -1$, desconsidera esse item.

(c) $x_v = \frac{-0}{2(-1)} = 0$, logo será esse item para o resultado da questão.

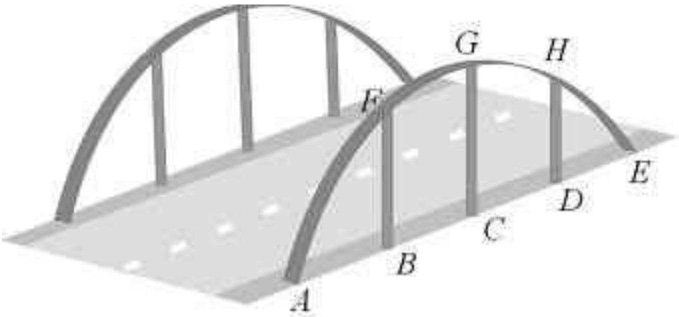
✓ 3º: Exercícios de Fixação: livro didático adotado pela escola.

Atividade 4

- Habilidade Relacionada:
  - Identificar uma função polinomial do 2º grau. **H57** – Resolver problemas envolvendo função do 2º grau;
  - Determinar e/ou identificar valor máximo ou mínimo de uma função polinomial do 2º grau;
  - Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2º grau a partir de pontos dados ou analisados do gráfico.

- Pré-Requisitos: Conhecimento de equação do 2º grau e conceitos da função polinomial do 2º grau.
- Tempo de Duração: 100 minutos
- Recursos Educacionais Utilizados: Livro didático, caderno com o conteúdo e folha de exercícios.
- Organização da Turma: Grupo de 3 alunos.
- Objetivos: Revisar e fixar o conteúdo trabalhado
- Metodologia Adotada:

1) A figura abaixo ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.



Os pontos A, B, C, D e E estão no mesmo nível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25m. Sabendo-se que os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e que a altura do elemento central CG é 20m, a altura de DH é:

(A) 17,5m
(B) 15,0m
(C) 12,5m
(D) 10,0m
(E) 7,5m

2) O lucro mensal de um fabricante de sapato é dado por $L(x) = - x^2 + 130x – 2725$, em que x é o valor de cada par de sapatos vendido. Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Qual deve ser o preço de venda para maximizar o lucro mensal? Qual o lucro mensal máximo?

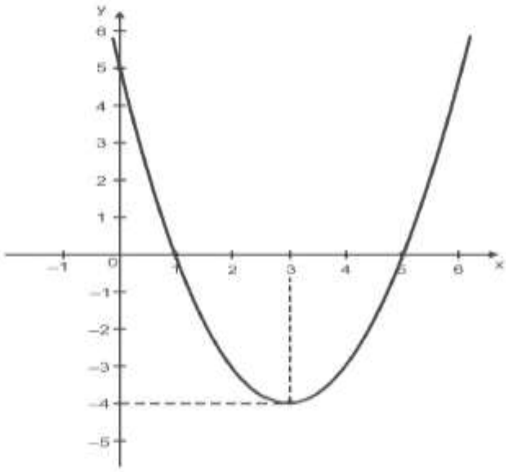
(a) R$ 50,00; R$ 900,00

(b)R$ 1500,00; R$ 65,00

(c)R$ 65,00; R$ 1500,00

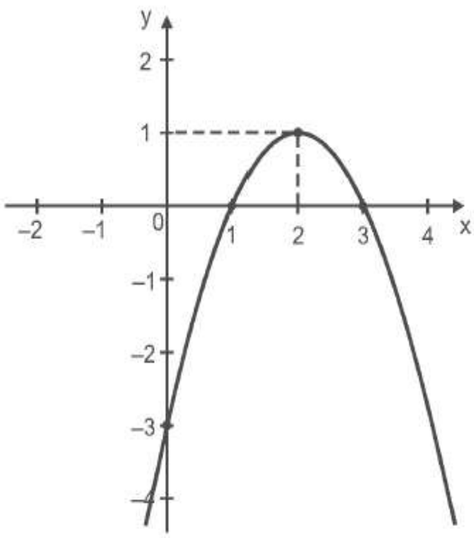
(d)R$ 1362,50; R$ 15,00

3) O gráfico abaixo representa uma função do 2° grau definida de IR em IR



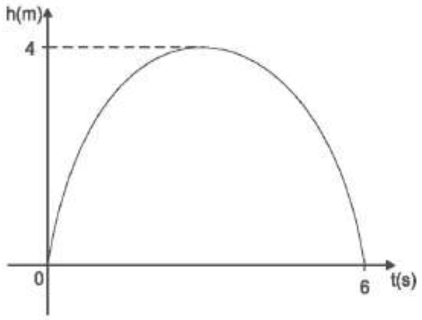
A expressão algébrica que representa essa função é
A) $y = x^2 - 4x + 5$
B) $y = x^2 + 3x - 4$
C) $y = x^2 - 6x + 5$
D) $y = -x^2 - 4x + 3$
E) $y = -x^2 + 5x + 1$

4) Considere abaixo o gráfico da função do 2° grau definida de IR em IR.



A função que representa essa parábola, é
A) $y = -x^2 - 4x - 3$
B) $y = -x^2 + 4x - 3$
C) $y = -x^2 + 2x - 3$
D) $y = x^2 - 2x - 3$
E) $y = x^2 - 4x + 3$

5) O gráfico abaixo representa a altura, em metros, atingida por uma bola de futebol, em uma cobrança de falta, em função do tempo em segundos.



Após quantos segundos essa bola atingiu a altura máxima?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 10

6) Um projétil é lançado do solo, verticalmente para cima, obedecendo à função $y = 50x - 2x^2$, onde y é a altura em metros e x é o tempo em segundos, (desprezando-se a resistência do ar). Determine:

a) a altura máxima atingida pelo projétil;
b) o tempo em que o projétil levará para atingir o solo.
c) a altura em que se encontra o projétil após 2 segundos do seu lançamento.

GABARITO:

1- (B)
2- (C)
3- (C)
4- (B)
5- (A)
6- a) 312,5m
   b) 25s
   c) 92m

AVALIAÇÃO

A avaliação é uma ferramenta essencial para obter informações sobre como está a realização do processo ensino-aprendizagem tanto para o professor como para o aluno. As atividades 1(página 4) e 2 (página 6) comecei a aula lançando a pergunta da questão do dia para questionar os alunos de como resolver-la e depois passei o vídeo citado em que cada atividade. Fiz desta forma para estimular os alunos a assistir o vídeo e verificarem se estavam corretos na maneira em que pensaram em resolver a questão. Então, antes e depois do vídeo, analisei a participação dos alunos e de como eles entenderam o conteúdo do dia. Desta maneira avaliativa, o professor tem como direcionar e aperfeicoar o processo de ensino-aprendizagem para solucionar dificuldades dos alunos.

Já atividade 3 (página 7), para introduzir o conteúdo, recapitulei as atividades anteriores, desde o vídeo até as questões já trabalhadas. Foi uma forma de fixar a matéria e adquirir novos conhecimentos sobre assunto tratado. Aqui foi importante, também, pois foi uma aula onde os alunos participaram com perguntas, opiniões, dúvidas para construirmos juntos os conceitos do conteúdo.

E, para finalizar, a atividade 4 coloquei algumas questões do assunto para que eles discutissem em grupo em que através da socialização aluno-aluno confirmaram o conhecimento adquirido. Neste momento, avaliei o que eles, como um todo, realmente aprenderam da matéria e cooperação entre eles.

BIBLIOGRAFIA

SMOLE, K. S. & DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio.* São Paulo: Saraiva, 2007.

DANTE, L. R. *Matemática.* São Paulo: Ática, 2008.

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática.* São Paulo: Moderna, 2010.

PAIVA, M. *Matemática.* São Paulo: Moderna, 2004

________. *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/Semtec, 2002.

Endereços eletrônicos

http://www.telecurso.org.br/matematica/

http://www.mais.mat.br/wiki/Roda_de_samba

www.**somatematica**.com.br/

www.**mundoeducacao**.com.br/

www.**tutorbrasil**.com.br/